

Universidad Abierta Interamericana

Facultad de Tecnología Informática

Carrera: Profesorado Universitario en Matemática

Trabajo Final

La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: un análisis didáctico autocontenido a partir del artículo de Alicia M. Giarrizzo

Bassoli Morinelli, Verónica

Profesora Universitaria en Matemáticas

2026

Contenido

1 Introducción 2
2 Marco teórico 3
2.1 Registros de representación semiótica 3
2.2 Visualización en la geometría 4
2.3 Materiales y recursos didácticos 6
2.4 Proporcionalidad 7
3 Situaciones de enseñanza 9
3.1 Primera Situación 10
3.2 Consigna 11
3.3 Posibles resoluciones 12
3.3.1 Inciso a 12
3.3.2 Inciso b 18
3.3.3 Inciso c 22
3.4 Análisis 28
3.5 Segunda situación 31
3.6 Consigna 33
3.7 Posibles resoluciones 34
3.7.1 Inciso a 34
3.7.2 Inciso b 39
3.7.3 Inciso c 43
3.8 Análisis 46
3.9 Tercera situación 49
3.10 Consigna 51
3.11 Posibles resoluciones 51
3.12 Análisis 60
4 Conclusión 62
5 Bibliografía 64

1 Introducción

La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria enfrenta múltiples desafíos, tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. A menudo, los estudiantes transitan esta rama de la matemática de manera fragmentada, sin oportunidades que les permitan construir significados en torno a los conceptos, propiedades y relaciones geométricas. Estas dificultades se vinculan, por un lado, con la necesidad de coordinar distintos registros de representación (Duval, 2004), y por otro, con la falta de propuestas que integren el trabajo con materiales y recursos adecuados (Coriat, 1997; Alsina, Burgués y Fortuny, 1987)

El uso de materiales didácticos y recursos tecnológicos adquiere un papel relevante en la enseñanza de la geometría. La posibilidad de construir, manipular y explorar favorece la formulación de conjeturas, la validación de resultados y la construcción de relaciones entre distintas representaciones. En particular, la incorporación de herramientas digitales como GeoGebra amplía las posibilidades de análisis y visualización, aspecto que de Guzmán (2010) reconoce como central en el desarrollo del pensamiento matemático.

El presente trabajo tiene como propósito elaborar una versión autocontenida del artículo *La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria de Giarrizzo* (2021). Esto implica no solo recuperar sus principales aportes, sino también desarrollarlos y explicitarlos, de modo que el texto pueda ser comprendido sin necesidad de recurrir a la bibliografía original.

Las situaciones de enseñanza presentadas no constituyen una reproducción directa de las propuestas del artículo, sino una reelaboración y diseño propio, construidos a partir de los aportes de la autora.

En este proceso, se busca poner en evidencia las decisiones didácticas involucradas en el diseño de las situaciones, así como los procesos de aprendizaje que estas promueven. A lo largo del texto se analizan tres situaciones de enseñanza destinadas a estudiantes de tercer año de secundaria, centradas en el estudio de relaciones entre magnitudes geométricas en el marco de la proporcionalidad y la semejanza. Estas propuestas promueven la formulación de conjeturas, la justificación de procedimientos, la validación de resultados y la construcción colectiva del conocimiento. Asimismo, permiten examinar las producciones de los estudiantes, los errores que emergen y las estrategias de resolución en diálogo con distintos marcos teóricos. De este modo,

se pretende aportar a la comprensión de cómo se construyen estos conocimientos en el aula y de las condiciones que favorecen su desarrollo.

2 Marco teórico

El presente marco teórico reúne un conjunto de conceptos provenientes de la didáctica de la matemática que permiten fundamentar el diseño y análisis de las situaciones de enseñanza propuestas en este trabajo. En particular, se abordan nociones vinculadas con los registros de representación, la visualización, el uso de materiales didácticos y las relaciones de proporcionalidad, en tanto resultan claves para comprender los procesos de construcción del conocimiento geométrico en la escuela secundaria. Estos conceptos no se presentan como un desarrollo teórico independiente, sino en función de su potencial para interpretar las producciones de los estudiantes y orientar la organización de las situaciones diseñadas.

2.1 Registros de representación semiótica

La teoría de los registros de representación semiótica permite comprender que la actividad matemática no se realiza directamente sobre los objetos, sino a través de sus representaciones (Duval, 2004). Desde esta perspectiva, el acceso a los objetos matemáticos está siempre mediado por sistemas de signos, en la medida en que "no hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis" (Duval, 2004, p. 6). En consecuencia, resulta fundamental analizar los distintos registros de representación y las transformaciones que se realizan entre ellos, en tanto constituyen una condición para la comprensión matemática.

En este marco, los registros de representación semiótica se definen como sistemas organizados de signos con reglas propias de uso, que permiten la producción de representaciones, así como los tratamientos —transformaciones realizadas dentro de un mismo registro— y las conversiones, que implican el pasaje de un registro a otro conservando el mismo objeto matemático (Duval, 2004).

Los distintos registros no son equivalentes, en tanto cada uno hace visibles ciertos aspectos del objeto y oculta otros, lo que puede generar tensiones en la interpretación. Por ello, la comprensión matemática exige la coordinación de varios registros mediante las conversiones.

Estas no se producen de manera espontánea, aun cuando los estudiantes dominen los tratamientos internos de cada registro, por lo que "el problema que la mayoría de estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión" (Duval, 2004, p. 150).

Asimismo, se distingue entre situaciones de congruencia y no congruencia entre registros según exista o no una correspondencia estructural directa entre las representaciones. En los casos de no congruencia, la conversión exige una reorganización de la información del registro de origen, que no constituye un ajuste superficial, sino una transformación cognitiva necesaria para acceder a la estructura del objeto matemático (Duval, 2004).

En esta línea, la visualización se entiende como un proceso de reorganización figural que permite identificar relaciones no evidentes en una primera lectura (Duval, 2004). Visualizar no es percibir, sino reorganizar la figura para identificar las unidades figurales pertinentes, es decir, los elementos de la figura que resultan relevantes para el análisis geométrico y las relaciones geométricas relevantes.

Estos aportes fundamentan la organización de la secuencia propuesta, ya que permiten explicar por qué las situaciones diseñadas requieren que los estudiantes trabajen con distintos registros de representación y coordinen progresivamente la producción, el tratamiento y la conversión de las representaciones matemáticas.

2.2 Visualización en la geometría

El papel de la visualización en la enseñanza de la matemática ha sido destacado como un componente constitutivo del razonamiento geométrico. No se trata de un recurso accesorio o ilustrativo, sino de una dimensión esencial del pensamiento matemático.

Desde esta perspectiva, la visualización se entiende como la capacidad de generar, manipular e interpretar imágenes vinculadas a los objetos matemáticos, que pueden construirse tanto en la memoria como en soportes externos, como dibujos, gráficos o modelos. No constituye un complemento opcional, sino un aspecto propio de la actividad matemática, ya que interviene en el descubrimiento de nuevas relaciones, en la resolución de problemas y en la comunicación de ideas (de Guzmán, 2010).

Ahora bien, la visualización no debe entenderse como una visión inmediata de las relaciones, sino como un proceso que requiere aprendizaje y práctica. De este modo, "la visualización es un proceso que hay que aprender en la interacción con las personas a nuestro alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la matemática" (de Guzmán, 2010, p. 17). En consecuencia, comprender una figura o un esquema no es simplemente "verlo", sino interpretarlo en el marco de un sistema de representación.

En relación con lo anterior, la visualización se vincula estrechamente con los registros de representación, en tanto supone la reorganización de una representación para identificar relaciones que no resultan evidentes en una primera lectura (Duval, 2004). De este modo, la visualización cumple un papel central en la comprensión geométrica, ya que permite interpretar las representaciones y construir significado a partir de ellas. Cuando los estudiantes no logran desarrollar esta capacidad de reorganización e interpretación, pueden surgir dificultades en la comprensión de los objetos geométricos.

Diversos estudios han mostrado que la falta de experiencias significativas con materiales y representaciones diversas suele llevar a concepciones erróneas. En la enseñanza de la geometría, la construcción de nociones como área y volumen requiere desarrollar la capacidad de imaginar y operar con objetos espaciales (Alsina, Burgués, y Fortuny, 1987), lo que se vincula con la necesidad de poner en juego procesos de visualización que permitan interpretar y transformar las representaciones.

Asimismo, en relación con la visualización, de Guzmán (2010) distingue diferentes formas en función del tipo de relación que se establece entre las imágenes utilizadas y los objetos matemáticos. Esta clasificación no solo describe distintos modos de visualizar, sino que permite analizar el grado de correspondencia entre las imágenes y los objetos matemáticos, lo que resulta clave para comprender tanto las potencialidades como las limitaciones de la visualización en el aprendizaje.

La visualización isomórfica se presenta cuando existe una correspondencia directa entre los elementos de la imagen y los significados matemáticos que se buscan representar. En estos casos, la interpretación resulta más accesible para los estudiantes, ya que la estructura de la imagen coincide con la del objeto matemático.

La visualización homeomórfica aparece cuando la imagen conserva la estructura esencial del objeto, aunque no de manera literal. Esto implica un primer nivel de abstracción, en el cual el estudiante debe reconocer qué propiedades se conservan y cuáles no, lo cual exige una interpretación más elaborada.

La visualización analógica recurre a metáforas o comparaciones que permiten aproximarse intuitivamente a una relación matemática. Si bien este tipo de visualización puede favorecer la comprensión inicial, también puede dar lugar a interpretaciones erróneas cuando no se explicitan los límites de la analogía.

Finalmente, la visualización diagramática se apoya en esquemas o gráficos convencionales que simbolizan las relaciones sin establecer una correspondencia directa con el objeto. En este caso, la comprensión depende en gran medida del conocimiento de las reglas del sistema de representación utilizado.

En este contexto, las dificultades asociadas a la visualización ponen de relieve la importancia de generar condiciones de enseñanza que favorezcan la producción, manipulación y reorganización de imágenes y representaciones, de modo que los estudiantes puedan establecer relaciones entre ellas y los objetos matemáticos involucrados.

2.3 Materiales y recursos didácticos

El uso de materiales y recursos en la enseñanza de la matemática ha sido abordado desde diversas perspectivas que coinciden en señalar su papel como mediadores en la construcción del conocimiento. Alsina, Burgués, y Fortuny (1987) definen los materiales como "todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje" (p. 13). Coriat (1997) precisa esta noción al distinguir entre materiales didácticos, entendidos como aquellos diseñados específicamente con fines educativos, y recursos, que son elementos no diseñados para enseñar, pero que el docente incorpora con una intención pedagógica (pp. 158–159).

Alsina, Burgués y Fortuny (1987) señalan que el uso de estos materiales se inscribe en una concepción de enseñanza organizada en torno a la idea de laboratorio de geometría, en una metodología experimental. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se concibe como un proceso progresivo que parte de la acción sobre objetos concretos y avanza hacia niveles de mayor

abstracción, en el cual el docente actúa como promotor del conocimiento antes que como transmisor (pp. 17–18). El uso de materiales manipulativos favorece el desarrollo de la imaginación espacial y de las habilidades vinculadas a la representación del espacio, al propiciar la generación y manipulación de imágenes espaciales (p. 33).

En este marco, su valor no reside en la mera presencia, sino en el tipo de actividad matemática que permiten desarrollar. Coriat (1997) señala que los materiales no enseñan por sí mismos, sino que su eficacia depende de las decisiones del docente y de las condiciones en que son utilizados en la enseñanza (p. 174). Asimismo, sostiene que otorgan grados de libertad cognitiva, en tanto liberan la imaginación del esfuerzo de seguir un argumento significativo y la potencian para idear modelos del problema (p. 161). En este sentido, puede interpretarse que su potencial radica en favorecer la producción, manipulación y transformación de representaciones, convirtiéndolos en mediadores entre la acción sobre ellas y las transformaciones intelectuales que se producen a partir de dicha actividad, en línea con los aportes de Coriat (1997) y Giarrizzo (2021).

En relación con lo anterior, en las situaciones diseñadas en este trabajo, la selección de materiales responde a la necesidad de favorecer la acción, la exploración y la comparación de distintas representaciones de un mismo objeto geométrico, de modo que los estudiantes puedan construir relaciones que no serían accesibles a partir de la manipulación dentro de un único registro de representación.

2.4 Proporcionalidad

La proporcionalidad constituye uno de los conceptos fundamentales de la matemática escolar, cuya comprensión resulta necesaria para el estudio de la geometría. En términos generales, dos magnitudes son directamente proporcionales cuando existe un número real fijo k, llamado razón de proporcionalidad, tal que cada valor de una se obtiene multiplicando por k el valor correspondiente de la otra. Esta relación puede describirse como una función lineal de coeficiente k, cuya representación gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas (Godino y Batanero, 2022)

Sin embargo, una dificultad recurrente en el aprendizaje de la proporcionalidad es la tendencia de los estudiantes a aplicar razonamiento aditivo en situaciones que requieren razonamiento multiplicativo. Diversas investigaciones señalan que los estudiantes suelen sumar una cantidad

en lugar de multiplicar por un factor de escala, lo que conduce a errores sistemáticos (Godino y Batanero, 2002). En el contexto geométrico, este conflicto se manifiesta de manera especialmente persistente: es frecuente que los estudiantes apliquen un modelo lineal al analizar la variación de perímetros, áreas y volúmenes cuando varían una o más dimensiones lineales de figuras y cuerpos geométricos, aun cuando no todas estas magnitudes responden a una relación lineal (Giarrizzo, 2021)

En este sentido, es igualmente importante reconocer que no toda variación entre magnitudes es proporcional: la longitud del lado de un cuadrado y su área constituyen un ejemplo de magnitudes no proporcionales, dado que el área varía de manera cuadrática respecto del lado, no de manera lineal.

En relación con lo anterior, en el contexto geométrico la proporcionalidad se vincula estrechamente con la noción de semejanza. Dos figuras son semejantes cuando existe una razón de proporcionalidad k, llamada razón de semejanza, tal que todos los pares de lados correspondientes mantienen esa misma razón, conservando la forma, pero no necesariamente el tamaño. En figuras semejantes con razón 1 a k, las longitudes correspondientes varían en esa misma razón, las áreas en razón 1 a k^2 y los volúmenes en razón 1 a k^3, lo que significa que áreas y volúmenes no varían proporcionalmente con las longitudes sino de forma cuadrática y cúbica respectivamente. (Godino y Batanero, 2002)

A su vez, en el caso particular de los cuerpos geométricos, esta distinción adquiere especial relevancia, ya que el volumen puede variar en proporcionalidad directa con una dimensión cuando las restantes permanecen constantes, pero cuando se modifican varias dimensiones simultáneamente esta relación deja de sostenerse, lo que se corresponde con las dificultades asociadas al uso generalizado de la proporcionalidad directa en estos contextos (Giarrizzo, 2021). Esto implica que no es posible anticipar cómo varía el volumen ni el área total, a partir de una única regla general, sino que es necesario analizar qué dimensiones cambian y de qué manera intervienen en cada fórmula. En conjunto, estos conceptos permiten comprender por qué las situaciones diseñadas en este trabajo proponen analizar la variación de distintas magnitudes geométricas al modificar dimensiones de figuras y cuerpos: el propósito es que los estudiantes puedan distinguir cuándo existe proporcionalidad directa, cuándo la relación es cuadrática o cúbica y cuándo la intuición lineal conduce a conclusiones erróneas.

3 Situaciones de enseñanza

En esta sección se presentan tres situaciones de enseñanza diseñadas para estudiantes de tercer año de la escuela secundaria, centradas en el análisis de las relaciones entre magnitudes geométricas en el marco de la proporcionalidad y la semejanza. Estas situaciones no constituyen una reproducción directa de las propuestas del artículo de referencia, sino una reelaboración que recupera sus aportes y los reorganiza en función de los objetivos del presente trabajo.

Las situaciones se articulan entre sí a partir de una progresión que va desde la puesta en cuestión de concepciones iniciales hacia la construcción e interpretación de relaciones más complejas. En cada una de ellas, se propone a los estudiantes enfrentarse a problemas que requieren anticipar, comparar, justificar y validar resultados, promoviendo la explicitación de sus razonamientos y la confrontación de diferentes estrategias.

Asimismo, las propuestas se diseñan contemplando el uso de distintos registros de representación y recursos, cuya incorporación y regulación responde a decisiones didácticas específicas en cada caso. De este modo, se busca generar condiciones que favorezcan la construcción progresiva de significados y la reorganización de los conocimientos en torno a las relaciones entre perímetro, área y volumen.

En los apartados siguientes, se presenta cada situación junto con el análisis de las producciones de los estudiantes y las decisiones didácticas involucradas en su diseño.

Contexto de incidencia para las situaciones

Los estudiantes han trabajado previamente con relaciones de proporcionalidad en contextos aritméticos, principalmente a partir de situaciones en las que se establecen correspondencias directas entre magnitudes. Sin embargo, estas experiencias suelen centrarse en la aplicación de procedimientos y en interpretaciones de tipo lineal, sin que medie necesariamente un análisis de las condiciones bajo las cuales dichas relaciones se cumplen ni su diferenciación respecto de otros tipos de variación. Asimismo, se encuentran familiarizados con el uso de herramientas digitales como GeoGebra y con recursos materiales que permiten explorar y representar las relaciones entre magnitudes.

3.1 Primera Situación

Propósitos

- Proponer situaciones problemáticas que involucren modificaciones lineales de dimensiones (lados, radios, alturas), favoreciendo la formulación y validación de proposiciones en relación con el perímetro, el área y el volumen.
- Promover el análisis de las relaciones entre distintas magnitudes geométricas (perímetro, área y volumen), poniendo en juego la idea de que los cambios dimensionales pueden producir efectos no lineales.
- Proponer situaciones en las que los estudiantes deban validar proposiciones referidas a la existencia de relaciones lineales en relación con el perímetro, el área y el volumen.
- Favorecer la articulación de diferentes registros de representación (manipulativo, gráfico, algebraico y digital), mediante el uso de materiales y recursos que posibiliten explorar, conjeturar, comparar y validar ideas matemáticas.

Objetivos

Se espera que el estudiante:

- Analice y valide proposiciones sobre cómo las modificaciones lineales en dimensiones (lados, radios, alturas) inciden en el perímetro, el área y el volumen.
- Reconozca y explique que los cambios lineales en las dimensiones no producen necesariamente cambios lineales en las distintas magnitudes, estableciendo relaciones entre ellas.
- Utilice y articule diferentes registros de representación (manipulativo, gráfico, algebraico y digital) para explorar, representar, comparar y justificar relaciones geométricas.
- Confronte sus ideas iniciales, discuta con sus pares y compare distintos razonamientos, avanzando en la construcción de argumentos para validar proposiciones geométricas.

Forma de la consigna

La actividad está organizada en tres incisos, cada uno con una proposición a analizar. La consigna no especifica procedimientos de resolución, habilita el ensayo y la exploración con casos particulares, de modo que, si se encuentra un caso en el que la proposición no se cumpla,

funcionará como contraejemplo; si dicho contraejemplo no surgiera, se necesita un proceso mental hacia la generalización. Los materiales y recursos quedan disponibles para la exploración.

Metodología

El trabajo se desarrollará en grupos de hasta cuatro estudiantes, y la resolución será colaborativa, promoviendo la discusión, el análisis conjunto y la validación de ideas entre compañeros.

Los materiales y recursos se pondrán a disposición de los estudiantes. De este modo, cada grupo podrá seleccionar cuáles utilizar en función de sus estrategias de resolución. Aquellos materiales que cuenten con versiones digitales estarán disponibles en ambos formatos.

El docente intervendrá mediante preguntas orientadoras, evitando anticipar respuestas y fomentando el uso de distintos registros de representación (manipulativo, gráfico, digital y algebraico). El trabajo grupal será seguido por una puesta en común, en la que se confrontarán y articularán las diferentes producciones para arribar a conclusiones colectivas.

Materiales y recursos didácticos

- Inciso (a): varillas tipo mecano, broches mariposa, GeoGebra.
- Inciso (b): fichas cuadradas, geoplano con bandas elásticas, cartón y linterna para la experiencia de proyección.
- Inciso (c): cilindros de acetato de distintas medidas, arroz, GeoGebra.

3.2 Consigna

Explicar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar sus respuestas.

a) Para que el perímetro de un triángulo rectángulo aumente 4 cm, es suficiente con que aumente 4 cm la longitud de su base[1].
b) Para reducir el área de un cuadrilátero a la mitad, basta con reducir su altura a la mitad. El cuadrilátero obtenido es semejante al original.
c) Para triplicar el volumen de un cilindro es suficiente triplicar su radio.

[1] Se considera que cualquier lado puede tomarse como base. En el caso del triángulo rectángulo, puede elegirse cualquiera de sus lados; sin embargo, resulta conveniente considerar como base a uno de los catetos.

3.3 Posibles resoluciones

3.3.1 Inciso a

El primer grupo asume inicialmente que la proposición es verdadera: argumentan que, como el perímetro es la suma de los lados, aumentar 4 cm a la base implica necesariamente que el perímetro crece en esa misma cantidad. Expresan su razonamiento de la siguiente manera:

$$P' = (a + 4) + b + c$$

donde a es la base original y el nuevo perímetro. Bajo esta lógica, concluyen que el perímetro debía crecer exactamente en 4 cm. A partir de aquí se desarrolla el siguiente intercambio:

P: ¿Construyeron el nuevo triángulo?

A partir de esta pregunta los estudiantes deciden utilizar las varillas tipo mecano para verificar. Construyen un triángulo de base 8 cm, altura 15 cm e hipotenusa 17 cm y luego intentan armar otro manteniendo la misma altura, pero con la base aumentada a 12 cm.

A1 ¡No encaja! (Figura 1)

A4: Esperen, yo sí pude hacer que encajen (figura 2)

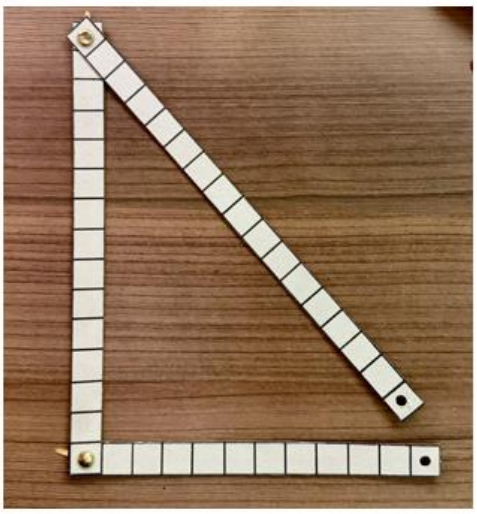


Figura 1

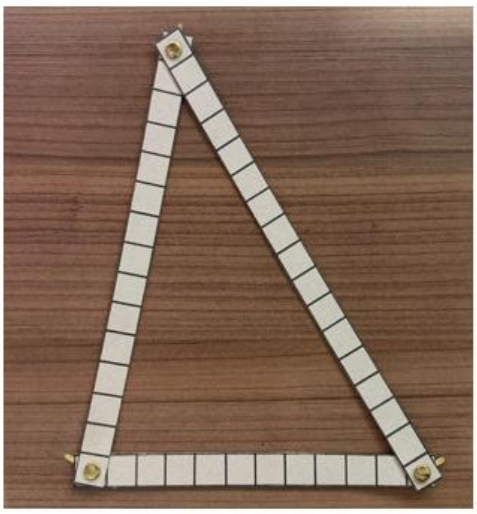


Figura 2

P: ¿Podrían pensar por qué en un caso encaja y en el otro no?

A2: El que encaja ya no es un triángulo rectángulo

A1: Claro, entonces no se puede armar, la afirmación es falsa.

La profesora continúa:

P: Entonces, ¿qué tendría que pasar para que siga siendo un triángulo rectángulo?

A3: Y tendría que cumplirse lo de Pitágoras.

P: ¿Y cómo podrían ver si en este caso se cumple o no?

Entonces, los estudiantes proponen calcular la longitud que debería tener la hipotenusa para que el nuevo triángulo, con base 12 cm y altura 15 cm, conserve la condición de triángulo rectángulo:

$$h = \sqrt{12^2 + 15^2} = \sqrt{369} \approx 19.21 \text{ cm}$$

P: Bien, entonces, relean la consigna, ¿pueden responderla?

A2: Es falsa, porque no alcanza con aumentar la base. Tuvimos que aumentar la hipotenusa también.

A3: Además el perímetro original era: $P = 8 + 15 + 17 = 40$ y si calculamos con el valor de hipotenusa nuevo es

$$P' = 12 + 15 + 19.21 \approx 46.21$$

Entonces en este caso no aumenta 4 cm, aumenta más.

El segundo grupo trabajó con GeoGebra para modelar el problema. Dibujaron un triángulo rectángulo con base de 5 cm, altura de 12 cm e hipotenusa de 13 cm, obteniendo así un perímetro de 30 cm. Al modificar la base, al igual que el grupo anterior, notan que la construcción con esas medidas no es posible.

P: ¿Cómo lo están construyendo?

Los estudiantes le muestran (Figura 3)

P: Vuelvan a leer la consigna, ¿qué características tiene que tener el triángulo propuesto?

A2: Que sea rectángulo

P: ¿Pueden asegurar que el triángulo que construyeron cumple con la definición de rectángulo?

A3: Ah no, el ángulo no mide 90°, claro, por eso no daba.

Los estudiantes revisan la construcción y modifican el protocolo de construcción incorporando la condición de ángulo recto (Figura 4).

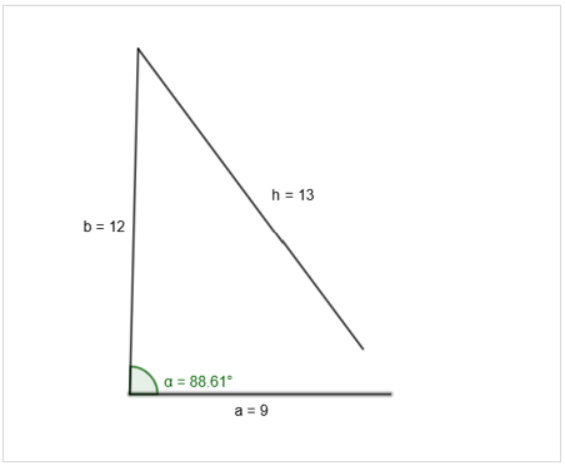


Figura 3

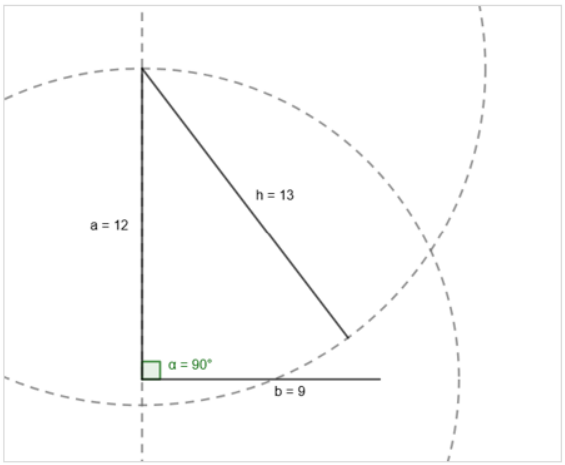


Figura 4

A3: Pero profe, ahora sí es un ángulo recto y tampoco da.

P: Cierto, tampoco se forma el triángulo rectángulo. Analicen porque no se logra formar con esos datos.

A2: Había algo que se tenía que probar para que fuera triángulo rectángulo, ¿no?

A1: Si, una fórmula, la de Pitágoras creo…

P: ¿Pueden comprobarlo de alguna manera?

A2: Lo podemos probar con las nuevas medidas:

$$13^2 = 12^2 + 9^2$$

$$169 \neq 225$$

$$169 \neq 225$$

A2: Entonces no cumple.

A4: O sea, se puede dibujar un triángulo, pero no es rectángulo.

A1: Pero mira el gráfico, le falta poquito a la hipotenusa, si la alargáramos un poco se podría. Quizás el problema es que también hay que aumentar esa medida.

A2: A ver…mide 15. ¿Cuánto da el perímetro ahora?

A3: 9+12+15=36, antes era 30, aumento 6, tampoco sirve así.

P: Entonces, ¿qué pasa con la afirmación inicial?

A3: Que es falsa, porque con esas medidas no se obtiene un triángulo rectángulo, y si modificamos otra medida para que lo sea, el perímetro aumenta 6 en vez de 4.

Otro grupo decidió abordar el problema desde un enfoque algebraico. Suponiendo que la afirmación era correcta, argumentaron que, dado que el perímetro de un triángulo se obtiene sumando sus lados, entonces agregar 4 cm a la base simplemente haría que el perímetro creciera en esa misma cantidad:

$$P = l_1 + l_2 + l_3$$

Tomaron un triángulo de base 4 cm, altura 3 cm e hipotenusa 5 cm:

$$P = 5 + 3 + 4 = 12$$

Luego, aumentaron la base en 4 cm, suponiendo erróneamente que los otros lados podían mantenerse fijos:

$$P' = 5 + 3 + (4 + 4) = 16$$

Finalmente, calcularon la diferencia:

$$P' - P = 16 - 12 = 4$$

Cuando la profesora se acerca y comparten su resultado, pregunta:

P: ¿Construyeron el nuevo triángulo?

A1: No, pero no hace falta, ya hicimos las cuentas y nos dio que el perímetro aumentó en 4 cm.

P: ¿Y cómo saben qué tipo de triángulo hallaron?

A3: Bueno… no sé, a ver…

Los estudiantes intentan representar el triángulo correspondiente a las nuevas medidas y advierten que no pueden construirlo.

A1: No encaja….

P: ¿Por qué creen que no encaja?

A1: Porque los lados no alcanzan…

P: ¿Qué quieren decir con que "no alcanzan"? ¿Cómo podrían asegurarse de que no se puede construir más allá de lo que se ve?

A2: Tendríamos que comprobar si la suma de dos lados es mayor que el tercero.

Los estudiantes verifican que, con las longitudes 3 cm, 5 cm y 8 cm, dicha condición no se cumple.

P: Entonces, ¿qué significa eso para el cálculo que habían hecho al principio?

A1: Que no sirve, porque el triángulo ni siquiera existe.

P: ¿Dónde creen que está la falla en el razonamiento que hicieron? ¿A qué se la adjudican?

A2: Que los lados tienen que cumplir una condición para poder formar un triángulo.

P: Entonces, ¿alcanza con sumar las medidas para decidir cuánto cambia el perímetro?

A1: No, hay que fijarse si el triángulo se puede construir.

A partir de este intercambio, el grupo advierte que el razonamiento inicial, basado únicamente en la suma de las longitudes, no tenía en cuenta que los lados de un triángulo deben cumplir ciertas condiciones para poder formar una figura. Al verificar que con las nuevas medidas el triángulo no puede construirse, reconocen que su conclusión anterior no era válida y que la proposición es falsa.

Finalizado el trabajo en grupos, la profesora propone una puesta en común con el objetivo de analizar los distintos procedimientos utilizados y revisar las conclusiones alcanzadas.

Comienza dando la palabra al grupo que trabajó con las varillas (Grupo 1).

A1: Nosotros pensamos que el perímetro iba a aumentar 4 cm porque es la suma de los lados.

A2: Pero cuando intentamos armar el triángulo con la base aumentada, no encajaba.

P: ¿Qué hicieron para comprobarlo?

A1: Usamos las varillas. Armamos uno con 8, 15 y 17, y después probamos con base 12.

A4: En un caso no se podía armar, y en otro sí, pero no era rectángulo.

P: ¿Alguien obtuvo algo distinto?

A2 (grupo GeoGebra): A nosotros al principio tampoco nos daba rectángulo.

A3: Pero probamos cambiando la hipotenusa.

A2: Con base 9 y altura 12, la hipotenusa pasó a medir 15.

A3: Y ahí sí se formaba un triángulo rectángulo.

A1 (grupo manipulativo): Nosotros también vimos que había que cambiar la hipotenusa para que funcione.

P: ¿Qué diferencias encuentran entre esos casos?

A1: Que a veces no se puede formar el triángulo y otras sí, pero no cumple lo que pide la consigna.

A2 (grupo algebraico): Nosotros al principio hicimos la cuenta y nos daba que aumentaba 4. Pero cuando intentamos dibujarlo, no pudimos construir nada, ni siquiera un triángulo que no fuera rectángulo.

P: ¿Qué quieren decir con que no pudieron construir nada?

A2: Que probamos con esas medidas y no encajaba de ninguna manera.

A3 (grupo GeoGebra): Pero nosotros sí pudimos dibujar un triángulo…

A1 (grupo manipulativo): Sí, nosotros también pudimos armar uno, pero no era rectángulo.

A2 (grupo algebraico): Claro, a nosotros directamente no nos daba.

P: ¿Qué diferencias encuentran entre lo que les pasó a unos y a otros?

A1: Que a veces se puede armar un triángulo y otras no.

A2: Y que cuando se puede, no necesariamente es rectángulo.

P: ¿Todos están de acuerdo?

A1: Sí, porque cuando sí se puede construir, ya no es rectángulo.

A2: (grupo GeoGebra): O hay que cambiar alguna medida para que lo sea.

P: ¿Qué pasó con el perímetro en el caso en que lograron que fuera rectángulo?

A3: (grupo GeoGebra): Pasó de 30 a 36.

A1: (grupo manipulativo): En nuestro caso también aumentaba más de 4.

P: Entonces, a partir de todo lo que fueron viendo, ¿qué pueden concluir?

A1: Que no alcanza con aumentar la base.

A2: Que siempre que cambiamos una medida, cambian otras.

A3: Y que el perímetro no aumenta siempre lo mismo.

A continuación de la puesta en común, la profesora retoma las producciones de los distintos grupos con el propósito de organizar y precisar las conclusiones construidas colectivamente.

P: En la puesta en común aparecieron distintas situaciones: en algunos casos no fue posible construir el triángulo, en otros fue posible, pero no se cumplía la condición de ser un triángulo rectángulo, y también se observó que, para que el triángulo vuelva a ser rectángulo, fue necesario modificar más de una medida. A partir de esto, podemos afirmar que no alcanza con modificar una sola medida para prever qué ocurre con el triángulo. Tal como se puso en evidencia, las longitudes de los lados están relacionadas entre sí, por lo que al variar una de ellas, las otras también deben ajustarse.

En consecuencia, no es posible considerar que las longitudes cambian de manera independiente ni que el perímetro varía en la misma proporción que una de sus dimensiones. El comportamiento del triángulo depende de la relación que se establece entre sus lados.

En el pizarrón queda:

Conocimientos previos: Desigualdad triangular → En todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero Teorema de Pitágoras → $a^2 + b^2 = c^2$	Al aumentar la base: → Puede no formarse ningún triángulo → Puede formarse, pero no es un triángulo rectángulo → Para que sea rectángulo, es necesario ajustar la hipotenusa en función de los otros lados. Ejemplo: (5,12,13) → P = 30 (9,12,13) → P = 36 El perímetro no aumenta en la misma medida que la base Las medidas están relacionadas entre sí.

3.3.2 Inciso b

El primer grupo decide trabajar con las fichas cuadradas. Construyen un paralelogramo, en particular un rectángulo, de 2 fichas de base y 4 fichas de altura (Figura 5). Cuentan las fichas y resuelven que el área es igual a 8 unidades cuadradas. Luego arman otro, esta vez reduciendo la altura a 2 fichas (Figura 6). Vuelven a contar y obtienen un área de 4 unidades cuadradas. Concluyen que la proposición se cumple.



Figura 5



Figura 6

Al analizar la segunda parte de la proposición, los estudiantes sostienen que el nuevo cuadrilátero es semejante al original, argumentando que “mantiene la misma forma y los mismos ángulos”.

P: ¿Cómo podríamos comprobar si realmente estas figuras son semejantes?

A3: Si fueran de igual tamaño tendrían que coincidir, ¿no?

P: Podemos intentar eso. Traje un ejemplo para ver qué ocurre en un caso similar.

La docente presenta dos figuras preparadas previamente: una figura original y otra en la que solo se redujo la altura.

Utilizando una linterna, proyecta la sombra de la figura reducida sobre la original y propone observar qué sucede al variar la distancia de la luz. (Figura 7)

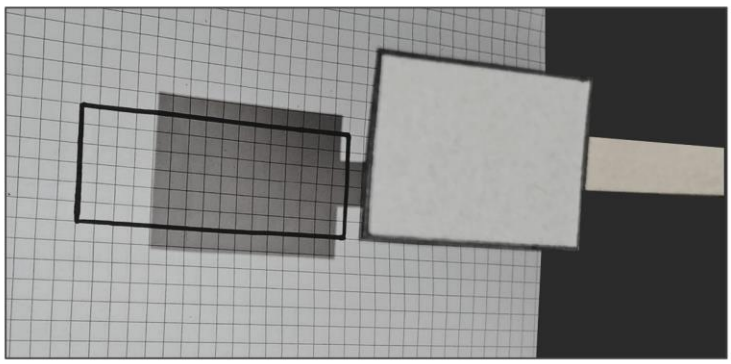


Figura 7

Al realizar la experiencia, los estudiantes advierten que la sombra no coincide: al acercar el recorte se agranda demasiado; al alejarlo, queda más pequeña.

P: ¿Qué observan que pasa cuando cambian la distancia de la luz?

A2: Se agranda … pero se pasa.

A3: Si la alejo queda más chica… no hay forma de que coincida justo

P: ¿Y qué ocurre con la forma cuando pasa eso?

A1: No cambia… es igual, pero más grande o más chica.

P: Entonces, cuando una figura se agranda o se achica de esa manera, ¿qué pasa con sus lados?

A2: Cambian juntos

P: ¿Se cumple esto en los rectángulos que ustedes armaron con fichas?

A3: No, porque solo cambiamos la altura.

P: Entonces, ¿qué pueden decir sobre la proposición?

A3: Que el área sí se reduce a la mitad, pero no es la misma figura más chica.

A1: O sea, no son semejantes.

Los estudiantes del grupo 2 deciden utilizar un Geoplano con bandas elásticas. Construyen un paralelogramo de base 5 unidades y altura 2 unidades. Al reducir la altura a la mitad, observan que el área también se reduce a la mitad. (Figura 8)

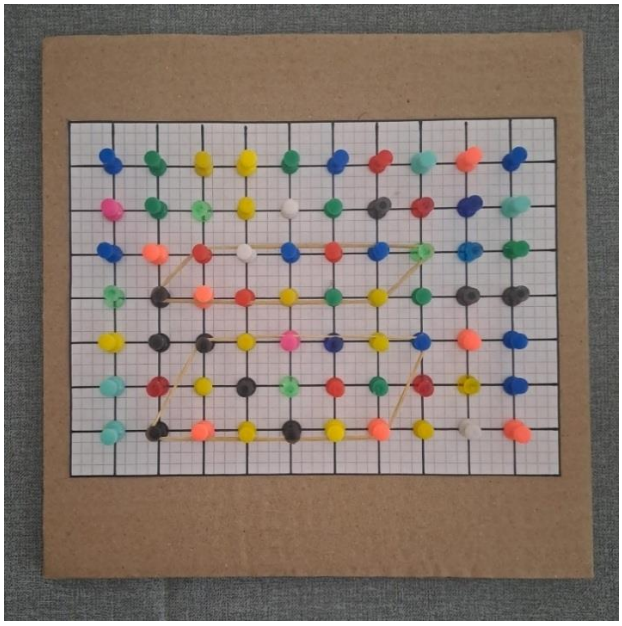


Figura 8

Luego de observar el Geoplano un momento dicen:

A2: No parece que sean semejantes.

A3: Sí, para mí no hay semejanza.

P: ¿En qué se basan para decir eso?

A1: En que cambiaron los ángulos.

P: ¿Influye que los ángulos hayan cambiado? ¿de qué manera?

A2: Una quedó más “aplastada”.

P: Si comparan las figuras a partir de la idea de que quedó “aplastada”, ¿qué cambió y qué se mantuvo?

A3: La base es la misma, solo cambió la altura.

P: Entonces, si quisieran obtener una copia más chica de la misma figura, ¿qué tendría que pasar?

A1: Tendría que achicarse todo

P: ¿Ocurre eso en este caso?

A1: No… porque solo cambiamos la altura.

P: Entonces, si solo cambia la altura, ¿qué pueden concluir al comparar las figuras?

A3: Que no es la misma figura más chica.

A2: O sea, no hay semejanza.

Finalizado el trabajo, la profesora propone analizar lo trabajado por los grupos en una puesta en común. Comienza dando la palabra al grupo que trabajó con fichas.

P: ¿Cuál fue la modificación del área al reducir la altura a la mitad?

Los estudiantes responden que el área también se redujo a la mitad. Explican que lo comprobaron contando las fichas y que, al mantenerse la base y reducirse la cantidad de filas, la cantidad total de unidades cuadradas quedó en la mitad.

P: ¿Alguien quiere ampliar esta conclusión o presentar otra?

A2 (grupo geoplano): A nosotros también nos dio que el área se reduce a la mitad.

La profesora continúa con la segunda parte de la consigna.

P: Ahora bien, ¿eso significa que las figuras son semejantes?

A1: No.

A2 (grupo geoplano): A mí al principio me parecía que sí… pero ahora que lo pienso mejor no me termina de cerrar

P: ¿Alguien puede mostrar un ejemplo que les haya servido para pensar esto?

A1 (grupo fichas): Nosotros hicimos una prueba con la sombra…

La docente invita entonces a este grupo a mostrar al resto el experimento realizado. Proyectan el recorte reducido sobre el dibujo original y observan que no coincide.

A2 (grupo geoplano): Ah… claro, ahora se ve… no coincide nunca.

P: Entonces, ¿qué pueden concluir sobre la consigna?

A1: Que el área sí se reduce a la mitad, pero las figuras no son semejantes.

A2: O sea, una parte es verdadera y la otra no.

A continuación de la puesta en común, la profesora retoma las producciones de los distintos grupos y los invita a explicitar las conclusiones construidas colectivamente, promoviendo la participación de los estudiantes en su formulación.

P: A partir de lo trabajado, podemos afirmar que, en los cuadriláteros analizados, cuando la base se mantiene fija y se modifica la altura, el área también cambia. En los casos considerados, al reducir la altura a la mitad, el área se reduce en esa misma proporción. Por otra parte, también se puso en evidencia que no alcanza con modificar una sola medida para obtener una figura semejante. Para que dos figuras sean semejantes, todas sus dimensiones deben variar en la misma proporción, es decir, deben multiplicarse por un mismo número. En consecuencia, si solo se modifica la altura, la figura que se obtiene no es semejante, ya que no todas las longitudes cambian por un mismo factor. Entonces, aunque el área se reduzca a la mitad, la figura obtenida no es semejante a la original, por lo que el enunciado completo resulta falso.

En el pizarrón queda:

En los cuadriláteros trabajados (rectángulos y paralelogramos): Al mantener la base fija y reducir la altura a la mitad, el área también se reduce a la mitad. El área y la altura varían en la misma proporción. Semejanza: → no alcanza con cambiar una sola medida. → para que sea la misma figura más chica, todas las longitudes deben variar en la misma proporción. → si no cambian todas en la misma proporción, las figuras no son semejantes. Conclusión: → el área se reduce a la mitad → la figura obtenida no es semejante

3.3.3 Inciso c

El primer grupo construye dos cilindros en GeoGebra, C_1 de radio 3 cm y altura 5 cm, y C_2 de radio 9 cm y altura 5 cm. Utilizando la herramienta volumen, advierten que el volumen no se triplica, sino que aumenta nueve veces. (Figura 9)

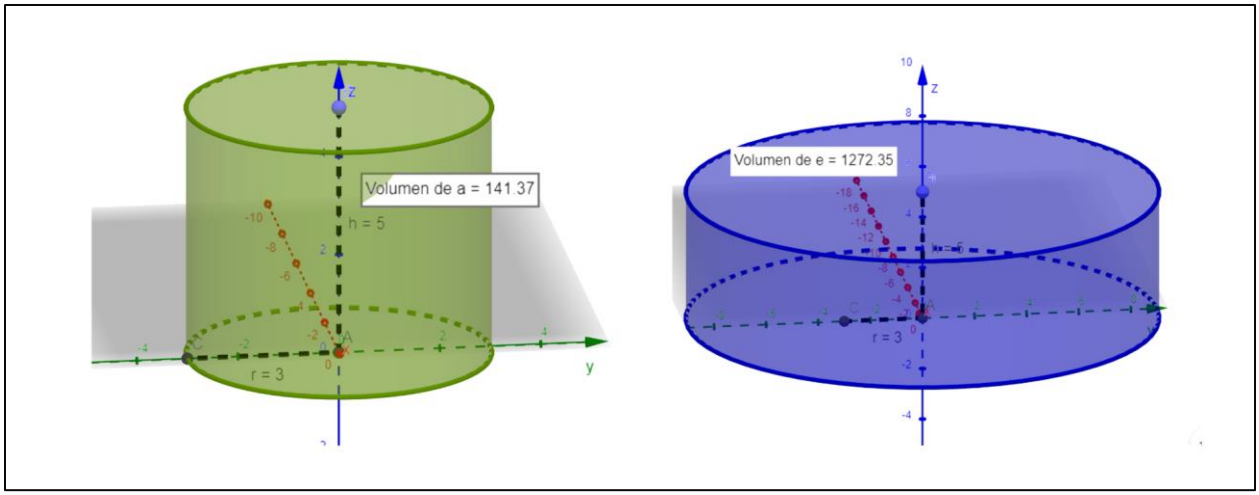


Figura 9

A1: “¡Nos dio nueve veces más, no tres!”

La profesora interviene:

P: ¿Qué estuvieron probando?

A1: Triplicamos el radio… pero no da el triple.

P: Entonces, ¿con esto alcanza para responder la consigna?

A2: Sí, porque no funciona.

P: Bien, entonces sabemos que no alcanza con triplicar el radio. Ahora, ¿se les ocurre alguna forma para que el volumen sí se triplique?

Los estudiantes dudan unos segundos y vuelven a mirar la construcción.

A1: Capaz cambiando otra cosa…

A2: La altura…probemos con la altura.

Toman un cilindro con radio 3 cm y altura 15 cm. Esta vez, el volumen resulta tres veces mayor.

A2: “Ahora sí… dio el triple.”

A1: Entonces no era el radio…

La profesora retoma la nueva línea de trabajo y plantea:

P: ¿Creen que esta es la única forma de lograrlo?

Los estudiantes vuelven a dudar.

A3: Yo había probado con la cuenta…

La profesora le propone compartir su procedimiento con el resto del grupo.

Producción del alumno:

$$\pi(xr)^2h = 3\pi r^2h$$

$$\pi x^2 r^2 h = 3\pi r^2 h$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

A3: Entonces habría que multiplicar el radio por √3.

P: ¿Eso que encontraron sirve solo para este caso o para otros también?

A2: Para otros también…

P: ¿Cómo se dan cuenta?

A3: Porque usamos la fórmula…

P: Entonces, ¿de qué depende que el volumen se triplique?

Los estudiantes discuten entre ellos mirando la expresión y la construcción.

A1: Depende de cómo cambien el radio y la altura.

En otro grupo, los estudiantes eligen dos cilindros entre los materiales disponibles: uno de radio 3 cm y altura 5 cm (cilindro A), y otro de radio 9 cm y altura 5 cm (cilindro B). (Figura 10)

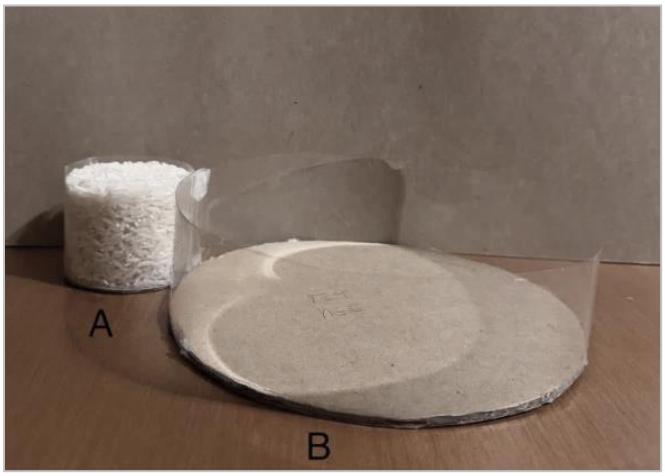


Figura 10

Para comparar los volúmenes, llenan el cilindro A con arroz y lo vierten dentro del cilindro B, repitiendo el procedimiento tres veces.

A1: Sobra mucho espacio acá, me parece que el volumen aumentó más de tres veces.

A2: A ver, ¿cuántos entran?

A3: Pareciera que nueve.

A2: Entonces triplicar el radio no triplica el volumen… no alcanza.

A1: Listo, entonces la afirmación es falsa.

Los estudiantes dejan de trabajar y llaman a la profesora para contarle su conclusión.

P: ¿Qué estuvieron haciendo?

A2: Probamos triplicando el radio y no da, entra muchas más veces.

A1: Así que ya está, la afirmación es falsa.

P: Bien, entonces ya pudieron decidir sobre la afirmación. Ahora, ¿se les ocurre alguna forma de que el volumen sí se triplique?

Los estudiantes vuelven a mirar los cilindros disponibles.

A2: Si dejamos el radio igual… ¿y cambiamos la altura?

A1: Probemos.

Eligen un cilindro de radio 3 cm y altura 10 cm y repiten el procedimiento.

A3: No… ahora entra más de tres veces.

A2: Entonces no alcanza. Probemos con otro.

Eligen otro cilindro y vuelven a intentar, comparando los resultados.

A1: Este tampoco… sigue sobrando.

Finalmente toman un cilindro de radio 3 cm y altura 15 cm.

Repiten el procedimiento, llenando el cilindro A con arroz y vertiéndolo en el nuevo cilindro.

A3: Ahora sí… entra justo tres veces.

A1: Entonces para triplicar el volumen hay que cambiar la altura.

Llaman a la profesora para contarle lo que observaron.

A2: Probamos con la altura y ahí sí da.

P: Entonces, ¿a qué conclusión llegaron?

A1: Que no alcanza con triplicar el radio, hay que cambiar la altura para que el volumen sea el triple.

Para la puesta en común la profesora da la palabra al grupo que trabajó con los cilindros de acetato y arroz. Los estudiantes relatan:

A1: "Llenamos el cilindro de radio 3 y altura 5 dentro del de radio 9 y altura 5, y sobraba espacio. Probamos con otros cilindros y vimos que triplicar el radio no alcanza, pero si cambiamos la altura si se puede.

P: ¿Todos están de acuerdo con eso?

Los estudiantes asienten.

Luego pide al grupo que trabajó con GeoGebra que muestre lo suyo.

A5: Nosotros también vimos que triplicar la altura funciona y cuando quisimos triplicar el radio llegamos a la misma conclusión. Pero no es la única forma.

P: ¿A qué te referís?

A3: A que también se puede cambiar el radio.

P: ¿Pueden mostrar lo que hicieron?

A2: Usando la cuenta nos dio que el radio hay que multiplicarlo por $\sqrt{3}$.

P: Entonces, ¿los dos grupos obtuvieron el mismo resultado?

A4: No… nosotros encontramos otra forma.

P: ¿Y en qué coinciden?

A3: Que triplicar el radio no alcanza y que no es una sola forma, depende de cómo cambian el radio y la altura.

P: Ustedes vieron que al triplicar el radio el volumen no se triplica, sino que aumenta nueve veces. ¿Alguien pensó por qué pasa eso?

A3: Porque cambia mucho el radio…quizás tiene que ver con la cuenta...

P: Bien, aparece la idea de que tiene que ver con cómo se hace la cuenta. Vamos a volver sobre eso. Entonces, ¿podríamos decir que hay una única manera de triplicar el volumen?

A1: No… hay más de una, depende de cómo cambian las medidas.

A continuación de la puesta en común, la profesora retoma las producciones de los distintos grupos con el propósito de organizar y precisar las conclusiones construidas colectivamente.

P: Antes surgió la pregunta acerca de por qué, al triplicar el radio, el volumen no se triplica. Retomando esa idea, se puede afirmar que triplicar el radio de un cilindro no permite triplicar su volumen, ya que, como se observó en los cálculos realizados, el volumen se multiplica por nueve. Esto que ustedes intentaron explicar en la discusión puede comprenderse a partir de la expresión del volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, que algunos grupos utilizaron. En esta expresión, el radio interviene al cuadrado, por lo que se obtiene $(3r)^2 = 9r^2$, lo que permite entender por qué el volumen no se triplica, sino que se multiplica nueve veces.

Por otro lado, cuando se modifica la altura manteniendo el radio constante, el volumen varía en forma directamente proporcional con la altura, ya que esta magnitud interviene linealmente en la expresión. Por lo tanto, al triplicar la altura, el volumen también se triplica.

De las producciones elaboradas, se puede afirmar que no existe una única forma de triplicar el volumen de un cilindro, tal como surgió en la puesta en común, donde se reconoció que el resultado depende de cómo cambien el radio y la altura. Esto implica que es posible obtener un volumen triple mediante distintas combinaciones entre estas magnitudes.

Si se considera $V= \pi r^2 h$ como volumen original y queremos obtener un volumen triple, entonces ese nuevo volumen debe ser $V' = 3V$.

Reemplazando la expresión del volumen del cilindro, se obtiene:

$$\pi r_1^2 h_1 = 3\pi r^2 h$$

y simplificando el factor común π:

$$r_1^2 h_1 = 3r^2 h$$

Esta relación muestra que existen múltiples combinaciones posibles de radio y altura que permiten triplicar el volumen, y permite comprender por qué distintos procedimientos conducen al mismo resultado.

Si se compara esta situación con la del inciso anterior, se observa que, en el caso del área del rectángulo, cuando la base se mantiene fija, el área y la altura varían en forma directamente proporcional, lo que se expresa en la relación $A = b \cdot h$. En cambio, en el volumen del cilindro, el radio interviene al cuadrado, lo que implica que sus variaciones no producen cambios proporcionales.

De este modo, podemos concluir que la afirmación inicial es falsa, ya que no alcanza con triplicar el radio para triplicar el volumen, y que el modo en que varía el volumen depende de cómo intervienen sus dimensiones en la expresión algebraica, distinguiendo entre relaciones de proporcionalidad directa y relaciones no lineales.

En el pizarrón queda:

Volumen del cilindro

$$V = \pi r^2 h$$

→Si se triplica el radio:

$$V' = \pi(3r)^2 h = 9V$$

el volumen aumenta 9 veces (no se triplica)

→Si se triplica la altura:

el volumen se triplica

Para obtener un volumen triple:

– triplicar la altura

– multiplicar el radio por $\sqrt{3}$

Relación entre los volúmenes:

$$V' = 3V$$

$$\pi r_1^2 h_1 = 3\pi r^2 h$$

$$r_1^2 h_1 = 3r^2 h$$

Conclusión:

– no alcanza con triplicar el radio.

– el volumen no varía en forma proporcional con el radio.

– el volumen varía en forma proporcional directa con la altura.

3.4 Análisis

La primera situación propone el análisis de tres afirmaciones que, en una primera aproximación, resultan verosímiles para los estudiantes. En los tres casos, perímetro de un triángulo rectángulo, área de un cuadrilátero y volumen de un cilindro, los estudiantes tienden a interpretar las relaciones entre magnitudes de manera lineal, suponiendo que al modificar una dimensión de la figura (como la base, la altura o el radio), la magnitud correspondiente varía en la misma proporción. Este punto de partida no constituye un error aislado, sino una regularidad en el pensamiento de los estudiantes, quienes tienden a generalizar relaciones proporcionales sin analizar las condiciones bajo las cuales dichas relaciones son válidas. En este contexto, Abrate, Pochulu y Vargas (2006) señalan que "los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un

marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente" (p. 12), lo que permite interpretar esta tendencia no como una falla puntual sino como la manifestación de un esquema cognitivo que opera de manera sistemática en las producciones de los estudiantes. Desde esta perspectiva, la situación está diseñada para provocar una ruptura de esas concepciones iniciales a partir de la confrontación entre las anticipaciones de los estudiantes y las propiedades que impone el problema en distintos registros de representación.

En relación con los registros semióticos de representación, se observa que, en una primera instancia, los estudiantes tienden a operar dentro de un único registro, predominantemente el algebraico o numérico. Por ejemplo, en el inciso (a), algunos grupos suponen que el perímetro puede analizarse únicamente como suma de longitudes, sin considerar las condiciones geométricas que definen al triángulo rectángulo. Este tratamiento interno dentro del mismo registro conduce a conclusiones erróneas, ya que se omiten restricciones fundamentales como la desigualdad triangular, que garantiza la existencia del triángulo o la relación pitagórica, que define la condición de rectángulo. En este marco, tal como plantea Duval (2004), la comprensión matemática no depende de una única representación, sino de la coordinación de distintos sistemas semióticos. El avance en la comprensión se produce cuando los estudiantes se ven obligados a realizar conversiones entre registros.

En el mismo inciso, el pasaje desde el cálculo algebraico hacia la construcción con varillas o la representación en GeoGebra introduce nuevas condiciones que no estaban presentes en el razonamiento inicial. La imposibilidad de “hacer encajar” las varillas o de mantener el ángulo recto en la construcción digital actúa como un elemento de control que permite poner en cuestión las hipótesis previas. De este modo, la conversión de registro no cumple un rol ilustrativo, sino que constituye una condición para la reorganización conceptual, en línea con lo que plantea Duval (2004) respecto del papel de la conversión entre registros como actividad cognitiva central en la comprensión matemática.

La visualización desempeña, en este proceso, un papel central. Tal como señala de Guzmán (2010), la visualización forma parte constitutiva del pensamiento matemático y no constituye un recurso accesorio. En la situación analizada, expresiones como “no encaja”, la observación de que la sombra proyectada no coincide con la figura original o la constatación de que tres veces el volumen inicial no coincide con el volumen del nuevo cilindro, dan cuenta de procesos de

visualización que funcionan como instancias de validación. Estas producciones no solo acompañan el razonamiento, sino que lo orientan y lo transforman, permitiendo a los estudiantes identificar inconsistencias en sus propias conjeturas.

El uso de materiales y recursos didácticos se articula con esta dimensión. En línea con Alsina, Burgués y Fortuny (1987) y Coriat (1997), los materiales no aparecen como meros apoyos, sino como dispositivos que introducen restricciones específicas en el problema. Las varillas tipo mecano, por ejemplo, obligan a considerar la posibilidad de construcción de un triángulo, poniendo en juego tanto la desigualdad triangular como la presencia de un ángulo recto. El geoplano permite observar la modificación de ángulos al variar la altura de un paralelogramo, mientras que la experiencia con cartón y linterna introduce una visualización dinámica de la semejanza. En el caso del cilindro, el uso de arroz posibilita una comparación empírica de volúmenes que evidencia la no linealidad de la relación entre el radio y el volumen. Desde esta perspectiva, como señala Coriat (1997), los materiales pueden liberar recursos cognitivos y favorecer la construcción de modelos para abordar los problemas.

Estas intervenciones materiales y digitales favorecen la articulación de registros y, al mismo tiempo, generan condiciones para la validación de las conjeturas. En este sentido, el valor de los recursos no reside en su diversidad, sino en la intencionalidad con que se integran a la situación, tal como advierte Coriat (1997), y en consonancia con Giarrizzo (2021), quien destaca la importancia de promover experiencias que permitan a los estudiantes construir significados geométricos mediante la articulación de distintos registros y recursos.

En términos de contenido matemático, la situación permite poner en evidencia que las relaciones entre magnitudes geométricas no responden, en general, a modelos lineales. En el inciso (a), el perímetro de un triángulo rectángulo no es proporcional a la base, ya que la modificación de esta dimensión implica cambios en otras longitudes para conservar la condición de tener un ángulo recto, lo que supone el cumplimiento de la relación pitagórica. En el inciso (b), se observa una relación de proporcionalidad directa entre el área y la altura únicamente bajo la condición de mantener fija la base, lo que pone de manifiesto el carácter condicionado de dicha relación. Sin embargo, esta transformación no conserva la semejanza, ya que no todas las dimensiones se modifican por el mismo factor. Finalmente, en el inciso (c), el volumen del cilindro depende

cuadráticamente del radio y linealmente de la altura, lo que implica que un cambio en el radio produce un efecto no lineal sobre el volumen.

De este modo, la situación permite avanzar desde una concepción inicial de proporcionalidad hacia una comprensión más compleja, en la que se distinguen distintos tipos de relaciones. Este proceso no se produce por transmisión directa, sino a partir de la confrontación entre las ideas iniciales de los estudiantes y las condiciones impuestas por los problemas, los materiales y los distintos registros de representación.

En conjunto, las producciones de los estudiantes muestran que los errores iniciales no deben interpretarse como simples obstáculos, sino como manifestaciones de esquemas de razonamiento que, al ser puestos en tensión, favorecen la reorganización del conocimiento. La confrontación entre distintas estrategias, la necesidad de justificar y validar resultados, y la articulación de múltiples registros contribuyen a la construcción de comprensiones más próximas a los significados matemáticos institucionales. Asimismo, la situación favorece la reorganización de saberes previos a partir de la confrontación entre anticipaciones y resultados, en línea con una concepción de la enseñanza que prioriza la construcción de significados por parte de los estudiantes (Bressan, Bogisic y Crego, 2006). De este modo, el aprendizaje se concibe como un proceso de construcción progresiva, en el que la actividad del alumno, mediada por el docente y por los recursos, ocupa un lugar central.

3.5 Segunda situación

Propósitos

- Proponer situaciones problemáticas que involucren el análisis de las relaciones entre área y volumen en cuerpos geométricos, particularmente en prismas y pirámides, en función de la variación de sus dimensiones.
- Promover la construcción y validación de relaciones funcionales entre magnitudes, distinguiendo situaciones de proporcionalidad de aquellas en las que no se cumple.
- Favorecer la articulación de distintos registros de representación como medio para interpretar, justificar y generalizar relaciones geométricas.

Objetivos

Que los estudiantes:

- Establezcan relaciones entre área y volumen en distintos cuerpos geométricos a partir de la variación de sus dimensiones.
- Anticipen regularidades y las expresen mediante relaciones o leyes de formación.
- Fundamenten conclusiones a partir de la comparación y revisión de sus producciones en interacción con otros.

Forma de la consigna

Las consignas se presentarán de manera secuencial, un inciso por vez, para que los estudiantes construyan el sentido de cada situación antes de avanzar. Cada nuevo enunciado retoma lo trabajado en el anterior, promoviendo la continuidad entre los distintos momentos de la secuencia.

La formulación prioriza la exploración y la argumentación, evitando anticipar procedimientos o fórmulas, de modo que los estudiantes deban observar, registrar y justificar sus resultados.

Metodología

La secuencia está organizada de manera progresiva, de modo que cada inciso introduce una nueva relación entre magnitudes geométricas (proporcionales y no proporcionales), permitiendo contrastar distintos comportamientos y favoreciendo la reorganización conceptual.

Las actividades se desarrollarán en pequeños grupos, favoreciendo la discusión, la comparación de estrategias y la elaboración conjunta de conclusiones.

Después de cada inciso, se realizará una puesta en común colectiva, en la que los grupos compartirán sus producciones y la docente guiará la síntesis, recuperando los aportes de cada uno para construir el conocimiento de manera colectiva.

Los materiales se pondrán a disposición de los grupos, promoviendo su uso como herramientas para explorar, representar y validar las relaciones geométricas mediante distintos registros (manipulativo, gráfico, simbólico y digital), favoreciendo la coordinación entre ellos como medio para la construcción de significados.

En relación con el uso de GeoGebra, se asume que los estudiantes cuentan con conocimientos básicos sobre su manejo, tales como la construcción de figuras y el uso de deslizadores. No obstante, la intervención docente orienta la configuración del entorno de trabajo, indicando la cantidad de deslizadores y las variables a representar. Esta decisión responde a la intención de focalizar la atención en las relaciones entre magnitudes que se busca analizar, restringiendo parcialmente el medio para evitar que la exploración se disperse en aspectos no pertinentes y favoreciendo la identificación de regularidades en las variables consideradas.

Durante el desarrollo, la docente intervendrá con preguntas que orienten la reflexión, evitando dar respuestas directas y favoreciendo que los estudiantes expliciten, confronten y revisen sus propias producciones, promoviendo la argumentación y la validación entre pares. En este marco, el error no se considera un obstáculo a evitar, sino un punto de partida para la revisión de los razonamientos y la construcción de nuevos conocimientos. Asimismo, los recursos utilizados no se conciben únicamente como apoyos, sino como elementos que introducen condiciones específicas en la actividad, orientando las estrategias de resolución y las formas de validación.

Materiales y recursos didácticos

- Cubos de 1 cm^3
- Cartones con velcro
- Hojas cuadriculadas
- GeoGebra

3.6 Consigna

a) Construir, si es posible, un prisma y una pirámide de base triangular eligiendo las longitudes de modo que el volumen de la pirámide sea el doble del volumen del prisma.
b) Construyan dos prismas de base cuadrada, de manera que el área total de uno sea el triple del área total del otro.
c) Utilizando los mismos prismas del inciso anterior, decidan si es posible anticipar el volumen de cada uno sin construirlo.
d) Expliquen qué relaciones encuentran entre los prismas obtenidos en los incisos anteriores.

3.7 Posibles resoluciones

3.7.1 Inciso a

Uno de los grupos trabaja de manera algebraica y plantea la fórmula general de los volúmenes:

$$V_{prisma} = \text{Área de la base} \cdot h_{prisma}\ , \qquad V_{pirámide} = \frac{1}{3}\ \text{Área de la base}\ \cdot h_{pirámide}$$

y, dado que las áreas de las bases son iguales, deciden simplificarlas. Llegan a la siguiente expresión y aseguran haber resuelto la consigna:

$$\frac{1}{3}h_{pirámide} = h_{prisma}\ \Rightarrow\ h_{pirámide} = 3h_{prisma}$$

P: ¿Cómo pueden verificar que la expresión que hallaron efectivamente cumple con la consigna?

A4: podemos sustituir las alturas y la base con números, por ejemplo $h_{prisma} = 4$ y $h_{pirámide} = 12$ y la misma base para ambas.

El grupo calcula:

$$V_{prisma} = \text{Área de la base} \cdot 4\ ,$$

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot 12 = \text{Área de la base} \cdot 4$$

A2: Nos da el mismo volumen, no el doble. ¿Cómo puede ser?

P: ¿Qué supusieron cuando igualaron las expresiones anteriores?

A1: Estamos igualando…ah, ya lo vi, estamos diciendo que son iguales, no que una es el doble de la otra.

A2: Entonces, si con $h_{pirámide} = 3h_{prisma}$ logramos que los volúmenes sean iguales, ¿tenemos que buscar una altura mayor, no?

A3: A ver, probemos con el doble

$$h_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot 24\ \Rightarrow\ V_{pirámide} = \text{Área de la base} \cdot 8$$

$$V_{prisma} = \text{Área de la base} \cdot 4$$

$$\frac{V_{pirámide}}{V_{prisma}} = \frac{\text{Área de la base} \cdot 8}{\text{Área de la base} \cdot 4} = 2$$

A5: ¡Ahora sí, el volumen de la pirámide es el doble que el del prisma!

Mientras tanto, otro grupo construye en GeoGebra 3D un prisma y una pirámide de base triangular equilátera. La profesora indica que creen cuatro deslizadores: dos para la longitud del lado de la base, uno para el prisma y otro para la pirámide, y dos para las alturas. Para simplificar, deciden fijar el lado de ambas bases en $l = 6$ cm y comienzan a explorar las alturas. (Figura 11[2])

Primero ajustan $h_{prisma} = 2$ cm y mueven el deslizador $h_{pirámide}$ hasta encontrar que el cociente $Q = \frac{V_{pirámide}}{V_{prisma}} = 2$.

A2: ¡Encontramos el valor! Con $h_{pirámide} = 12$ el cociente es 2.

A1: Buenísimo, ya está resuelto.

P: ¿Por qué creen que da exactamente 2 con ese valor?

A3: (duda) Y porque coincide, supongo.

P: ¿Qué tendría que ocurrir con otros valores para que no fuera solo una coincidencia?

A3: Y… que con otros valores también diera 2.

A1: Probemos con otro valor entonces.

Los estudiantes ajustan el deslizador de la altura del prisma a un valor distinto y buscan la altura de la pirámide que hace que el cociente vuelva a dar 2.

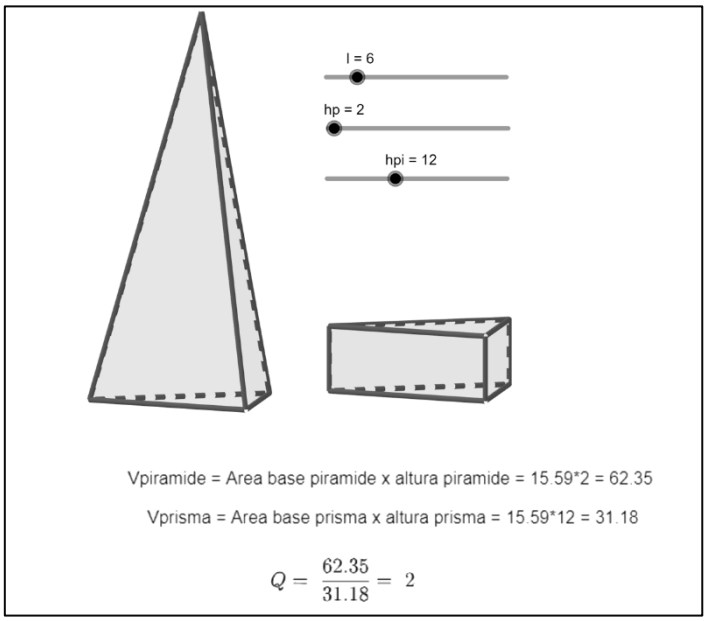


Figura 11

A2: ¡Con 3 y 18 también da 2!

A3: Entonces no es casualidad, pasa con cualquier valor.

P: ¿Cómo podrían estar seguros de que pasa con cualquier valor y no solo con los que probaron?

Los estudiantes comienzan a registrar los valores que van obteniendo para poder compararlos.

[2] En https://www.geogebra.org/classic/yywppycy se accede a la construcción.

h_{prisma}	$h_{pirámide}$	$V_{prisma} = A_{base} \cdot h_{prisma}$	$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h_{pirámide}$	$Q = \frac{V_{pirámide}}{V_{prisma}}$
1	6	Área de la base	2 Área de la base	2
2	12	2 Área de la base	4 Área de la base	2
3	18	3 Área de la base	6 Área de la base	2
4	24	4 Área de la base	8 Área de la base	2

Los estudiantes observan los datos:

A1: Si la altura del prisma es 2, la de la pirámide es 12; si la del prisma es 4, la de la pirámide es 24.

A3: Parece que hay que sumar 10 siempre.

A4: No, con el 1 y el 6 la diferencia es 5, no 10.

A3: Entonces no es sumar, es multiplicar: de 2 a 12 se multiplica por 6, de 3 a 18 también.

La profesora deja que discutan entre ellos y pregunta:

P: ¿Se les ocurre alguna manera de comprobar lo que están afirmando?

Los estudiantes completan un nuevo caso: $h_{prisma} = 5 \rightarrow$ ajustan el deslizador hasta que $Q = 2$ y encuentran $h_{pirámide} = 30$

A1: ¡Otra vez se cumple! Multiplicar por 6 funciona.

P: ¿Cómo se ve esa relación en GeoGebra? ¿Qué observan cuando mueven el deslizador de la altura de la pirámide?

A1: La pirámide crece mucho más rápido que el prisma… como que por cada unidad que sube el prisma, la pirámide sube muchísimo más.

A2: Sí, y en la tabla se ve que siempre es seis veces más.

Para la puesta en común La profesora invita a los grupos a compartir sus producciones.

P: ¿Pueden contarnos cómo trabajaron y a qué llegaron?

El grupo que trabajó con GeoGebra toma la palabra y muestra la tabla que construyó.

A2: Con 2 nos daba 12, con 3 nos daba 18, con 4 nos daba 24…Al principio pensamos que había que sumar, pero no funcionaba con todos los casos. Después nos dimos cuenta de que se multiplicaba: de 2 a 12 es por 6, de 3 a 18 también, y con los otros casos también nos dio

P: ¿Alguien obtuvo algo distinto o realizó otro proceso?

El grupo algebraico presenta su trabajo. Explica que igualó las fórmulas de volumen, simplificó las bases y obtuvo una expresión. Luego cuenta que, al verificar con números, encontró que los volúmenes eran iguales, no que uno fuera el doble del otro.

A1: Nos habíamos equivocado porque estábamos igualando los volúmenes en lugar de pedir que uno fuera el doble del otro. Cuando volvimos a revisar eso, vimos que la pirámide tenía que ser bastante más alta. Encontramos que con 4 y 24 el volumen de la pirámide es el doble que el del prisma, pero no habíamos visto que siempre era por 6.

P: ¿Si comparamos lo que obtuvo cada grupo es coincidente?

A3: Sí, lo que cambia es cómo llegamos.

A2: Ellos lo vieron con la tabla y nosotros con las cuentas.

P: ¿Cómo podríamos organizar los valores que fueron obteniendo para poder compararlos?

(Los estudiantes proponen registrar los datos en una tabla)

La docente organiza en el pizarrón:

Altura del Prisma	Altura de la Pirámide
3	18
4	24
5	30
6	36

P: Si observan los valores, ¿qué relación pueden establecer entre las dos alturas?

A4: Que la altura de la pirámide tiene que ser 6 veces la del prisma.

P: ¿Esta relación se puede justificar con lo que obtuvieron con las fórmulas?

A2 (grupo algebraico): El volumen del prisma es $A_{base} \cdot h_{prisma}$ y el de la pirámide es $\frac{1}{3} A_{base} \cdot h_{pirámide}$, entonces para que sea el doble $\frac{1}{3} A_{base} \cdot h_{pirámide} = 2 \cdot A_{base} \cdot h_{prisma}$.

A3: Como la base aparece en los dos lados se puede cancelar asi que queda:

$$\frac{1}{3} \cdot h_{pirámide} = 2 \cdot h_{prisma}$$

$$h_{pirámide} = 6h_{prisma}$$

A continuación de la puesta en común, la profesora retoma las producciones de los distintos grupos con el propósito de organizar y precisar las conclusiones construidas colectivamente.
A partir de lo observado en la tabla y de los resultados obtenidos mediante las expresiones, podemos afirmar que la relación entre las alturas no depende de los valores particulares considerados, sino que se mantiene en general. Asimismo, se puso en evidencia que no alcanza con que una magnitud cambie cuando cambia la otra para afirmar que se trata de una relación de proporcionalidad.
Para que exista proporcionalidad directa, es necesario que ambas magnitudes varíen siempre en la misma proporción. En este caso, esa condición se cumple, ya que la altura de la pirámide resulta siempre seis veces la altura del prisma. Por lo tanto, se trata de una relación de proporcionalidad directa entre ambas alturas, que puede expresarse como $h_{pirámide} = 6h_{prisma}$.

En el pizarrón queda:

Volumen del prisma: $V_{prisma} = A_{base} \cdot h_{prisma}$

Volumen de la pirámide: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h_{pirámide}$

Condición del problema: $V_{pirámide} = 2V_{prisma}$

Entonces:

$$\frac{1}{3} A_{base} \cdot h_{pirámide} = 2A_{base} \cdot h_{prisma}$$

Simplificando el área de la base

$$\frac{1}{3} \cdot h_{pirámide} = 2 \cdot h_{prisma}$$

$$h_{pirámide} = 6h_{prisma}$$

Forma general:

Si $h_{prisma} = x$, entonces $h_{pirámide} = 6x$

Conclusión

Las alturas del prisma y de la pirámide varían en forma directamente proporcional.

Para que una pirámide tenga el doble del volumen que un prisma con la misma base, su altura debe ser seis veces mayor.

3.7.2 Inciso b

El primer grupo decide trabajar con cuadrados de $1\,cm^2$ y elige una base cuadrada de 2×2. Construyen un prisma de altura 3 unidades y luego proponen construir otro de altura 9. (Figura 12)

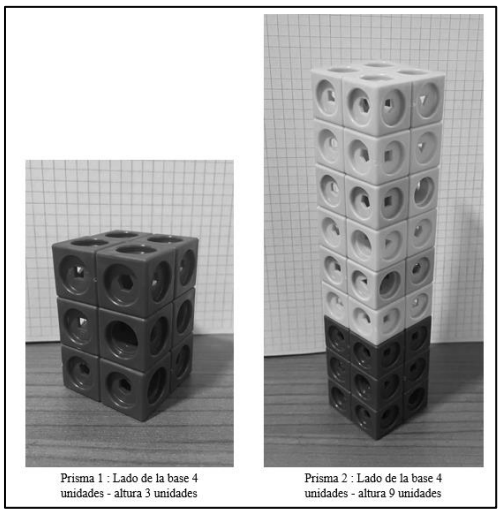


Figura 12

Al ver la construcción, la profesora interviene:

P: ¿Me cuentan cómo lo pensaron?

A1: Contamos que el área de las paredes del primer prisma es 24. Después triplicamos la altura y nos dio 72, que es 3 veces 24.

P: ¿Pueden argumentar sobre este cálculo?

A2: Con las paredes, las bases son iguales en los dos prismas, así que no cambian nada.

P: Lo que acaban de calcular, ¿les permite responder lo que pide la consigna?

A3: Mmm… no sé… nosotros calculamos solo las paredes…

A2: Pero la consigna pedía el área total…

A3: Ah, claro… nos faltan las bases.

Los estudiantes vuelven a la construcción y deciden incluir las bases en el cálculo

A1: 24 de las paredes + 8 de las bases = 32.

P: ¿Y el del segundo?

A2: 72 de las paredes + 8 de las bases = 80.

Los estudiantes se miran sorprendidos.

A3: Ah, entonces no es el triple

P: Si al triplicar la altura el área no se triplica, ¿cómo pueden explicar ese resultado?

A2: Porque las bases no cambian… y como son iguales en los dos, como que frenan el triple.

P: ¿Qué querés decir con que lo "frenan"?

A3: Que las paredes sí se triplican, pero las bases son lo mismo en los dos. Entonces cuando las sumás todas juntas, ya no da el triple.

El segundo grupo decide usar una hoja cuadriculada para representar el desarrollo plano del prisma.

Dibujan un prisma de base cuadrada de 3 unidades de lado y altura 2 unidades. (Figura 13)

Cuentan los cuadraditos en el desarrollo:

• Área lateral: 24 unidades cuadradas.

• Área de las dos bases: 18 unidades cuadradas.

• Área total: 42 unidades cuadradas.

Como la consigna pide construir otro prisma cuya área total sea el triple, los estudiantes calculan que el nuevo prisma debería tener un área total de 126 unidades cuadradas.

Deciden entonces probar distintas alturas para ver cuál podría cumplir esa condición.

Primero dibujan el prisma con altura 5 y cuentan nuevamente los cuadraditos:

• Área lateral: 60 unidades cuadradas.

• Área de las bases: 18 unidades cuadradas.

• Área total: 78 unidades cuadradas.

A2: No llega al triple.

Los estudiantes comentan que probar números “al azar” no les está permitiendo encontrar la altura correcta.

En ese momento uno de ellos propone otra idea.

A4: Si queremos triplicar el área, capaz hay que triplicar la altura.

Construyen entonces un prisma de altura 6.

• Área lateral: 72 unidades cuadradas.

• Área de las bases: 18 unidades cuadradas.

• Área total: 90 unidades cuadradas.

A2: Tampoco da.

La profesora interviene:

P: A4 había propuesto triplicar la altura y no funcionó. ¿Por qué les parece que sonaba razonable pero no alcanzó?

A4: Y… porque si la altura se triplica, las paredes se triplican. Pensé que con eso alcanzaba.

A1: Pero las bases no cambian, entonces el total no se triplica.

P: ¿Qué partes del prisma cambian cuando modifican la altura?

A1: Las paredes…

A3: Las bases no…

P: Entonces, cuando aumentan la altura, ¿qué parte del área total está cambiando?

A2: Solo las paredes…

Los estudiantes vuelven a mirar los valores obtenidos.

A3: Por eso no llega al triple…

A1: Porque las bases siempre valen lo mismo…

La profesora da inicio a la puesta en común pidiéndole al grupo 2 que comente las conclusiones a las que llegaron.

A1: Primero probamos con varias alturas. Después pensamos que, si queríamos triplicar el área, capaz había que triplicar la altura, pero tampoco funcionó.

P: Entonces, según lo que hicieron, ¿qué pasa con el área cuando triplican la altura?

A2: No se triplica.

P: ¿Alguien obtuvo algo distinto o llegó a una explicación diferente?

A4 (grupo 1): A nosotros nos pasó algo parecido. También pensamos que si triplicábamos la altura el área iba a triplicarse. Pero después vimos que no porque las paredes sí se triplican, pero las bases quedan iguales.

P: Entonces, cuando cambian la altura, ¿qué partes del prisma cambian?

A2 (grupo 2): Las paredes…

A1 (grupo 1): Las bases no cambian.

P: ¿Y entonces qué está pasando con el área total?

A3 (grupo 2): Y… no crece todo igual…

A4 (grupo 1): Claro, una parte sí y la otra no.

A continuación de la puesta en común, la profesora retoma las producciones de los distintos grupos con el propósito de organizar y precisar las conclusiones construidas colectivamente.

P: En las producciones de los distintos grupos se puso en evidencia que el área total del prisma no puede pensarse como una única magnitud, sino como la suma de distintas partes. En particular, se identificó que el área total está compuesta por el área lateral y por las dos bases. Asimismo, se observó que, al modificar la altura, no impacta en las otras partes de la misma manera: mientras que el área lateral varía en función de la altura, el área de las bases permanece constante. A partir de esto, el área total del prisma puede expresarse como la suma del área lateral y el doble del área de la base, es decir:

$$A_{total} = P_{base} \cdot h + 2A_{base}$$

Esta expresión permite comprender que, aunque la altura se multiplique por un número, el área total no lo hace en la misma proporción, ya que solo una parte de ella depende de la altura. En consecuencia, el área total del prisma no es proporcional a la altura, sino que depende tanto de la base como de la altura.

En el pizarrón queda:

Área total de un prisma

$A_{lateral} = P_{base} \cdot h$

$A_{total} = P_{base} \cdot h + 2 \cdot A_{base}$

Relación con lo observado:

Las caras laterales dependen de la altura.

Las bases no dependen de la altura.

Ejemplo de trabajo en clase:

Prisma original: base 2x2 y altura 3 $\rightarrow A_{total} = 24 + 8 = 32$

Prisma con altura triplicada: 2x2 y altura 9 $\rightarrow A_{total} = 72 + 8 = 80$

$80 \neq 3 \cdot 32 = 96$

Conclusión:

Al cambiar la altura, no cambia toda el área.

El área total no es proporcional a la altura.

3.7.3 Inciso c

Los estudiantes del primer grupo comienzan a trabajar a partir de los desarrollos planos utilizados en el inciso anterior. Sin embargo, al intentar analizar el volumen, advierten que este recurso no les permite dar cuenta de "cuánto entra" en el prisma, ya que solo visualizan sus caras y no su interior. Frente a esta dificultad, y tras solicitar autorización a la profesora, recurren a cubos imantados para construir los prismas y continuar el análisis.

Parten de una base cuadrada de 3×3 y construyen un prisma de altura 2.

A1: Acá entran 18 cubos. Si probamos con altura 3, hay 27, o sea que aumentó 9. Si volvemos a subir una unidad de altura, hay 36. (Figura 13)



Figura 13

Cada vez que la altura aumenta en 1, el volumen aumenta en 9. La profesora se acerca y observa lo que están haciendo.

P: ¿Ese 9 aparece siempre?

A2: Sí…

P: ¿Por qué les parece que es siempre 9?

Los estudiantes observan la construcción.

A3: Porque la base tiene 9 cubos, entonces cada vez que aumentamos en uno la altura es como si agregáramos "una base".

P: Entonces, con lo que están diciendo ¿Pueden anticipar entonces cuántos cubos entrarían en un prisma de altura 5 sin armarlo?

A2: serían los 9 de la base por la altura.

El otro grupo retoma el prisma construido con cubos de 1 cm^3. La base es cuadrada de 2×2 y consideran dos alturas: 3 cm y 9 cm.

A1: En el de altura 3 entran 12 cubos. Si la altura es 9, entran 36, es el triple.

A1: Claro, porque la altura también es el triple. Entonces, si la altura se multiplica por 3, el volumen también. Si fuera el doble, también daría el doble.

A3: Entonces siempre cambia igual. El volumen no es como el área… acá no influye la base, porque es lo de adentro nada más.

A1: Igual la base está… porque si fuera más grande entraría más. Sí, pero en estos no cambia.

A3: Claro, por eso cambia siempre igual.

La profesora se acerca y observa lo que están discutiendo.

P: ¿No influye o no cambia?

A1: Y… no cambia siempre es la misma.

A3: Claro, es la misma base, si cambiara el volumen no cambiaría siempre igual.

A continuación, la profesora invita a los grupos a compartir lo que encontraron en la puesta en común. Comienza el grupo 1.

P: ¿Qué pudieron observar al comparar los prismas?

A1 (grupo 1): Vimos que cada vez que aumenta la altura en 1, el volumen aumenta en 9. Porque se agrega otra capa igual a la base. Entonces, para saber el volumen sin armarlo, usamos los 9 de la base por la altura.

P: ¿Qué le interesaría compartir al otro grupo? ¿Quieren ampliar lo que dijeron sus compañeros o tienen una propuesta diferente??

A1 (grupo 2): Nosotros comparamos dos prismas: uno de altura 3 y otro de 9. Vimos que el de 9 tiene el triple de volumen. Entonces, si la altura se multiplica, el volumen también. Siempre cambia de la misma manera.

P: Si comparan lo que dijo cada grupo ¿Están diciendo lo mismo o son ideas distintas?

Los estudiantes dudan y comienzan a intercambiar ideas.

A2 (grupo 1): Nosotros decimos que va aumentando de a 9…

A3 (grupo 2): Nosotros que, si se multiplica la altura, se multiplica el volumen… pero es lo mismo porque ese 9 sale de la base que es siempre la misma.

P: En uno de los grupos apareció que la base no cambia, y que justamente por eso el volumen cambia siempre de la misma manera… ¿Cómo se relaciona eso con lo que dijo el otro grupo sobre que aumenta de a 9?

A1 (grupo 1): Que ese 9 sale de la base…

A2 (grupo 2): Claro, como la base es siempre la misma, se repite… Por eso siempre aumenta lo mismo el volumen.

P: Ok, el 9 ¿alcanza lo que encontraron para responder lo que pide la consigna?

A2: (grupo 1): Sí, se puede anticipar el volumen, en nuestro caso, los 9 de la base por la altura.

P: (Señala anotaciones de los grupos en el pizarrón). El Grupo 1 dice que el volumen "crece de a 9" y el Grupo 2 dice que, si la altura es el "triple", el volumen es el "triple".

Miremos estas dos ideas juntas. Si el volumen crece siempre lo mismo al sumar altura y se multiplica igual que la altura... ¿existe algún caso donde la altura aumente y el volumen no, o aumente de forma distinta?

A2: No, porque el área de la base es una cantidad fija. Si la base no se mueve, el volumen solo depende de qué tan alto sea el prisma.

P: Exacto. Esa "cantidad fija" de la base es la que manda.

A continuación de la puesta en común, la profesora retoma las producciones de los distintos grupos con el propósito de organizar y precisar las conclusiones construidas colectivamente.

La expresión del volumen del prisma se define como:

$$V = A_{base} \cdot h \, .$$

Esta relación permite interpretar lo que se observó en los distintos casos: el área de la base se mantiene constante, mientras que el volumen varía en función de la altura.

En esta relación, cuando la altura se duplica o se triplica, el volumen también lo hace en la misma proporción. Este tipo de relación se denomina proporcionalidad directa. En este caso, el área de la base cumple el rol de constante de proporcionalidad, ya que es el valor que permanece fijo mientras la altura varía. Por lo tanto, en cualquier prisma, el volumen y la altura son magnitudes directamente proporcionales, y el área de la base es la constante que las vincula.

En el pizarrón queda:

Volumen prisma:

$$V = A_{base} \cdot h$$

El volumen depende de:

- El área de la base
- La altura

El volumen y la altura son magnitudes directamente proporcionales.

Si la altura se multiplica por un número, el volumen también se multiplica por ese mismo número.

El valor que se mantiene fijo y determina ese cambio es el área de la base, que actúa como constante de proporcionalidad.

3.8 Análisis

La segunda situación propone una secuencia de consignas orientadas a la construcción de relaciones entre magnitudes geométricas en cuerpos, particularmente en prismas y pirámides, promoviendo el pasaje desde la exploración empírica hacia la formulación de relaciones generales. A diferencia de la primera situación, en la que el foco está puesto en la revisión de afirmaciones y la puesta en cuestión de modelos intuitivos, en este caso los estudiantes deben producir, comparar y validar relaciones, lo que implica un mayor grado de elaboración y generalización.

La organización en incisos no responde únicamente a una división operativa, sino a una progresión conceptual que permite introducir y contrastar distintos comportamientos de las magnitudes. En el inciso (a), los estudiantes establecen una relación de proporcionalidad directa entre las alturas del prisma y de la pirámide al imponer una condición sobre los volúmenes. A partir de la exploración con GeoGebra, la construcción de tablas y el trabajo algebraico, logran identificar una regularidad que luego se generaliza simbólicamente como $h_{pirámide} = 6h_{prisma}$. En este primer momento, la proporcionalidad aparece como un modelo válido que organiza la relación entre magnitudes.

La combinación de GeoGebra, tablas y trabajo algebraico no es arbitraria, sino que busca promover la coordinación entre distintos registros de representación, evitando que la regularidad

se reconozca únicamente en un soporte y favoreciendo su generalización, en línea con lo que plantea Duval (2004) respecto del papel de la coordinación de registros en la construcción de significado.

Sin embargo, en el inciso (b), este modelo es puesto en tensión. Los estudiantes tienden inicialmente a aplicar el mismo razonamiento lineal, suponiendo que triplicar la altura implica triplicar el área total del prisma. Este tipo de respuestas no constituye un error aislado, sino manifestaciones de esquemas de razonamiento que resultan adecuados en ciertos contextos y que, al ser confrontados con las condiciones del problema, favorecen la construcción de nuevas relaciones. De este modo, pueden interpretarse como inferencias o asociaciones incorrectas, en las que se generaliza un modelo válido en otros contextos a situaciones donde no resulta pertinente (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006). Este supuesto conduce a errores, ya que solo una parte del área, la lateral, depende de la altura, mientras que las bases permanecen constantes. La construcción de expresiones como $A_{total} = 8h + 8$ permite explicitar esta dependencia y mostrar que la relación entre el área total y la altura no es proporcional. De este modo, la secuencia introduce una ruptura del modelo lineal inicial, obligando a los estudiantes a diferenciar entre distintos tipos de relaciones entre magnitudes.

En el inciso (c), se reconstruye una relación de proporcionalidad, esta vez en el caso del volumen del prisma. A partir de la interpretación del volumen como "capas" de base constante, los estudiantes reconocen que, si el área de la base se mantiene fija, el volumen varía proporcionalmente con la altura, lo que se expresa mediante la relación $V = A_b \cdot h$. Esta reconstrucción resulta significativa, ya que la proporcionalidad deja de ser interpretada como una regla general aplicable a cualquier situación, para ser comprendida como una relación que depende de las condiciones del problema.

De este modo, la secuencia no solo permite identificar relaciones entre magnitudes, sino también distinguir entre distintos tipos de comportamiento, evitando la generalización indebida de modelos lineales. La alternancia entre situaciones en las que la proporcionalidad se cumple y otras en las que no lo hace genera condiciones para la reorganización de los saberes previos, en línea con una concepción del aprendizaje como construcción progresiva de significados (Bressan, Bogisic y Crego, 2006).

Desde la perspectiva de los registros semióticos de representación, Duval (2004), la situación favorece la articulación entre distintos registros, lo que resulta fundamental para la construcción de significados. En el inciso (a), los estudiantes transitan entre el registro algebraico, el gráfico-dinámico (GeoGebra) y el tabular, lo que permite identificar regularidades y formular generalizaciones. En el inciso (b), el uso de desarrollos planos y el conteo de unidades cuadradas posibilita visualizar la composición del área total, mientras que su expresión simbólica permite formalizar la relación entre las magnitudes. En el inciso (c), la interpretación del volumen como superposición de capas articula el registro manipulativo con el simbólico, favoreciendo la comprensión de la fórmula general. En todos los casos, la conversión entre registros no cumple una función ilustrativa, sino que permite reorganizar las ideas iniciales de los estudiantes, ya que, como señala Duval (2006), es en estos procesos de conversión donde se producen los avances más significativos en la comprensión matemática.

La visualización y el uso de materiales desempeñan un papel central en este proceso. Tal como señala de Guzmán (2010), la visualización constituye una dimensión esencial del pensamiento matemático. En esta situación, la representación de los cuerpos mediante desarrollos planos, la construcción con cubos y la exploración dinámica con GeoGebra permiten a los estudiantes identificar regularidades, anticipar resultados y validar sus conjeturas. En particular, la interpretación del volumen como "capas" puede entenderse como una forma de visualización analógica, en el sentido planteado por de Guzmán (2010), en la medida en que recurre a una metáfora que permite aproximarse a la relación matemática, favoreciendo la comprensión inicial, aunque requiere ser posteriormente precisada para evitar interpretaciones incorrectas. Asimismo, el uso de estos recursos no se limita a un apoyo instrumental, sino que introduce condiciones específicas en la actividad, orientando las estrategias de los estudiantes y las formas de validación, en línea con lo planteado por Coriat (1997) respecto del carácter estructurante de los materiales didácticos.

En síntesis, la segunda situación se caracteriza por proponer una construcción progresiva del conocimiento, en la que los estudiantes no solo identifican relaciones entre magnitudes, sino que aprenden a distinguir entre distintos tipos de variación. La alternancia entre situaciones en las que la proporcionalidad se cumple y otras en las que no lo hace permite superar una concepción lineal generalizada, favoreciendo una comprensión más ajustada de las relaciones funcionales en

geometría. De este modo, la propuesta se inscribe en una perspectiva de enseñanza que prioriza la construcción, la confrontación y la generalización del conocimiento matemático.

3.9 Tercera situación

Propósitos

- Proponer situaciones problemáticas que involucren modificaciones en las dimensiones de figuras y cuerpos.
- Organizar condiciones que permitan a los estudiantes formular y validar proposiciones sobre la variación de las magnitudes.
- Poner en juego la comparación entre diferentes magnitudes para analizar sus modos de variación.

Objetivos

Se espera que el estudiante:

- Analice cómo varían las magnitudes a partir de modificaciones en las dimensiones.
- Compare resultados para identificar regularidades en el comportamiento de las magnitudes.
- Explique las diferencias en la variación de las magnitudes a partir de las expresiones utilizadas.
- Valide proposiciones mediante el cálculo y la comparación de resultados.

Forma de la consigna

La actividad está organizada en tres incisos. En el primero se propone identificar la ley de formación de una serie a partir de los datos presentados en una tabla y extenderla a nuevos casos, lo que requiere reconocer regularidades entre las dimensiones. En el segundo inciso se solicita anticipar el comportamiento de las magnitudes sin realizar cálculos, promoviendo la formulación de conjeturas a partir de esas regularidades. El tercer inciso retoma dichas anticipaciones mediante el cálculo y la comparación de resultados, lo que permite analizarlas, validarlas o refutarlas.

La consigna no explicita procedimientos de resolución, lo que habilita el ensayo con los datos disponibles y la construcción de distintas estrategias. El uso de la tabla como único soporte

organiza la actividad en torno al análisis numérico y a la relación entre dimensiones y magnitudes.

Metodología

El trabajo se desarrollará en grupos de hasta cuatro estudiantes, promoviendo la discusión, la comparación de ideas y la validación de resultados entre pares.

Cada grupo contará con una hoja en la que se presentan las tablas correspondientes a las distintas series. A partir de esa información, los estudiantes deberán interpretar los datos, establecer relaciones y producir conclusiones. A diferencia de las situaciones anteriores, no se incorporan materiales manipulativos ni representaciones gráficas, con el objetivo de centrar el trabajo en la interpretación de relaciones numéricas y en la identificación de regularidades, favoreciendo un desplazamiento hacia registros más abstractos.

La docente intervendrá organizando la circulación de la palabra entre los grupos, propiciando la confrontación de producciones y la explicitación de los razonamientos, sin anticipar procedimientos ni resultados. En este marco, el error no se considera un obstáculo a evitar, sino un punto de partida para la revisión de los razonamientos y la construcción de nuevas relaciones.

La actividad culminará con una puesta en común en la que se pondrán en relación las distintas producciones, favoreciendo la identificación de regularidades y la elaboración de conclusiones compartidas, promoviendo la explicitación de patrones y la construcción de interpretaciones que permitan describir el comportamiento de las magnitudes más allá de casos particulares.

En relación con el nivel de formalización, se opta por no avanzar hacia formulaciones generales explícitas, priorizando que los estudiantes puedan identificar, describir e interpretar regularidades a partir de los registros numérico y algebraico, sin forzar la introducción de herramientas cuya construcción no ha sido previamente abordada en la secuencia.

Materiales y recursos didácticos

Hoja de trabajo con tablas de datos correspondientes a las series de figuras y cuerpos geométricos.

3.10 Consigna

A partir de la siguiente tabla:

	Lado	Perímetro	Área	
Pentágono 1	4 cm			
Pentágono 2	8 cm			
Pentágono 3	16 cm			
	Radio de la base	Altura	Área total	Volumen
Cilindro 1	1 cm	3 cm		
Cilindro 2	2 cm	6 cm		
Cilindro 3	3 cm	9 cm		
	Radio de la base	Generatriz	Área total	Volumen
Cono 1	3 cm	5 cm		
Cono 2	9 cm	15 cm		
Cono 3	27 cm	45 cm		

a) Identifiquen la ley de formación de cada serie a partir de las medidas dadas.
   Si se agregaran nuevos elementos, ¿qué medidas les corresponderían?
   Expresen la ley de formación en forma verbal y, si es posible, simbólica.
b) Sin hacer cálculos, anticipen qué ocurrirá con el perímetro, el área y el volumen al pasar de un elemento al siguiente. Justifiquen sus anticipaciones.
c) Calculen las magnitudes correspondientes y comparen los resultados con lo anticipado. ¿Se cumplen las mismas leyes de formación para las magnitudes? ¿Por qué?
   A partir de lo obtenido, describan cómo varían las magnitudes en relación con las dimensiones.
d) Si encuentran otras relaciones, exprésenlas en forma verbal y, si es posible, simbólica.

3.11 Posibles resoluciones

El primer grupo trabaja con los conos propuestos y comienza observando las medidas indicadas en cada figura. En un primer momento, los estudiantes identifican que en todos los casos aparecen tres medidas: el radio de la base, la altura y la generatriz.

A partir de la regularidad que observan en las medidas, formulan una anticipación:

A1: Antes vimos que cambiar una medida no alcanzaba…

A2: Pero acá todas las figuras crecen siguiendo la misma regla…

A1: Entonces capaz ahora sí cambia todo de la misma manera…

A3: Sí, si todo se multiplica por 3, el área y el volumen deberían multiplicarse por 3

P: ¿Cómo podrían comprobarlo?

Los estudiantes deciden avanzar con el cálculo del área total de los conos. Utilizan la expresión

$$A_T = \pi r^2 + \pi r g$$

Área total del primer cono	$A_{T_1} = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 24\pi$
Área total del segundo cono	$A_{T_2} = \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 9 \cdot 15 = 216\pi$
Área total del tercer cono	$A_{T_3} = \pi \cdot 27^2 + \pi \cdot 27 \cdot 45 = 1944\pi$

Al obtener los resultados, advierten que no coinciden con lo esperado.

A1: No da el triple. Se multiplicó por nueve.

P: Intenten explicar por qué pasa eso.

Los estudiantes vuelven sobre la cuenta y analizan cómo intervienen las medidas en el cálculo.

A2: A ver… en la cuenta aparece el radio al cuadrado. Claro, esto ya nos había pasado. Por eso cambia el resultado

A3: Tenés razón, como no tenía la cuenta en frente no me di cuenta

A1: Entonces no se triplica, el radio al cuadrado hace que cambie más.

A partir del análisis realizado sobre el área total, los estudiantes retoman la expresión del volumen del cono y comienzan a anticipar su comportamiento. Observan que, al igual que en el área, el radio aparece al cuadrado.

Sin embargo, reconocen que en el volumen todas las operaciones son multiplicativas y que interviene además la altura. En función de esto, advierten que, si bien todas las dimensiones del cono se multiplican por 3, esto no implica que el volumen se multiplique por la misma cantidad.

A partir de estas observaciones, anticipan que el volumen se multiplicará por un valor mayor que 3, aunque no logran determinar aún cuál será ese valor.

P: Solo mirando la expresión del volumen, ¿qué pueden decir cambió respecto del área?

Los estudiantes revisan las expresiones utilizadas y comienzan a establecer relaciones entre las medidas involucradas.

A2: En el área había una suma y acá es todo multiplicación.

A1: Sí, además en el área teníamos la generatriz y acá la altura

P: ¿están usadas de la misma forma?

A2: A ver, el radio está al cuadrado, así que eso es igual.

A3: La generatriz multiplica un solo radio, y acá la altura multiplica el radio al cuadrado.

P: ¿Cuántas veces aparece cada medida en la multiplicación?

A2: El radio aparece dos veces y la altura una.

A1: Entonces hay más medidas multiplicándose, por eso el volumen cambia más que el área.

El segundo grupo trabaja con los pentágonos regulares propuestos. Los estudiantes observan que las longitudes propuestas siguen una misma regularidad: el lado del segundo pentágono es el doble del primero, y el del tercero es el doble del segundo. A partir de esta regularidad, formulan una anticipación inicial:

A1: Si el lado se duplica, el perímetro y el área deberían duplicarse.

A2: Sí, porque es la medida que aparece en todos.

P: ¿Cómo podrían comprobarlo?

Los estudiantes comienzan calculando el perímetro de los pentágonos, utilizando la expresión:

$$P = 5 \cdot l$$

Perímetro del primer pentágono	$P_1 = 5 \cdot 4 = 20$
Perímetro del segundo pentágono	$P_1 = 5 \cdot 8 = 40$
Perímetro del tercer pentágono	$P_1 = 5 \cdot 16 = 80$

Al comparar los resultados, concluyen que el perímetro se duplica cuando se duplican las medidas.

A1: El perímetro sí se duplica.

A2: Claro, porque es la misma figura, pero más grande.

Luego se proponen analizar qué sucede con el área. En un primer momento, intentan avanzar a partir de la información disponible, pero advierten rápidamente una dificultad.

A1: Para el área con el lado solo no alcanza.

A2: Nos falta otra medida.

Se detienen y vuelven sobre lo que saben acerca del área de un pentágono regular. Reconocen que necesitan el perímetro y la apotema, pero esta última no está dada en la tabla.

A1: Para calcular el área hace falta la apotema.

A2: Y no la tenemos.

Los estudiantes solicitan ayuda a la docente.

A1: Profe, ¿cómo hacemos si no tenemos esa medida?

La docente interviene sin resolver el problema:

P: Piensen en las propiedades del pentágono regular. ¿Qué saben de esta figura que podría ayudarles?

Los estudiantes discuten y recuperan ideas vistas anteriormente.

A2: Se puede dividir en triángulos iguales.

A1: Sí, y ahí aparece la apotema.

La docente vuelve a intervenir para sostener la búsqueda sin dar el procedimiento:

P: Si el lado se duplica, ¿qué creen que pasa con las demás medidas de la figura?

A1: Y… deberían duplicarse también.

A2: Porque sigue siendo la misma figura, pero ampliada.

A partir de esta idea, el grupo decide considerar que, si el lado se duplica, también lo hace la apotema. Con esa regularidad, reconstruyen las medidas necesarias para continuar. Toman como apotema del primer pentágono 2,8 cm, y a partir de allí proponen:

$$a_1 = 2{,}8\ \text{cm} \quad a_2 = 5{,}6\ \text{cm} \quad a_3 = 11{,}2\ \text{cm}$$

Retoman entonces la expresión del área del pentágono regular:

Área del primer pentágono regular	$A_1 = \frac{20 \cdot 2{,}8}{2} = 28\ \text{cm}^2$
Área del segundo pentágono regular	$A_2 = \frac{40 \cdot 5{,}6}{2} = 112\ \text{cm}^2$
Área del tercer pentágono regular	$A_3 = \frac{80 \cdot 11{,}2}{2} = 448\ \text{cm}^2$

Al comparar estos resultados, advierten que el comportamiento del área no coincide con lo que habían anticipado al comienzo.

P: ¿Por qué creen que el perímetro si se duplica y el área no?

Los estudiantes vuelven sobre las expresiones utilizadas y comienzan a comparar las magnitudes.

A2: El perímetro depende solo del lado.

A1: En cambio, para el área hace falta también la apotema.

A2: Entonces no alcanza con mirar una sola medida.

La docente insiste sobre esa diferencia:

P: ¿Y qué pueden concluir entonces sobre las leyes de formación?

A1: Que no son las mismas.

A2: El perímetro se duplica, pero el área se cuadruplica.

A1: Depende de qué medidas intervienen en el cálculo.

A partir de este intercambio, el grupo reformula su idea inicial. Reconoce que, aunque las dimensiones lineales de la figura sigan una misma ley de formación, las magnitudes asociadas no necesariamente se comportan del mismo modo. En este caso, el perímetro sigue la misma ley que el lado, mientras que el área cambia de otra manera, porque depende de más de una medida.

El tercer grupo trabaja con cilindros y a partir de los datos los estudiantes comienzan a buscar relaciones entre las medidas

A1: La altura es el triple del radio

P: ¿Qué podrían decir del área y del volumen?

A2: Me acuerdo que en otra actividad vimos que cuando teníamos una medida al cuadrado entonces no crece de manera proporcional.

P: ¿Pueden comprobarlo?

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$A_1 = 8\pi, \quad A_2 = 32\pi \quad A_3 = 72\pi$$

A1: Sí, es como pensábamos, no se multiplica siempre por lo mismo ni aumenta igual

P: Si con los cálculos no alcanza para explicarlo, ¿hay alguna otra forma de representarlo o de reescribir las medidas?

A3: Mmm, podríamos escribir la altura como 3r, si se triplica siempre.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r(3r)$$

$$A = 2\pi r^2 + 6\pi r^2 = 8\pi r^2$$

P: ¿Entonces cómo quedaría el área en función del radio?

A3: Queda $A(r) = 8\pi r^2$ en este caso.

A1: Claro, el área depende de r^2, por eso no cambia de manera proporcional con el radio.

A continuación, los estudiantes analizan el volumen

A1: Pensando en la formula, como el radio y la altura se multiplican por el mismo número, el volumen también debería multiplicarse por ese número. Entonces es proporcional.

P: ¿Pueden comprobar que eso es así?

Los estudiantes prueban con los valores y realizan los cálculos:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V_1 = 3\pi\,, \qquad V_2 = 24\pi\,, \qquad V_3 = 81\pi$$

A1: No es. De 3π a 24π es por 8 pero después no se mantiene.

P: Traten de pensarlo como hicieron con el área

Los estudiantes retoman la expresión sustituyendo $h = 3r$

$$V = \pi r^2(3r)$$

$$V = 3\pi r^3$$

A2: Claro, en el caso del área dependía de r^2, en el volumen depende de r^3.

P: Ok, entonces ya pudieron verificar que no es proporcional, ¿se les ocurre alguna manera de describir de qué forma cambia?

A2: Podríamos mirar cómo cambia de uno a otro

$V_2 - V_1 = 24\pi - 3\pi = 21\pi \quad V_3 - V_2 = 81\pi - 24\pi = 57\pi$

A3: Mmm, no aumenta siempre lo mismo. Cuando vimos proporcionalidad, habíamos comparado cómo se multiplicaba de un valor al siguiente. Probemos eso

$$\frac{V_2}{V_1} = 8 \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{27}{8}$$

A2: No es siempre el mismo número. Entonces tampoco es proporcional.

P: ¿Qué tienen de particular esos números? ¿Podrían escribirlos en forma factorizada para analizarlos mejor?

A1: el 8 es $2 \cdot 2 \cdot 2$ o sea, 2^3

A2: El 27 es $3 \cdot 3 \cdot 3$, entonces $\frac{27}{8}$ es $\frac{3^3}{2^3}$

A3: Tienen todos que ver con cubos.

P: Si quisieran continuar con mismo tipo de cálculo, ¿cómo sería el siguiente cociente? ¿Y el siguiente?

A1: Después de $\frac{27}{8}$ vendría $\frac{64}{27}$, porque sería como $\frac{4^3}{3^3}$

A2: Y después $\frac{125}{64}$

A3: Es siempre el cubo del siguiente sobre el cubo del anterior

P: ¿Se podrá escribir para que sirva para cualquier número?

A3: ¿Así?

$$\frac{(n+1)^3}{n^3}$$

P: ¿Qué les dice eso sobre la forma en la que cambia el volumen?

A2: Que no es proporcional pero que no cambia de cualquier manera. Sigue un patrón que se puede anticipar

La docente propone comenzar la puesta en común recuperando lo trabajado por los distintos grupos.

P: En los tres grupos trabajaron con figuras en las que las medidas cambiaban siguiendo alguna regla. Nos interesa ver qué pasa con las magnitudes en cada caso. Empecemos con el grupo que trabajó con los pentágonos, ¿Qué observaron?

A1: (Grupo 2): El lado se duplicaba.

A2: (Grupo 2): El perímetro también se duplicaba, pero el área no.

P: El grupo de los conos y el de los cilindros, ¿qué pasó en sus casos con esas relaciones?

A1: (Grupo 1): En nuestro caso, aunque las dimensiones se multiplicaban por el mismo número, el área no cambiaba en esa misma proporción.

A2: (Grupo 3): A nosotros nos pasó algo parecido: aunque las dimensiones variaban siguiendo una misma ley, el volumen no cambiaba en la misma proporción.

A1: (Grupo 2): El perímetro depende solo del lado, pero el área depende del lado y de la apotema, por eso cambia distinto.

A2: (Grupo 3): No, porque en nuestro caso, aunque las dimensiones también estaban relacionadas entre sí, el volumen no cambiaba proporcionalmente.

P: El grupo de los conos, ¿qué pueden sumar a esto?

A1: (Grupo 1): Todas las medidas se multiplicaban por 3. Pero el área no se multiplicó por 3.

A3: (Grupo 2): Nosotros llegamos a la conclusión de que es porque aparecía una medida al cuadrado.

P (al grupo de los cilindros): ¿eso coincide con lo que ustedes vieron?

A1: (Grupo 3): Sí, en el área del cilindro también había un cuadrado y tampoco era proporcional.

A2: (Grupo 2): Entonces siempre que aparece un cuadrado deja de ser proporcional.

P: ¿En el grupo de los conos, qué papel tiene ese cuadrado en la cuenta?

A2 (Grupo 1): El radio estaba al cuadrado y eso hacía que cambie más.

P: ¿Todos están de acuerdo con que siempre que aparece un cuadrado deja de ser proporcional?

Se genera un silencio. Los grupos se miran.

A1 (Grupo 3): Esperen… en el volumen del cilindro también hay un cuadrado y además está la altura. No es solo el cuadrado.

A2 (Grupo 3): Claro, el radio aparece más de una vez en la multiplicación.

A3 (Grupo 2): Entonces no alcanza con ver si hay un cuadrado, hay que ver cómo está en la cuenta.

P: ¿Pueden mostrar con un ejemplo concreto qué quieren decir con "cómo está en la cuenta"?

A2 (Grupo 3): En el volumen del cilindro es $\pi \cdot r^2 \cdot h$. El radio aparece dos veces y la altura una. Si todo se duplica, el volumen se multiplica por $2 \cdot 2 \cdot 2$, que es 8.

A1 (Grupo 1): En el área del cono era $\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$. Hay una suma, por eso no da lo mismo.

A3 (Grupo 2): Y en el perímetro del pentágono era solo $5 \cdot l$, una sola medida que aparece una vez. Por eso sí era proporcional.

P (al grupo de los cilindros): ustedes probaron otra forma de analizar cómo cambiaba. ¿Pueden mostrarla?

A2 (Grupo 3): Primero probamos cuánto aumentaba, pero no era siempre igual. Entonces comparamos cómo se multiplicaba. Nos dio 8 y después 27 sobre 8.

A1 (Grupo 2): Pero eso no aumenta siempre lo mismo, entonces no hay regla.

P (al grupo de los cilindros): ¿qué pudieron hacer con esos números ustedes?

A2 (Grupo 3): Los escribimos como productos.

A3 (Grupo 3): El 8 es 2 por 2 por 2 y el 27 es 3 por 3 por 3.

A1 (Grupo 1): O sea, ¿cubos?, se multiplica siempre por un cubo.

P: ¿es siempre el mismo cubo?

A3 (Grupo 3): No, va cambiando. Pero sigue una forma.

P: ¿Cómo describirían esa forma para que los demás grupos la entiendan?

A2 (Grupo 3): Es como el cubo del siguiente sobre el anterior.

P: Entonces llegaron a algo interesante: aunque no sea proporcional, hay una forma de anticipar cómo cambia. ¿Qué dirían que hay que mirar para entender esa forma de cambio?

A1 (Grupo 1): Cómo aparecen las medidas en la cuenta.

A2 (Grupo 3): Cuántas veces intervienen.

A3 (Grupo 2): La forma de la expresión.

P: ¿Podrían intentar formular una idea general con todo lo que apareció hoy?

Se genera un intercambio entre los grupos.

A2 (Grupo 2): Que las magnitudes no siempre cambian de la misma manera que las dimensiones.

A1 (Grupo 3): Y que para saber cómo cambian hay que mirar cómo están en la fórmula.

A3 (Grupo 1): No alcanza con saber cuántas medidas hay, hay que ver cómo aparecen.

A continuación de la puesta en común, la profesora retoma las producciones de los distintos grupos con el propósito de organizar y precisar las conclusiones construidas colectivamente.

P: En las situaciones anteriores analizaron la forma en que varían las magnitudes. En este caso, además, se identificó que ese comportamiento depende de cómo intervienen las medidas en la expresión que las define. En particular, en el caso de los pentágonos se reconoció una situación en la que existe proporcionalidad, ya que la expresión depende de una única medida que interviene una sola vez multiplicando, sin estar elevada a potencias mayores, es decir, de manera lineal. En cambio, en los otros casos analizados, se puso en evidencia que no siempre se cumple esta condición. Por ejemplo, en el área del cono, la presencia de una suma y la intervención del radio de distintas formas impiden que se establezca una relación de proporcionalidad. De manera similar, en el volumen del cilindro, el radio interviene elevado al cuadrado mientras que la altura lo hace de forma lineal, lo que genera que las variaciones no se correspondan con una relación proporcional. A partir de esto, se puede afirmar que el modo en que cambia una magnitud depende de cómo intervienen las medidas en la expresión matemática que la define. En particular, cuando una magnitud depende linealmente de una única variable, puede establecerse una relación de proporcionalidad directa; en cambio, cuando las variables intervienen con exponentes mayores que uno o en combinaciones más complejas, dicha proporcionalidad no se mantiene. De este modo, se concluye que las magnitudes no siempre varían proporcionalmente

con las dimensiones, sino que su comportamiento depende de la estructura de la expresión que las vincula.

En el pizarrón queda:

Ejemplos trabajados:

Perímetro del pentágono: $P = 5 \cdot l \rightarrow$ una dimensión, aparece una vez $\rightarrow$ varía proporcionalmente con l

Área del cono: $A_T = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g \rightarrow$ hay suma, el radio aparece de formas distintas $\rightarrow$ no varía proporcionalmente

Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow$ el radio aparece dos veces, la altura una $\rightarrow$ al multiplicar todo por k, el volumen se multiplica por k^3

Lo que determina cómo varía una magnitud:

No alcanza con identificar qué dimensiones intervienen.

Hay que analizar cómo aparecen en la expresión: cuántas veces se multiplican y si hay sumas de por medio.

Conclusión:

Las magnitudes no siempre varían proporcionalmente con las dimensiones.

El modo en que varían depende de la forma de la expresión que las define.

Cuando todas las dimensiones se multiplican por k y aparecen n veces en una multiplicación sin sumas, la magnitud se multiplica por k^n.

3.12 Análisis

La tercera situación retoma y profundiza las relaciones entre magnitudes geométricas abordadas en las situaciones anteriores, centrándose en la identificación y explicación de regularidades en el comportamiento del área y el volumen a partir de la variación de sus dimensiones. En este caso, el foco no está puesto en la validación de afirmaciones ni en la construcción inicial de relaciones, sino en el análisis de los patrones que emergen de los datos y en la explicitación de la forma en que dichas magnitudes varían.

A partir del trabajo con tablas de valores, los estudiantes comienzan a comparar cómo cambian las magnitudes al pasar de un caso al siguiente. En una primera instancia, intentan describir estas

variaciones a partir de diferencias, observando que los incrementos no son constantes. Esta constatación permite descartar modelos de crecimiento lineal, lo que pone en cuestión nuevamente la idea de proporcionalidad directa como modelo general de interpretación.

Frente a esta dificultad, algunos estudiantes recurren al análisis de cocientes sucesivos, comparando cómo se multiplican los valores de una magnitud al pasar de un caso al siguiente. Este procedimiento permite identificar una regularidad en los valores obtenidos, que puede ser reinterpretada a partir de la descomposición en potencias. De este modo, comienzan a reconocer que, en el caso del volumen, las variaciones pueden vincularse con el comportamiento de expresiones cúbicas, lo que constituye un avance hacia una comprensión más estructural de la relación entre las magnitudes y sus dimensiones.

En este proceso, la dificultad no radica únicamente en realizar cálculos, sino en interpretar las regularidades observadas y en formular una explicación que dé cuenta de ellas. Desde la perspectiva de los registros semióticos de representación (Duval, 2004), esto implica un pasaje desde el registro numérico hacia formas de generalización más cercanas al registro algebraico. Sin embargo, este tipo de transformación no se produce de manera inmediata, ya que requiere reconocer qué elementos son invariantes y cuáles no en cada una de las expresiones, lo que constituye uno de los principales obstáculos en la comprensión matemática.

De este modo, la identificación de patrones en los cocientes sucesivos puede interpretarse como una forma de visualización no perceptiva. Tal como plantea de Guzmán (2010), la visualización no se limita a la observación de objetos concretos, sino que también involucra la capacidad de reconocer estructuras y regularidades en expresiones simbólicas o numéricas. En este caso, los estudiantes no operan sobre representaciones materiales o gráficas, sino sobre relaciones entre números, lo que implica un nivel de abstracción mayor en comparación con las situaciones anteriores.

Desde el punto de vista didáctico, la situación presenta una diferencia significativa respecto de las anteriores: la ausencia de materiales manipulativos y de representaciones gráficas. Esta decisión no responde a una omisión, sino a una intencionalidad específica. En línea con lo planteado por Coriat (1997), el uso de materiales no es neutro, sino que introduce determinadas condiciones en la actividad matemática. En este caso, se opta por no incorporarlos con el objetivo de centrar la atención en la interpretación de las relaciones numéricas y en la

identificación de estructuras, evitando que la validación repose en aspectos perceptivos o en la manipulación concreta.

Por otra parte, en el artículo de referencia, algunas producciones estudiantiles alcanzan niveles de generalización elevados, como la formulación de términos generales de sucesiones a partir del análisis de cocientes sucesivos. Sin embargo, dichas producciones suponen procesos de cambio de registro y de formalización que, desde la teoría de los sistemas de representación semiótica (Duval, 2004), no pueden considerarse como emergentes de manera espontánea a partir del medio, sino que requieren intervenciones docentes específicas y procesos de institucionalización. En este trabajo se opta por sostener un nivel de formalización progresivo, priorizando que los estudiantes puedan interpretar, comparar y explicar los comportamientos de las magnitudes a partir de los registros numérico y algebraico, sin forzar la introducción de herramientas cuya construcción no ha sido previamente abordada en la secuencia.

En síntesis, la tercera situación permite consolidar una comprensión más profunda de las relaciones entre magnitudes geométricas, avanzando desde la identificación de regularidades hacia su interpretación en términos estructurales. La articulación entre distintos procedimientos, como el análisis de diferencias y cocientes, la comparación de valores y la interpretación de expresiones, favorece la construcción de significados más próximos a los modelos matemáticos formales. En este proceso, la ausencia de materiales y la necesidad de operar sobre registros más abstractos contribuyen a una reorganización de los saberes, en línea con una concepción del aprendizaje como construcción progresiva de significados (Bressan, Bogisic y Crego, 2006).

4 Conclusión

El presente trabajo se propuso analizar el modo en que los estudiantes construyen relaciones entre magnitudes geométricas, particularmente en torno al perímetro, el área y el volumen, a partir del diseño y estudio de tres situaciones didácticas. A lo largo de estas, se buscó no solo identificar los conocimientos que los alumnos ponen en juego, sino también comprender los procesos mediante los cuales dichos conocimientos se transforman, se reorganizan y adquieren mayor grado de generalidad.

A lo largo de las tres situaciones se observa un recorrido que va desde la puesta en cuestión de modelos intuitivos iniciales hacia una comprensión más estructural de las relaciones entre

magnitudes. En un primer momento, los estudiantes tienden a interpretar dichas relaciones de manera lineal, generalizando la proporcionalidad como modelo de análisis. Sin embargo, la confrontación con distintas condiciones y representaciones permite poner en tensión estas ideas, favoreciendo la construcción de criterios más precisos para distinguir entre distintos tipos de variación. En este proceso, la articulación entre registros, la interpretación de regularidades y la necesidad de justificar las producciones resultan centrales para avanzar hacia comprensiones más próximas a los modelos matemáticos formales.

Desde el punto de vista didáctico, el diseño de las situaciones se sustentó en una serie de decisiones orientadas a favorecer la construcción progresiva del conocimiento. En particular, la alternancia entre distintos tipos de tareas, la articulación de múltiples registros de representación y la regulación en el uso de materiales y recursos, en algunos casos promoviendo su utilización y en otros restringiéndola, respondieron a la intención de generar condiciones que permitan a los estudiantes explicitar, confrontar y reorganizar sus ideas. Tal como plantea Coriat (1997), los recursos no actúan como meros apoyos, sino que estructuran la actividad matemática, orientando las acciones posibles y los procesos de validación.

Asimismo, se optó por no forzar niveles de formalización que no se correspondieran con el recorrido previo de los estudiantes, si bien en el trabajo de referencia se observan producciones que alcanzan niveles elevados de generalización, se consideró que dichos procesos requieren intervenciones específicas y no pueden atribuirse únicamente al medio.

En conjunto, las tres situaciones permiten evidenciar un proceso de aprendizaje que no se da por acumulación de contenidos, sino por reorganización progresiva de saberes. La confrontación entre anticipaciones y resultados, la necesidad de justificar y validar las producciones, y la articulación entre distintos modos de representación favorecen la construcción de significados más próximos a los modelos matemáticos formales. De esta forma, el trabajo se inscribe en una perspectiva de enseñanza que concibe al alumno como un sujeto activo en la construcción del conocimiento, en línea con lo planteado por Bressan, Bogisic y Crego (2006).

En este marco, la reelaboración de la propuesta de Giarrizzo no se limita a una adaptación, sino que implica una reconstrucción orientada a hacer explícitas las decisiones didácticas y los procesos de aprendizaje involucrados, poniendo en evidencia el potencial de estas situaciones para favorecer la construcción de conocimiento matemático con sentido.

En síntesis, el análisis realizado pone de manifiesto la importancia de diseñar situaciones que permitan a los estudiantes resolver problemas incorporando la posibilidad de que se enfrenten a la necesidad de interpretar, justificar y generalizar sus producciones. Es en este proceso, mediado por el docente y por las condiciones del medio, donde se construyen los conocimientos matemáticos con sentido.

5 Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. (1987). *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis.

Bressan, A., Bogisic, B., & Crego, K. (2006). *Razones para enseñar geometría en la educación básica: Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires: Novedades Educativas.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 155–178). Barcelona: Horsori.

de Guzmán, M. (2010). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático: Elementos básicos del análisis.* Madrid: Pirámide.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143–168.

Giarrizzo, A. M. (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Godino, J., & Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros.* Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.