



UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

Carrera: Licenciatura en Matemática

Modelación matemática del funcionamiento de un marcapasos

Autor: Alejandro Mellino

Directora de Tesis: Dra. Samira Abdel Masih

***Tesis presentada para optar al título de Licenciado en
Matemática***

- Julio 2020 -

Firmas del jurado

Agradecimientos

Agradezco sobremanera a mi Directora de Tesis y Profesora en múltiples asignaturas durante mi trayecto, Dra. Samira Abdel Masih, sin cuya ayuda, paciencia, vocación y calidad humana no me hubiera sido posible llegar a esta instancia.

Y a todos los Docentes con los que cursé materias, en mi paso por la Universidad.

Alejandro Mellino

Resumen

Desde hace muchos años, los seres humanos han entendido el vínculo entre los latidos del corazón y la vida, sin comprender plenamente los mecanismos involucrados. En la actualidad se conoce mucho acerca del comportamiento cardíaco, sin embargo, dada la complejidad de los tejidos que lo conforman, todavía hay mucho que estudiar.

En particular, una de las anomalías más comunes que alteran el correcto funcionamiento del corazón se produce cuando éste no late al ritmo correcto.

Para solucionar este problema se inventó, a mediados de la década de 1970, un pequeño dispositivo llamado *marcapasos*. Su función es mantener la frecuencia cardíaca correcta. Pero ¿se podría monitorear y asegurar su correcto funcionamiento antes de fabricarlo? En caso de ser esto posible, disminuirían notablemente los costos de producción, ya que ayudaría a probar los marcapasos antes de ser implementados, lo que, además, incrementaría la seguridad para el paciente.

Afortunadamente, esto se puede lograr gracias a la utilización de modelos matemáticos, que ayudan a analizar, en este caso, el funcionamiento del marcapasos y a prevenir alguna anomalía que pudiera surgir.

En este trabajo de tesis desarrollaremos la publicación presentada por May Cen y Tamayo Loeza ([1]), donde se modela matemáticamente el funcionamiento de un marcapasos mediante una ecuación diferencial logística.

Posteriormente elaboraremos una simulación, utilizando el software Wolfram Mathematica 10.0, donde se podrá comprobar, en cada instante, la magnitud del voltaje que el marcapasos aplica al corazón.

Palabras claves:

Modelo Matemático, Ecuación Diferencial Logística, Modelado de Circuitos Eléctricos, Marcapasos.

Índice general

Capítulo 1. Nociones matemáticas previas	7
1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias	7
1.2 Modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales de primer orden	10
El Modelo Exponencial	16
El Modelo Logístico	20
Capítulo 2. Modelado de un Circuito Eléctrico	28
2.1 Introducción	28
2.2 Carga eléctrica	28
2.3 El Átomo	30
2.4 Explicación de los fenómenos electrostáticos	31
2.5 Medición de la carga eléctrica	32
2.6 Aislantes y conductores	33
2.7 Inducción. Generador de fuerza electromotriz	34
2.8 Corriente eléctrica	38
2.9 El circuito eléctrico y su modelado	43
Las Leyes de Kirchhoff	49
Capítulo 3. Nociones básicas del funcionamiento del corazón y del marcapasos ...	58
3.1 Nociones previas	58
3.2 El corazón y sus propiedades eléctricas	58
Fisiología del corazón	60
Funcionamiento eléctrico del corazón	60
El umbral de estimulación	62
3.3 El marcapasos y su función	63
Capítulo 4. Modelado del marcapasos y su simulación	65
4.1 Presentación del modelo	65
4.2 El modelo matemático del marcapasos	68
4.2.1 El Modelo Exponencial	68
4.2.2 El Modelo Logístico	80
4.3 Simulación del marcapasos	89
4.4 Verificación del efecto del marcapasos mediante una simulación	93

¿Qué es la bradicardia?	94
Modelización matemática de un electrocardiograma	95
Corrección de la bradicardia mediante un marcapasos.....	96
Capítulo 5. Conclusiones	98
Referencias.....	99

Capítulo 1

Nociones matemáticas previas

En este capítulo expondremos los principales conceptos matemáticos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Primeramente, definiremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, para luego desarrollar algunos modelos matemáticos que aplicaremos para describir el funcionamiento del marcapasos.

1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Definición 1.1: Ecuación Diferencial Ordinaria

Una ecuación diferencial ordinaria (simbolizada mediante la sigla EDO) es una ecuación que contiene las derivadas de una función real de variable real, llamada $y(x)$. En este caso, la incógnita de la ecuación es la función $y(x)$.

Ejemplo 1.2

Las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales ordinarias:

- 1) $y'(x) = 2x e^x$
- 2) $3y''(x) - 4y'(x) = 2y(x)$

Definición 1.3: Orden de una ecuación diferencial ordinaria

El orden de una ecuación diferencial ordinaria es la derivada de mayor orden que figura en la ecuación.

Ejemplo 1.4

Indicar el orden de las ecuaciones diferenciales del Ejemplo 1.2

Solución

- 1) Orden 1 o de primer orden.
- 2) Orden 2.

Resolución de EDO de primer orden

En esta sección explicaremos el Método de Separación de Variables, que permitirá resolver ciertas ecuaciones diferenciales de primer orden. Este método lo utilizaremos para hallar la solución del modelo matemático del marcapasos. Para poder aplicarlo, la ecuación diferencial debe ser separable. Este concepto lo daremos a continuación.

Definición 1.5: Ecuación separable

Una ecuación diferencial de primer orden es separable si es de la forma

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

Método de Separación de Variables

Como mencionamos anteriormente, este método se aplica para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y separables. Es decir, ecuaciones de la forma

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y) \quad [1.1]$$

Los pasos a seguir para su resolución son los siguientes:

Primer Paso

En la ecuación [1.1] reemplazamos $y'(x)$ por su correspondiente cociente de diferenciales, es decir, por $\frac{dy}{dx}$. De este modo,

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad [1.2]$$

Segundo Paso

En la ecuación [1.2], separamos " dx " y " $g(x)$ " de " dy " y " $h(y)$ ":

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx \quad [1.3]$$

Tercer Paso

Integramos miembro a miembro la ecuación [1.3]:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

Por lo tanto

$$H(y) = G(x) + c \quad [1.4]$$

donde

$H(y)$ y $G(x)$ son, respectivamente, las antiderivadas de $\frac{1}{h(y)}$ y de $g(x)$,

y c es una constante.

Cuarto Paso

En caso de ser posible, despejamos " y " de la ecuación [1.4] a fin de obtener la solución explícita de la ecuación diferencial.

Observación 1.5

No es necesario utilizar dos constantes en la ecuación [1.4], porque si escribimos

$$H(y) + c_1 = G(x) + c_2$$

Entonces la diferencia $c_2 - c_1$ se puede reemplazar por una sola constante c .

Ejemplo 1.6

Resolver la ecuación diferencial $(1+x^2)y'(x)=y(x)$ con condición inicial $y(0)=2$.

Solución

Aplicaremos el Método de Separación de Variables, siguiendo los pasos que indica el método:

Primer Paso

En la ecuación diferencial separable reemplazamos $y'(x)$ por $\frac{dy}{dx}$ y eliminamos, además, el argumento a la función incógnita $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x^2)} \cdot y$$

Segundo Paso

En la ecuación anterior, separamos las “x” de las “y”:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

Tercer Paso

Integramos miembro la ecuación anterior:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

Entonces

$$\ln|y| = \arctg(x) + c_1$$

Cuarto Paso

Despejamos “y” de la última ecuación:

$$\ln|y| = \arctg(x) + c_1 \Rightarrow |y| = e^{\arctg(x) + c_1} \Rightarrow |y| = e^{\arctg(x)} \cdot e^{c_1} \Rightarrow y = \pm e^{c_1} \cdot e^{\arctg(x)}$$

Si definimos $c = \pm e^{c_1}$ entonces la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c \cdot e^{\arctg(x)}$$

Cálculo de la constante c

Como $y(0)=2$ entonces, reemplazando esta expresión en la solución hallada, resulta

$$y(0)=2 \Rightarrow c \cdot e^{\arctg(0)} = 2 \Rightarrow c \cdot e^0 = 2 \Rightarrow c = 2$$

Por lo tanto

$$y(x) = 2 \cdot e^{\arctg(x)}$$

■

1.2 Modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección veremos cómo crear ciertos modelos matemáticos que conducirán al planteo y resolución de una ecuación diferencial de primer orden, los cuales serán aplicados en el Capítulo 4. Las primeras preguntas que surgen, al abordar este tema, son: ¿Qué es un modelo? ¿Qué significa un modelo matemático? Las respuestas están dadas en las siguientes definiciones:

Definición 1.7: Modelo

Un **modelo** es una representación simplificada de la realidad, una aproximación a la misma, con el objeto de poder analizar y describir esta realidad.

Definición 1.8: Modelo Matemático

Un **modelo matemático** es la descripción matemática de un fenómeno de la vida real. Dicha descripción puede llevarse a cabo mediante una función, una ecuación algebraica o una ecuación diferencial.

Los modelos matemáticos nos permiten estudiar el fenómeno, comprenderlo y predecir su comportamiento.

Numerosas ramas de la ciencia requieren describir matemáticamente el comportamiento de cierto fenómeno, ya que esto ayuda a tomar decisiones correctas.

Por ejemplo, un ecologista podría estar interesado en determinar cuántas toneladas de peces pueden recogerse al año, para no exterminar la población.

O un médico desearía saber qué le ocurriría a su paciente, en caso de duplicarle la dosis del medicamento que debe ingerir.

Para diseñar modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales, es necesario comprender la interpretación física de la derivada. De esto nos ocuparemos a continuación.

La derivada como velocidad o tasa de cambio de una función

Los cambios de cualquier función $f(x)$ son controlados por los cambios de la variable x . Pues bien, uno de los objetivos fundamentales del Cálculo Infinitesimal es estudiar cuánto está variando $f(x)$ en relación a lo que está cambiando su variable independiente x .

Para llevar a cabo este análisis, consideramos que si x cambia de x_0 a x_1 entonces la variación que experimenta recibe el nombre de *incremento*. Se lo simboliza con Δx y se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

Como dijimos, los cambios en la variable independiente afectan a la función. Entonces, la función $f(x)$ también se incrementa, y esto se denota con el símbolo Δy . Es decir,

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$

Este valor nos informa si $f(x)$ creció o decreció cuando x pasó de x_0 a x_1 .

En efecto, suponiendo que $\Delta x > 0$, si $\Delta y > 0$ significa que $f(x)$ creció, mientras que si $\Delta y < 0$ resulta que $f(x)$ decreció.

Sin embargo, en numerosas ocasiones interesa saber además cuán rápido está creciendo o decreciendo $f(x)$ en relación a lo que está cambiando su variable independiente x , cuando ésta pasa de x_0 a x_1 . En este caso, la información que brinda Δy no alcanza. El siguiente ejemplo aclarará nuestra hipótesis.

Ejemplo 1.9

Supongamos que $f(x)$ representa la distancia recorrida en *km.* por un móvil al cabo de x segundos. Por lo tanto, Δy indicará la distancia recorrida por el objeto en un lapso de Δx segundos. Si por ejemplo $\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = 20 \text{ km}$, podemos afirmar que el móvil fue más rápido cuando $\Delta x = 1 \text{ seg.}$ que cuando $\Delta x = 3600 \text{ seg.}$ porque habrá recorrido la misma distancia en un lapso menor de tiempo. ■

Luego, para medir cuán rápido varió $f(x)$ cuando x pasó de x_0 a x_1 , deberemos “repartir” Δy entre el total de unidades contenido en Δx . Esto se logra si efectuamos el siguiente cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Esta última expresión da lugar a la siguiente Definición.

Definición 1.10: Velocidad o Tasa de cambio promedio de una función

La velocidad o tasa de cambio promedio de $f(x)$ con respecto a x , en el intervalo $[x_0, x_1]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Geométricamente, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representa la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, según ilustramos en la siguiente figura:

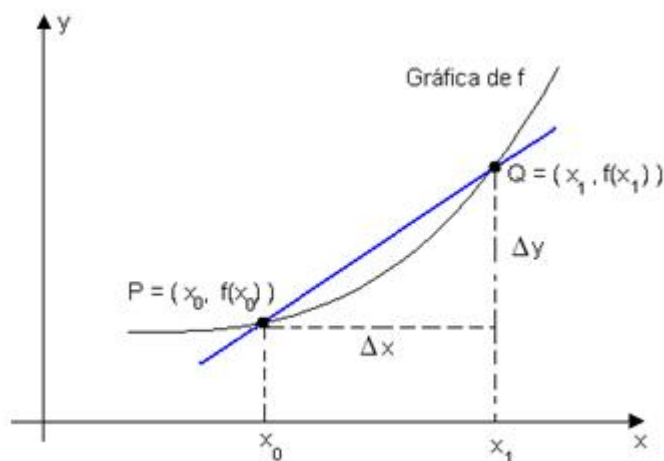


Figura 1.1: La tasa de cambio promedio de f en $[x_0, x_1]$ es la pendiente de la recta que une P con Q .

Como su nombre lo indica, la velocidad de cambio promedio mide sólo el promedio de la velocidad con que varió $f(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ y no detecta las velocidades de los cambios de $f(x)$ cuando x pasa de x_0 a algún punto interior de dicho intervalo. En este sentido puede suceder por ejemplo que, en un subintervalo de $[x_0, x_1]$, $f(x)$ varíe más rápido que en otro. La Figura 1.2 ilustra la situación que estamos planteando.

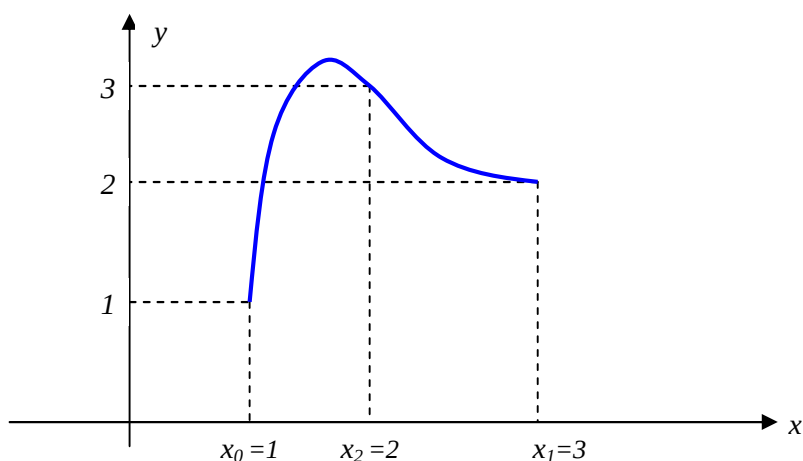


Figura 1.2: La velocidad promedio del cambio de f en $[x_0, x_1]$ es $1/2$, en $[x_0, x_2]$ es 2 , mientras que en $[x_2, x_1]$ es -1 . Por lo tanto, en $[x_0, x_2]$ f cambió más rápido que lo que cambió en $[x_2, x_1]$.

Por esta razón, para lograr mejor precisión, se intenta hallar la velocidad de cambio de $f(x)$ en cualquier $x = x_0$. Pero, ¿cómo conseguimos esto? Lo logramos calculando las velocidades promedio de $f(x)$ sobre intervalos cada vez más pequeños. Para ello haremos que x_1 se aproxime a x_0 tan cerca como podamos. O equivalentemente, haremos que Δx tienda a 0 . Es así como surge el siguiente concepto:

Definición 1.11: Velocidad o Tasa de cambio instantánea de una función

La velocidad o tasa de cambio instantánea de $f(x)$ con respecto a x , cuando $x = x_0$ es

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observamos que esta última expresión es precisamente la derivada de $f(x)$ en $x = x_0$ y representa geoméricamente la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

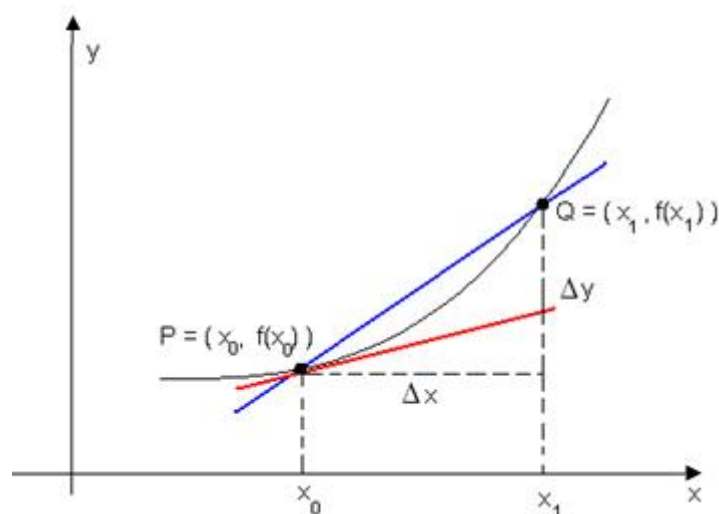


Figura 1.3: La velocidad de cambio instantánea de f en x_0 es $f'(x_0)$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$.

Como podemos comprobar gráficamente, cuando la derivada es grande (y, por lo tanto, la gráfica de la función está empinada), los valores de $f(x)$ cambian con rapidez. Y cuando la derivada es pequeña, la gráfica es relativamente plana y los valores de $f(x)$ se modifican con lentitud. En base a lo anteriormente expuesto, podemos elaborar la siguiente:

Conclusión 1.12: Interpretación física de la derivada de una función

Dada una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in D$, la derivada $f'(x_0)$ representa la velocidad o tasa de cambio instantánea de $f(x)$ con respecto a x , cuando $x = x_0$.

Esta interpretación de la derivada de una función de una variable es la que utilizaremos para crear los modelos matemáticos que desarrollaremos en este capítulo. Previamente, daremos un ejemplo ilustrativo de los conceptos hasta aquí definidos.

Ejemplo 1.13

Se han registrado las siguientes temperaturas (en °C), a partir de la medianoche y hasta las 15.00 hs. en un día de junio en la ciudad de Buenos Aires. El tiempo x se mide en horas:

x (horas)	T (°C)	x (horas)	T (°C)
0	6.5	8	6.1
1	6.1	9	8.3
2	5.6	10	10
3	4.9	11	12.1
4	4.2	12	13.5
5	4.0	13	12
6	4.0	14	11
7	4.8	15	10

- a) Hallar la velocidad promedio de cambio de la temperatura T con respecto al tiempo desde las 7.00 hs. hasta las 10.00 hs.
b) Estimar la velocidad instantánea de variación de la temperatura a las 7.00 hs.

Solución

- a) En este caso nuestra función es la temperatura T y la variable independiente x representa el tiempo. Desde las 7.00 hs. hasta las 10.00 hs. la temperatura cambia de 4.8 °C a 10 °C, de modo que

$$\Delta T = T(10) - T(7) = 10 \text{ °C} - 4.8 \text{ °C} = 5.2 \text{ °C}$$

En tanto que el cambio en el tiempo es

$$\Delta x = 10 \text{ hs.} - 7 \text{ hs.} = 3 \text{ hs.}$$

Por lo tanto, la velocidad promedio del cambio de la temperatura entre las 7.00 hs. y 10 hs. es

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{5.2 \text{ °C}}{3 \text{ hs.}} = 1.73 \frac{\text{°C}}{\text{hs.}}$$

Esto significa que, en promedio, entre las 7.00 hs. y las 10.00 hs. la temperatura está aumentando 1.73 °C cada hora.

- b) La velocidad instantánea de variación de la temperatura a las 7.00 hs. es precisamente la derivada $T'(7)$. Si bien no tenemos la fórmula explícita de la función temperatura para calcular $T'(7)$, existen dos métodos para hallar una estimación de dicha derivada:

Primer Método

Se representan gráficamente los datos y los utilizamos para trazar una curva suave que se aproxime a la gráfica de la función temperatura, según se ilustra en la Figura 1.4. A continuación, se traza la recta tangente a la gráfica de la función temperatura en $x = 7$ y,

luego de medir los lados del triángulo ABC , estimamos que la pendiente de la recta tangente es

$$\frac{|BC|}{|AC|} \approx \frac{3\text{ }^{\circ}\text{C}}{3.2\text{ hs.}} = 0.93 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{hs.}}$$

En consecuencia, a las 7.00 hs. la temperatura está aumentando a una velocidad de $0.93\text{ }^{\circ}\text{C/hs.}$

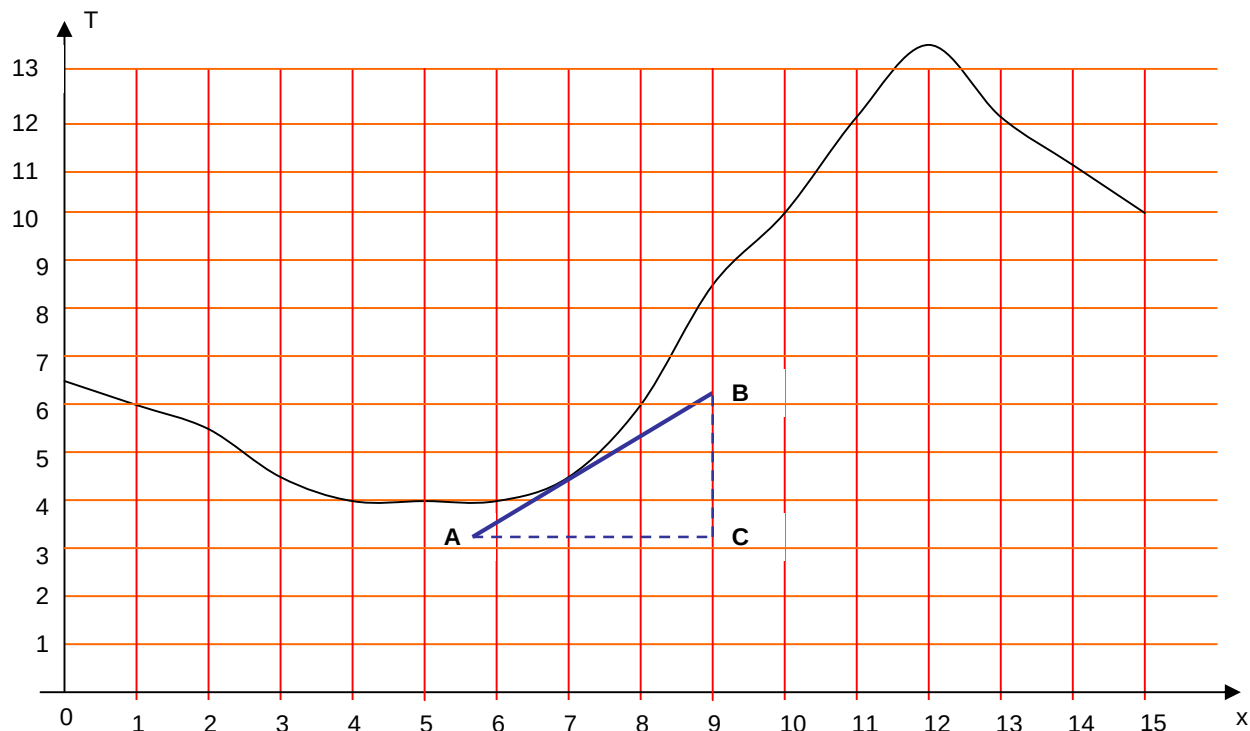


Figura 1.4: Gráfica aproximada de la función temperatura.

Segundo Método:

Como

$$T'(7) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(7+h) - T(7)}{h}$$

entonces, si h es pequeño, podemos afirmar que

$$T'(7) \cong \frac{T(7+h) - T(7)}{h}$$

El valor a tomar para $7+h$ debe figurar en la tabla, y estar lo más cerca posible del valor 7. Por lo tanto, $7+h=8$ ó $7+h=6$. Luego,

1) Si $7+h=8$ entonces $h=1$. Entonces

$$T'(7) \cong \frac{T(7+h) - T(7)}{h} = \frac{T(8) - T(7)}{1} = 6.1 - 4.8 = 1.3$$

2) Si $7+h=6$ entonces $h=-1$. Luego,

$$T'(7) \cong \frac{T(7+h) - T(7)}{h} = \frac{T(6) - T(7)}{-1} = \frac{4 - 4.8}{-1} = 0.8$$

En consecuencia, si tomamos el promedio de estos valores, podemos afirmar que

$$T'(7) \cong \frac{1.3 + 0.8}{2} = 1.05 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{hs.}}$$

Si bien los resultados obtenidos mediante estos dos métodos no coinciden, pues estamos hallando un valor estimativo de $T'(7)$ a partir de los registros tabulados de la temperatura, podemos considerarlos aceptables ya que la diferencia entre ellos es pequeña. Para lograr mejor precisión, se deberían tomar registros de temperatura en intervalos de tiempo de menor longitud. ■

En la próxima sección analizaremos dos modelos matemáticos a los que haremos referencia en el Capítulo 4: *El Modelo Exponencial* y *El Modelo Logístico*. Si bien estos modelos fueron creados para predecir la cantidad de individuos que habrá en una determinada unidad de tiempo, también pueden ser aplicados para estudiar otro tipo de fenómenos.

El Modelo Exponencial

El economista inglés Thomas Malthus fue uno de los primeros en modelar, en 1798, el crecimiento poblacional humano por medio de la Matemática. Sus resultados fueron bastante precisos para predecir la población de Estados Unidos, durante los años 1800 – 1860. El Modelo de Malthus se basa en los siguientes conceptos: *índice de natalidad* e *índice de mortalidad*. Estas definiciones las damos a continuación.

Definición 1.14: Índice de natalidad en el tiempo t

El índice de natalidad en el tiempo t es

$$\sim(t) = \frac{n(t)}{P(t)}$$

donde

$n(t)$: Cantidad de individuos que nacen en una unidad de tiempo, en el tiempo t .

$P(t)$: Cantidad total de individuos existentes en una población, en el tiempo t .

Definición 1.15: Índice de mortalidad en el tiempo t

El índice de mortalidad en el tiempo t es

$$(t) = \frac{m(t)}{P(t)}$$

donde

$m(t)$: Cantidad de individuos que mueren en una unidad de tiempo, en el tiempo t .

$P(t)$: Cantidad total de individuos existentes en una población, en el tiempo t .

En este caso, los individuos pueden ser personas, bacterias, insectos o células. En general, cuando se trata de poblaciones humanas, la unidad de tiempo es el año. Supondremos que la población que se estudia tiene índices constantes de natalidad y de mortalidad, a los que llamaremos $\sim$ y δ respectivamente. Por lo tanto, de acuerdo a las Definiciones 1.14 y 1.15 tenemos que:

Cantidad de individuos que nacen en una unidad de tiempo $= \sim \cdot P(t)$

Cantidad de individuos que mueren en una unidad de tiempo $= \delta \cdot P(t)$

Luego, podemos concluir que, en Δt unidades de tiempo, nacen $\sim \cdot \Delta t \cdot P(t)$ individuos y mueren $\delta \cdot \Delta t \cdot P(t)$ individuos.

Si consideramos:

$P(t + \Delta t)$ = Cantidad total de individuos que hay en el tiempo $t + \Delta t$,

entonces

$P(t + \Delta t) = (\text{Cantidad total de individuos en el tiempo } t) + (\text{Cantidad de individuos que nacieron en } \Delta t \text{ unidades de tiempo}) - (\text{Cantidad de individuos que murieron en } \Delta t \text{ unidades de tiempo})$
 $= P(t) + \sim \cdot \Delta t \cdot P(t) - \delta \cdot \Delta t \cdot P(t)$

Por lo tanto,

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{P(t) + \sim \cdot \Delta t \cdot P(t) - \delta \cdot \Delta t \cdot P(t) - P(t)}{\Delta t} = (\sim - \delta) P(t)$$

es decir

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (\sim - \delta) P(t)$$

Tomando miembro a miembro $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ resulta:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\sim - \delta) P(t)$$

Luego

$$P'(t) = (\sim - \delta) P(t)$$

Esta ecuación diferencial recibe un nombre especial, y es el siguiente:

Definición 1.16: Ecuación de Malthus

La Ecuación de Malthus es una ecuación diferencial de la forma

$$P'(t) = (\sim - \delta) P(t)$$

donde

$P(t)$: Cantidad total de individuos en el tiempo t .

$\sim$: índice de natalidad.

δ : índice de mortalidad.

La *Ecuación de Malthus* es un modelo matemático que permitirá hallar, en cualquier instante t , la cantidad de individuos que habrá en una población, cuando los índices de natalidad y de mortalidad son constantes. Observemos que

- 1) Si $(\tilde{m} - \tilde{n}) > 0$ entonces $P'(t) > 0$. Luego, $P(t)$ es creciente. Esto ocurre ya que $\tilde{m} > \tilde{n}$, es decir, el índice de natalidad es mayor que el de mortalidad.
- 2) Si $(\tilde{m} - \tilde{n}) < 0$ entonces $P'(t) < 0$. Luego, $P(t)$ es decreciente, debido a que $\tilde{m} < \tilde{n}$, es decir, el índice de natalidad es menor que el de mortalidad.

La *Ecuación de Malthus* da lugar al planteo de un modelo matemático más general, llamado *El Modelo Exponencial*. En este caso, la función $P(t)$ es más amplia, ya que no necesariamente representa la cantidad total de individuos existentes en una población, en el tiempo t .

Definición 1.17: El Modelo Exponencial

El Modelo Exponencial es una ecuación diferencial de la forma

$$P'(t) = k P(t)$$

donde

$P(t)$: Función derivable cuya variable independiente es el tiempo t .

k : Constante.

Básicamente, *El Modelo Exponencial* afirma que la velocidad con que varía la función $P(t)$ es directamente proporcional a $P(t)$.

La ecuación diferencial recibe este nombre porque su solución es una función exponencial, como mostraremos a continuación.

Proposición 1.18:

Dado el Modelo Exponencial

$$P'(t) = k P(t)$$

su solución es

$$P(t) = C e^{k \cdot t}$$

donde k, C son constantes.

Demostración

Para resolver esta ecuación aplicamos el Método de Separación de Variables:

$$P'(t) = k P(t) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = k \cdot P \Rightarrow \frac{dP}{P} = k dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int k dt \Rightarrow \ln|P| = k t + c_1$$

De esta última ecuación resulta

$$|P| = e^{k t + c_1} \Rightarrow |P| = e^{k t} \cdot e^{c_1} \Rightarrow P = \pm e^{c_1} \cdot e^{k t}$$

Llamando $C = \pm e^{c_1}$ resulta que $P(t) = C e^{k \cdot t}$. ■

Como mencionamos anteriormente, la Ecuación de Malthus es válida si la población tiene índices de natalidad y de mortalidad constantes. Pero tiene una falla, porque no contempla los casos de inmigración o emigración de habitantes.

Sin embargo, se puede comprobar experimentalmente que funciona bien si la población es pequeña (una población es considerada pequeña cuando lo es en comparación con la población máxima que el medio ambiente es capaz de sostener) y los períodos de tiempo son cortos. Por ejemplo, es utilizado satisfactoriamente para modelar el crecimiento de bacterias en un lapso de días. El siguiente ejemplo corroborará estas afirmaciones:

Ejemplo 1.19

La siguiente tabla muestra la población mundial en el siglo XX.

Año	Población (en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

- Utilizar el Modelo Exponencial para determinar $P(t)$, es decir la cantidad de habitantes que hay en el mundo en el año t .
- Representar gráficamente los datos de la tabla y la función $P(t)$ hallada en el inciso a. ¿Cuán bien se ajusta el modelo a los datos?

Solución

- Al utilizar el Modelo Exponencial, estamos suponiendo que los índices de natalidad y de mortalidad son constantes. Luego, para hallar $P(t)$, resolvemos la ecuación diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} P'(t) = k P(t) \\ P(0) = 1650 \end{cases}$$

Donde suponemos que el año 0 es 1900. Por la Proposición 1.18, la solución general de esta ecuación es

$$P(t) = C e^{k \cdot t}$$

Cálculo de las constantes C y k

Como

$$\begin{cases} P(0) = 1650 \\ P(10) = 1750 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{cases} C e^{k \cdot 0} = 1650 \\ C e^{k \cdot 10} = 1750 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C = 1650 \\ C e^{k \cdot 10} = 1750 \end{cases} \Rightarrow 1650 e^{k \cdot 10} = 1750 \Rightarrow e^{k \cdot 10} = \frac{1750}{1650} \Rightarrow \\ &\Rightarrow k \cdot 10 = \ln\left(\frac{1750}{1650}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{1750}{1650}\right) \Rightarrow k = 0.00588 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad total de habitantes en el tiempo t es

$$P(t) = 1650 e^{0.00588 t}$$

Observemos que, como $P'(t) = k P(t) \Rightarrow P'(t) = 0.00588 P(t)$, lo cual significa que la población mundial está creciendo alrededor del 0.6 % por año.

b) Para representar gráficamente los datos de la tabla y la función $P(t)$, utilizamos el software Wolfram Mathematica 10.0. Esto nos permitirá comparar el modelo exponencial planteado con los datos reales:

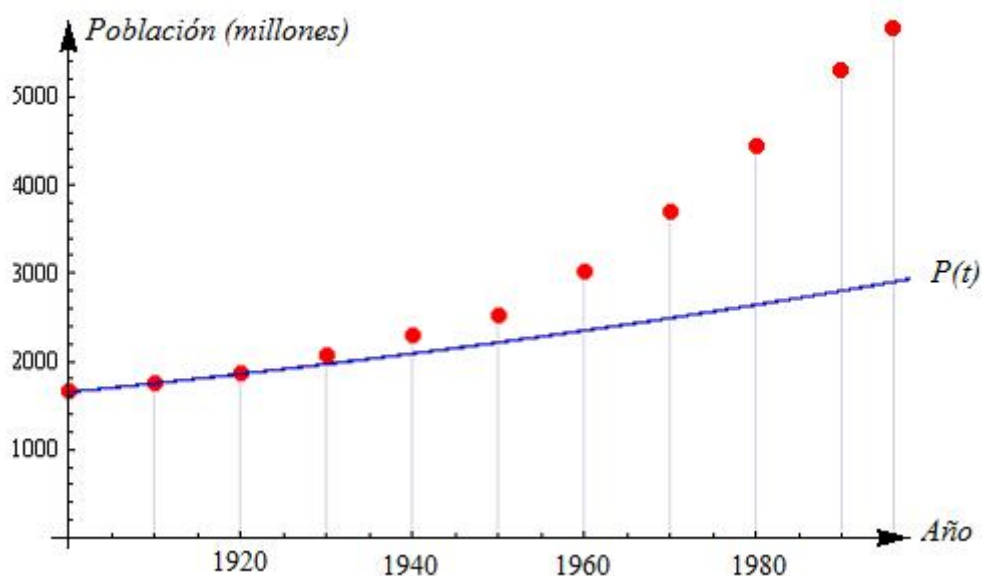


Figura 1.5: Representación gráfica de los datos de la tabla y de la función $P(t)$.

Se puede comprobar que las predicciones de este modelo se tornan muy inexactas después del año 1930. ■

Observación 1.20

El valor de k que obtuvimos en el Ejemplo anterior es estimativo, pues varía según el dato de la población que se utilice. Por ejemplo, si se emplea la población existente en 1950 en lugar de 1910, se obtiene que $k = 0.0084$. En el Ejemplo 1.24 utilizaremos una forma más precisa de hallar el valor de k .

El Modelo Logístico

Como pudimos verificar en el Ejemplo anterior, el Modelo Exponencial de Malthus no siempre se ajusta a la realidad, ya que predice un comportamiento exponencial de la población, algo que no ocurre en la realidad. Si la especie considerada dispone de todos los medios para vivir, como espacio, aire, alimento, entonces su crecimiento será de tipo exponencial. Pero puede haber una limitación de espacio o de recursos alimentarios que provocan una menor natalidad y/o mayor mortalidad (a causa de un aumento de las enfermedades y quizás también como resultado de la lucha por escasos recursos). Por esta razón se buscan otros modelos que se ajusten mejor a la realidad. La experiencia y los registros estadísticos muestran que muchas poblaciones empiezan creciendo de una manera exponencial pero luego se estabilizan cuando se acercan a su **capacidad de contención** C , que es la población máxima que el medio ambiente es capaz de sostener. Para construir un nuevo modelo que tome en cuenta esta información, estableceremos dos hipótesis:

1) Aproximación Exponencial:

Si $P(t)$ es pequeño en comparación con C , entonces $P'(t) \approx k P(t)$.

Es decir, la función $P(t)$ se comporta en forma exponencial.

2) Valor Límite:

Si $P(t) \rightarrow C$ entonces $P'(t) \rightarrow 0$.

Luego, $P(t)$ sería casi constante. Es decir, $P(t)$ tiende a estabilizarse cuando se acerca a C .

Uno de los modelos matemáticos más sencillos que incorpora estas hipótesis es El Modelo Logístico, cuya definición damos a continuación.

Definición 1.21: El Modelo Logístico

El Modelo Logístico es una ecuación diferencial de la forma

$$P'(t) = k P(t) \left(\frac{C - P(t)}{C} \right)$$

donde

$P(t)$: Función derivable cuya variable independiente es el tiempo t .

k : Constante.

C : Constante, llamada “capacidad de contención”. Es el máximo valor que puede tomar $P(t)$.

Este modelo matemático fue introducido por el biólogo y matemático belga Pierre Francois Verhulst en 1838.

Básicamente, afirma que la velocidad con que varía la función $P(t)$ es proporcional tanto a $P(t)$ como a la cantidad faltante para llegar a su máximo valor C .

Veamos que efectivamente El Modelo Logístico verifica las dos hipótesis mencionadas:

1) **Aproximación Exponencial:**

Si $P(t)$ es pequeño en comparación con C entonces

$$\frac{C - P(t)}{C} \cong \frac{C}{C} = 1$$

Por lo tanto, al reemplazar esta expresión en el Modelo Logístico resulta:

$$P'(t) = k P(t) \left(\frac{C - P(t)}{C} \right) \approx k P(t) . 1$$

Es decir, $P'(t) \approx k P(t)$

2) **Valor Límite:**

Si $P(t) \rightarrow C$ entonces

$$\frac{C - P(t)}{C} \rightarrow \frac{0}{C} = 0$$

Sustituyendo este límite en la Ecuación Logística tenemos:

$$P'(t) = k P(t) \left(\frac{C - P(t)}{C} \right) \rightarrow k P(t) . 0 = 0$$

Luego, $P'(t) \rightarrow 0$.

Ejemplo 1.22

En el desarrollo de un embrión, el óvulo fecundado comienza a dividirse y el número de células comienza a crecer en forma exponencial: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. Pero el feto sólo puede crecer hasta un tamaño que el útero pueda soportar. Así, otros factores comienzan a disminuir el incremento del número de células. En este caso, $P(t)$ es el número de células que tiene un feto en el tiempo t , mientras que C es la cantidad total de células que puede albergar el útero. De este modo, el Modelo Logístico se adapta al estudio del crecimiento embrionario. ■

En la siguiente Proposición mostraremos la solución del Modelo Logístico:

Proposición 1.23:

Dado el Modelo Logístico

$$P'(t) = k P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{C} \right)$$

con condición inicial

$$P(0) = P_0 ,$$

su solución es

$$P(t) = \frac{C}{1 + \left(\frac{C - P_0}{P_0} \right) e^{-k.t}}$$

Demostración

Para hallar la solución de la ecuación, aplicaremos el Método de Separación de Variables:

$$P'(t) = k P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{C}\right) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = k P \left(1 - \frac{P}{C}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{C}\right)} = k dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{C}\right)} = \int k dt$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{C}\right)} = k \cdot t + C_1 \quad [1.5]$$

La integral del primer miembro la resolvemos mediante el método de Fracciones Simples:

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{C}\right)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\left(1 - \frac{P}{C}\right)} \Rightarrow 1 = A \left(1 - \frac{P}{C}\right) + B \cdot P \Rightarrow A + \left(B - \frac{A}{C}\right) \cdot P = 1$$

Entonces

$$\begin{cases} A=1 \\ B - \frac{A}{C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B = \frac{1}{C} \end{cases}$$

Luego

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{C}\right)} = \int \left[\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{C}}{\left(1 - \frac{P}{C}\right)} \right] dP = \ln|P| + \frac{1}{C} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{C}\right)} dP = \ln|P| - \ln \left| \frac{C-P}{C} \right|$$

Como $0 \leq P(t) \leq C$ entonces $|P| = P \wedge |C-P| = C-P$. En consecuencia

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{C}\right)} = \ln(P) - \ln\left(\frac{C-P}{C}\right) = \ln\left(\frac{C \cdot P}{C-P}\right)$$

Es decir

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{C}\right)} = \ln\left(\frac{C \cdot P}{C-P}\right) \quad [1.6]$$

Sustituyendo [1.6] en [1.5] se obtiene

$$\ln\left(\frac{C \cdot P}{C-P}\right) = k \cdot t + C_1 \Rightarrow \frac{C \cdot P}{C-P} = e^{k \cdot t + C_1} \Rightarrow \frac{P}{C-P} = e^{k \cdot t} \cdot \frac{e^{C_1}}{C}$$

Llamando $C_2 = \frac{e^{C_1}}{C}$ tenemos

$$\frac{P}{C-P} = C_2 e^{k \cdot t}$$

Al despejar P de esta ecuación se obtiene

$$P(t) = \frac{C}{1 + \frac{1}{C_2} e^{-k \cdot t}} \quad [1.7]$$

Cálculo de C_2

Como

$$P(0) = P_0 \Rightarrow \frac{C}{1 + \frac{1}{C_2} e^{-k \cdot 0}} = P_0 \Rightarrow \frac{C}{1 + \frac{1}{C_2}} = P_0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{C_2} = \frac{C}{P_0} \Rightarrow \frac{1}{C_2} = \frac{C}{P_0} - 1$$

entonces

$$\frac{1}{C_2} = \frac{C - P_0}{P_0} \quad [1.8]$$

Finalmente, reemplazando [1.8] en [1.7] se tiene

$$P(t) = \frac{C}{1 + \left(\frac{C - P_0}{P_0} \right) e^{-k \cdot t}} \quad \blacksquare$$

La función solución del Modelo Logístico recibe el nombre de “*función logística*”. Su gráfica recibe el nombre de “*curva logística*” o “*curva en forma de s*”, como veremos en el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 1.24

En la década de 1930, el biólogo G.F. Gause realizó un experimento con el protozoario paramecio. En la siguiente tabla se muestra $P(t)$, la cantidad diaria de paramecios:

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$P(t)$	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

- Ubicar los datos en una gráfica y utilizarla para estimar la Capacidad de Contención C de la población de paramecios.
- Encontrar un modelo logístico para estos datos.
- Encontrar un modelo exponencial para estos datos.

d) Representar gráficamente los Modelos Logístico y Exponencial y compararlos con los datos de la tabla. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?

Solución

a) Para representar gráficamente los datos de la tabla, recurrimos al software Wolfram Mathematica 10.0, con lo cual obtenemos:

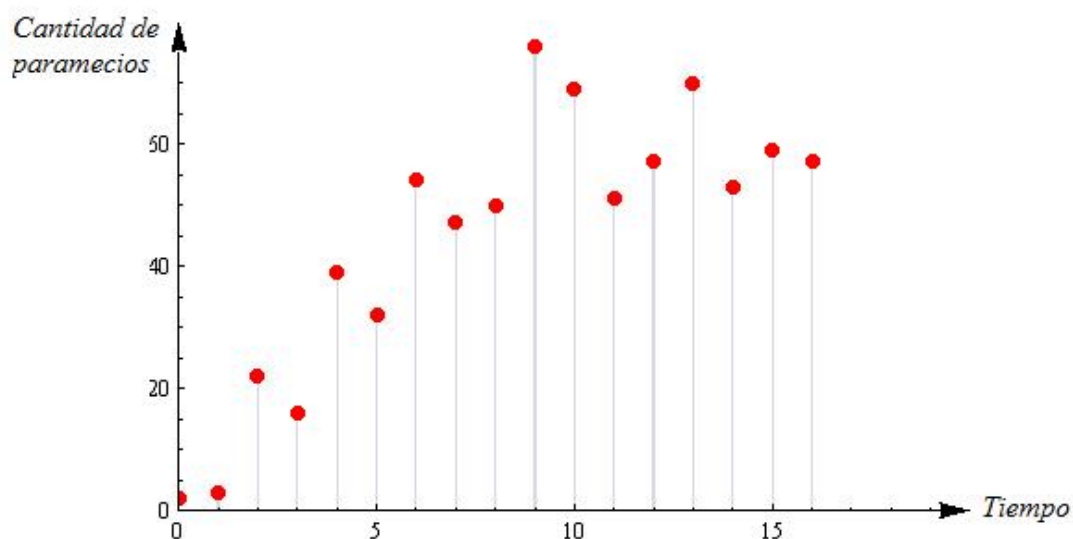


Figura 1.6: Representación gráfica de los datos de la tabla.

Observamos que a medida que transcurre el tiempo, la población tiende a estabilizarse hacia un valor comprendido entre 60 y 70. Por lo tanto, es razonable elegir la Capacidad de Contención como el promedio de estos valores, Es decir, tomaremos $C = 65$.

b) Para hallar el Modelo Logístico resolvemos la ecuación diferencial logística con condición inicial

$$\begin{cases} P'(t) = k P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{65} \right) \\ P(0) = 2 \end{cases}$$

Por la Proposición 1.23, la solución es

$$P(t) = \frac{C}{1 + \left(\frac{C - P_0}{P_0} \right) e^{-k \cdot t}}$$

es decir,

$$P(t) = \frac{65}{1 + 31.5 e^{-k \cdot t}}$$

Para estimar el valor de k , partimos de la ecuación diferencial

$$P'(t) = k P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{65} \right)$$

de donde

$$k = \frac{P'(t)}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{65}\right)}$$

Entonces, calculamos $k = \frac{P'(t)}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{65}\right)}$ para $t = 0, 1, \dots, 16$ y luego hallamos el promedio de estos valores. Más precisamente,

$$k \cong \frac{\sum_{t=0}^{16} \frac{P'(t)}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{65}\right)}}{17}$$

Para calcular $P'(t)$, $t = 0, 1, \dots, 16$ procedemos de la misma manera que en el Ejemplo 1.13, inciso b, cuando aplicamos el Segundo Método. Es decir,

$$\begin{cases} P'(t) \cong \frac{P(t+h) - P(t)}{h} & \text{con } t = 0, 1, \dots, 15 \wedge h = 1 \\ P'(16) \cong \frac{P(16+h) - P(16)}{h} & \text{con } h = -1 \end{cases}$$

De este modo, el resultado obtenido es

$$k \cong 0.634$$

Por lo tanto, el Modelo Logístico de la población de paramecios es

$$P(t) = \frac{65}{1 + 31.5 e^{-0.634.t}}$$

c) Para el Modelo Exponencial resolvemos la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} P'(t) = k P(t) \\ P(0) = 2 \end{cases}$$

y se obtiene la solución

$$P(t) = 2 e^{k.t}$$

Nuevamente, para estimar el valor de k (que no necesariamente es el mismo valor de k de la ecuación logística) partimos de la ecuación diferencial

$$P'(t) = k P(t)$$

de donde

$$k = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

Entonces, calculamos $k = \frac{P'(t)}{P(t)}$ para $t = 0, 1, \dots, 16$ y luego hallamos el promedio de estos valores. Es decir,

$$k \cong \frac{\sum_{t=0}^{16} \frac{P'(t)}{P(t)}}{17}$$

El cálculo aproximado de $P'(t)$, $t = 0, 1, \dots, 16$ es igual al del inciso anterior. Así, obtenemos

$$k \cong 0.607$$

Por lo tanto, el Modelo Exponencial de la población de paramecios es

$$P(t) = 2 e^{0.607 t}$$

d) Recurrimos al software Wolfram Mathematica 10.0 para graficar la curva logística y los datos de la tabla:

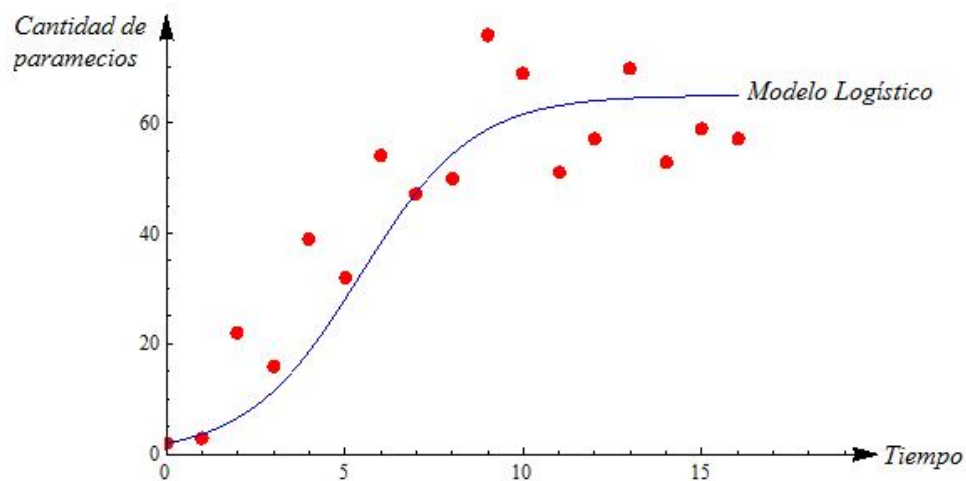


Figura 1.7: Representación gráfica de los datos de la tabla y del Modelo Logístico.

Observamos la forma de s que tiene la gráfica de la función solución. Por otro lado, la gráfica del Modelo Exponencial es:

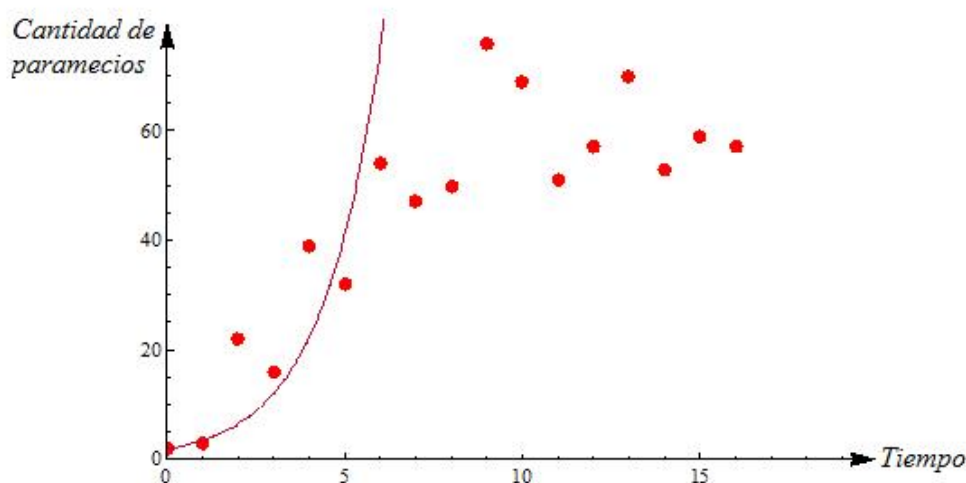


Figura 1.8: Representación gráfica de los datos de la tabla y del Modelo Exponencial.

Advertimos claramente que el Modelo Exponencial es bastante inexacto, en tanto que el Modelo Logístico se ajusta en forma razonable a las observaciones.

Cabe destacar que el biólogo Gause estimó la capacidad de contención C como 64 y el valor de k , tanto para el Modelo Logístico como para el Modelo Exponencial, como 0.7944. Bastante similar a lo que obtuvimos. ■

Capítulo 2

Modelado de un Circuito Eléctrico

En este capítulo desarrollamos una serie de conceptos, definiciones y propiedades pertenecientes al campo de la Física, más precisamente a la *Electricidad*. Nuestro propósito será adentrarnos en la modelación de un circuito eléctrico, que será fundamental para construir el modelo matemático que describe el funcionamiento de un marcapasos.

2.1 Introducción

En la actualidad, nuestra vida diaria depende extraordinariamente de la “electricidad”, que es aquello que *circula* por nuestras instalaciones, para producir los efectos luminosos en las lámparas y permitir el funcionamiento de nuestros dispositivos eléctricos.

No obstante, hace poco más de un siglo, sólo se disponía de alguna lámpara eléctrica. Si bien el comienzo del uso de la electricidad es relativamente reciente, su estudio tiene origen en la Antigüedad, más precisamente alrededor del año 600 A.C., en la Antigua Grecia.

Los griegos observaron que al frotar un trozo de *ámbar* (un plástico natural), éste atraía pequeños cuerpos livianos, como pajitas o plumas. De hecho, la palabra *electricidad* proviene del griego *elektron*, que significa “ámbar”.

Pero evidenciaríamos los mismos resultados si sustituyéramos el ámbar por el plástico común o el vidrio, y los mencionados cuerpos livianos por otros pequeños, constituidos por caucho o telgopor.

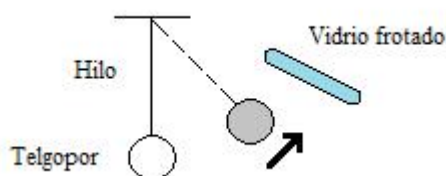


Figura 2.1: Atracción ejercida por una varilla de vidrio frotada.

Experimentos sencillos de este tipo nos muestran que algunos de estos cuerpos frotados *se atraen* entre sí, mientras que otros *se repelen*, como veremos a continuación.

Pero, ¿qué es lo que en realidad ocurre cuando estos objetos son frotados? Para responder a esta pregunta, necesitamos introducir el concepto fundamental de **carga eléctrica**.

2.2 Carga eléctrica

Los experimentos mencionados en el punto anterior muestran los siguientes resultados: Frotando una varilla de vidrio suspendida de un hilo, para luego acercarle una segunda varilla de vidrio frotada, observaremos que éstas se repelen, como lo muestra la siguiente Figura.

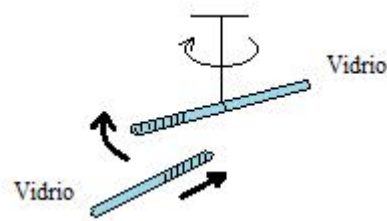


Figura 2.2: Dos varillas de vidrio frotadas se repelen.

Ahora bien, una regla de plástico frotada atrae a la varilla de vidrio, esté esta última frotada o no.

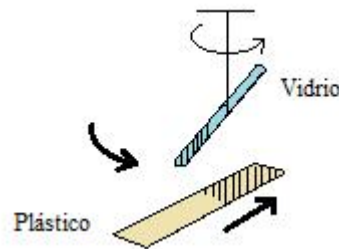


Figura 2.3: El plástico frotado atrae al vidrio.

Por otra parte, si tomamos dos reglas de plástico frotadas, observaremos que éstas también se repelen, como lo muestra la Figura.

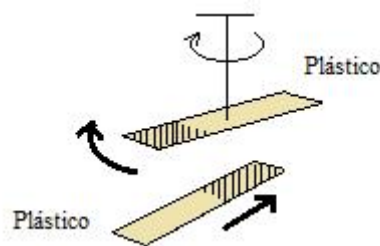


Figura 2.4: Dos reglas plásticas frotadas se repelen.

Finalmente, podemos comprobar con facilidad que, en ausencia de frotamiento, no se produce atracción o repulsión alguna en ninguna de las tres experiencias anteriores.

A lo largo del estudio de la Electricidad, se ha experimentado con todos los materiales disponibles, y se han probado todas las combinaciones posibles, además de vidrio – plástico, obteniéndose en cada caso los mismos resultados. Estos fenómenos producidos al frotar un cuerpo reciben el nombre de “*fenómenos electrostáticos*”.

Podemos concluir entonces que determinados cuerpos frotados adquieren una *propiedad* que antes no tenían: la de atraer o bien repeler a otros cuerpos.

De esta conclusión surge la siguiente definición, fundamental en el estudio de la Electricidad.

Definición 2.1: Carga Eléctrica

Carga Eléctrica es la capacidad que adquiere un cuerpo de atraer o repeler a otro.

Diremos que, en tal caso, dicho cuerpo queda **cargado eléctricamente**, o simplemente, *cargado*. En base a los experimentos mencionados anteriormente, deducimos que existen dos clases de carga y que éstas pueden atraerse o repelerse. Esto da lugar a la siguiente Definición.

Definición 2.2: Tipos de Carga

Existen dos tipos de carga: la “vítrea” y la “resinosa”, comúnmente llamadas “positiva” y “negativa” respectivamente. Cargas del mismo tipo o “del mismo signo” se repelen, mientras que cargas de distinto tipo o “de distinto signo” se atraen.

Podemos concluir entonces que un cuerpo puede estar cargado o no. En el primer caso, el cuerpo estará *cargado positivamente o negativamente*, mientras que, si no está cargado, no atrae ni repele a ningún otro cuerpo que se encuentre en la misma condición, por lo que solemos decir que se encuentra *en estado neutro o que es eléctricamente neutro*.

Con el fin de contar con una base teórica que explique los hechos experimentales mencionados y que justifique las conclusiones obtenidas, necesitamos un *modelo elemental de estructura de la materia* desde sus componentes básicos, como veremos a continuación.

2.3 El Átomo

Definición 2.3: Átomo

El Átomo es la unidad más pequeña de materia.

Su nombre proviene de la unión de dos vocablos griegos: *a*, que significa *sin*, y *tomos*, que significa *sección*. Literalmente significa “*que no se puede cortar, indivisible*” y fue el nombre que se dio Demócrito de Abdera (460 a.C.- 370 a.C.) a las partículas que él concebía como las de menor tamaño posible. Los átomos son microscópicos; los tamaños típicos son alrededor de la diez mil millonésima parte de un metro.

Principales elementos que componen un átomo

Las largas décadas de investigaciones y experiencias de laboratorio permitieron elaborar, en 1913, una hipótesis acerca de los elementos que componen un átomo, llamada la Teoría o Modelo Atómico de Bhor. Si bien este Modelo ha sido corregido por la Física Cuántica Moderna, nos referiremos a él para facilitar la explicación de este tema. Esta teoría sugiere que un átomo, *en estado natural*, está compuesto por tres clases de **partículas** llamadas **elementales: los protones y los neutrones**, que constituyen el **núcleo** del átomo, y **los electrones**, que se encuentran alrededor de este núcleo y **en igual número que los protones**.

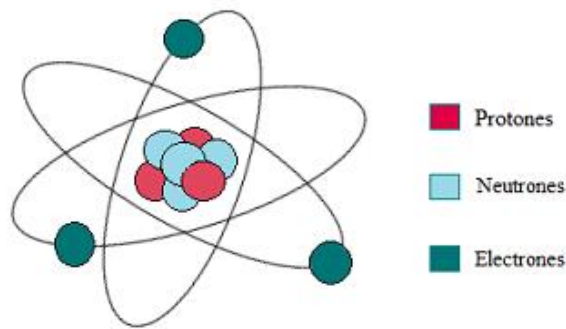


Figura 2.5: Estructura elemental de un átomo.

El núcleo constituye un centro pequeño y denso, de dimensiones del orden de los 5×10^{-15} metros, mientras que los electrones se despliegan hasta distancias que rondan el orden de los 2×10^{-10} metros. Esto significa que, si un átomo tuviera un diámetro de 3 kilómetros, su núcleo sería aproximadamente del tamaño de una pelota de tenis.

Los electrones giran alrededor del núcleo, describiendo órbitas. Lo hacen de manera similar a los planetas, que giran alrededor del Sol.

Los electrones que se encuentran más lejos del núcleo reciben el nombre de *electrones superficiales*, y se dice que están débilmente ligados con el átomo, ya que pueden separarse temporalmente de él. Cuando esto sucede, los *electrones superficiales* se convierten en *electrones libres*. Este fenómeno puede producirse cuando se entrega energía al electrón, por ejemplo, a través del calor.

Esta forma estructural del átomo ha conducido a los investigadores a elaborar las siguientes conclusiones:

- 1) El átomo, en su estado natural, es una partícula en estado neutro.
- 2) Los electrones de un átomo son atraídos por los protones por *la fuerza electromagnética*. Los protones y los neutrones en el núcleo son atraídos el uno al otro por una fuerza diferente, *la fuerza nuclear*, que es generalmente más fuerte que la *fuerza electromagnética*, por la cual los protones se repelen entre sí.
- 3) La carga de los electrones debe ser de distinto tipo que la de los protones, mientras que los neutrones carecen de carga.
- 4) Por convención, los **protones** tienen **carga positiva** y los **electrones** **carga negativa**.
- 5) Los electrones libres no están ligados a ningún átomo en particular, y recorren el espacio libre en torno a un átomo.
- 6) En un átomo neutro, el número de electrones es igual al de protones.

Representación gráfica de los electrones y de las cargas positivas

Gráficamente, representaremos al electrón mediante un pequeño círculo con un signo “menos” en su interior, haciendo alusión a su carga negativa: $\ominus$. En cuanto a las cargas positivas, gráficamente las representaremos por el signo $+$.

Finalmente, en base a este modelo simple de estructura de la materia y a las conclusiones derivadas, podemos mencionar a continuación cómo se pudo explicar lo

que durante siglos desveló a los científicos griegos: el por qué ciertos cuerpos, al ser frotados, atraen o repelen a otros.

2.4 Explicación de los fenómenos electrostáticos

Una vez descubiertos los elementos básicos que componen un átomo, se lograron elaborar las siguientes conclusiones:

1) En algunas sustancias, como el vidrio, es posible “arrancar”, por frotamiento, algunos *electrones* superficiales, quedando, entonces, el cuerpo *positivamente cargado*.

La conclusión anterior explica por qué se repelen dos varillas de vidrio frotadas, pues cargas del mismo signo se repelen.

2) Otras sustancias, como los plásticos, tienden a *captar electrones* del material que los frotó, quedando así con exceso de electrones, y, por lo tanto, *cargados negativamente*.

Es lo que explica la repulsión entre las dos reglas plásticas frotadas, ya que las cargas negativas se repelen entre sí.

3) Puesto que las cargas positivas y negativas se atraen, evidenciamos la *atracción electrostática* entre el exceso de *cargas positivas* en la varilla de vidrio frotada y el exceso de *electrones* en la regla plástica frotada.

4) Cuando en un cuerpo, el número total de protones es igual al de electrones, la *carga eléctrica total* es *cero* y el cuerpo, en su conjunto, es eléctricamente neutro.

Y explicamos así que, en ausencia de frotamiento, no se experimenta atracción ni repulsión. Es así, pues, cómo nuestro modelo atómico fundamenta los fenómenos electrostáticos.

2.5 Medición de la carga eléctrica

En los experimentos podríamos observar que la carga eléctrica que adquiere un cuerpo es susceptible de aumentar o disminuir, es decir, es una *magnitud*. Por ende, es *medible*, lo que nos conduce a adoptar una determinada unidad de medida.

Vimos que la carga eléctrica de un cuerpo es consecuencia de un exceso (carga negativa) o defecto de electrones (carga positiva). Esto nos da lugar a introducir la siguiente:

Definición 2.4: Cantidad de carga eléctrica

La cantidad de carga eléctrica, simbolizada por Q , es el número de electrones que el cuerpo pierde o gana. Según la convención adoptada para los signos, resulta:

1) Si $Q > 0$ significa que el cuerpo está cargado positivamente, es decir, *perdió electrones*.

2) Si $Q < 0$ significa que el cuerpo está cargado negativamente, es decir, *ganó electrones*.

3) Si $Q = 0$ significa que el cuerpo está en estado neutro, es decir, *no perdió ni ganó electrones*.

Esta manera de expresar el valor de la carga no resulta práctica, pues se sabe que en un proceso común de electrización (por ejemplo, por frotamiento) el cuerpo pierde o gana un número muy elevado de electrones. De este modo, el valor de Q quedaría expresado en términos de números sumamente grandes.

En la práctica se procura entonces emplear una unidad de carga más adecuada. En el Sistema Internacional (SI) se adopta la siguiente unidad de carga eléctrica:

Definición 2.5: El Coulomb

Un Coulomb, simbolizado con la letra C , es una unidad de medida de carga eléctrica.

Representa 6.25×10^{18} electrones. Es decir,

$$1\ C = 6.25 \times 10^{18}\ \text{electrones}$$

De ahora en más, cuando hablemos de *carga eléctrica de un cuerpo* nos referiremos a la cantidad de electrones que ganó o perdió dicho cuerpo. Así, cuando decimos que un cuerpo posee una carga $Q = 1C$, significa que perdió 6.25×10^{18} electrones, con lo cual quedó cargado positivamente.

Ejemplo 2.6

Si la carga eléctrica del cuerpo A es $Q = -6.4 \times 10^{-19} C$, calcular el número de electrones en exceso.

Solución

Como $Q < 0$ entonces el cuerpo A ganó electrones. La cantidad de electrones ganados es $6.4 \times 10^{-19} C = 6.4 \times 10^{-19} \times 6.25 \times 10^{18}\ \text{electrones} = 4\ \text{electrones}$.

Es decir, la carga del cuerpo A consiste de 4 electrones en exceso. ■

2.6 Aislantes y conductores

En algunos materiales, como el plástico, podemos comprobar que, al frotar un cuerpo de dicho material en un extremo, las cargas eléctricas quedan localizadas en el extremo frotado. Este comportamiento caracteriza a los *materiales aislantes* como el vidrio, el caucho, el plástico, etc.

Por su parte, si frotamos una barra de aluminio, sujeta a un mango de vidrio o de otro material aislante, comprobaríamos que toda la barra queda cargada. Esto se debe a que *las cargas eléctricas fluyen distribuyéndose por todo el cuerpo*, independientemente del lugar donde fue frotado. Este fenómeno caracteriza a los *materiales conductores* como el cobre, el hierro, el aluminio, y, en general, la mayoría de los metales.

En un conductor, cada átomo tiene uno o más electrones que no permanecen ligados al núcleo, constituyendo *electrones libres* que se desplazan al azar de un átomo a otro, a través de toda la estructura del material. En virtud de lo expresado, podemos concluir que: *En un conductor, siempre tiene lugar un desplazamiento desordenado de electrones.*

Convención 2.7

Debido a que sólo analizaremos y consideraremos el *desplazamiento de electrones a través de un conductor*, al referirnos a cantidades de carga utilizaremos el valor absoluto de las mismas, dando por sobreentendido que se trata, en realidad, de cantidades negativas.

Así, diremos, por ejemplo, que se desplaza una carga de 4 C , en lugar de -4 C .

2.7 Inducción. Generador de fuerza electromotriz

Un dispositivo indispensable en los circuitos que analizaremos, es el que definiremos en esta sección. Pero previamente presentaremos los siguientes conceptos.

Definición 2.8: Sección normal de un conductor

La *sección normal de un conductor*, o simplemente “*sección de un conductor*”, es cualquier intersección del mismo con un plano perpendicular a él, en un punto interior a su extensión longitudinal.

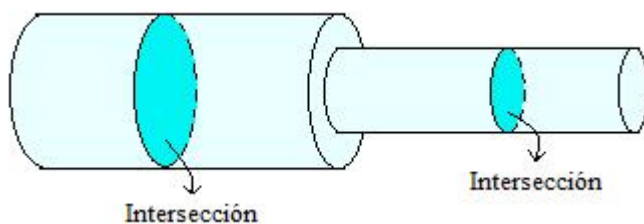


Figura 2.6: La sección de un conductor está representada por cualquier intersección de éste con un plano perpendicular.

Decimos que un conductor tiene *sección constante* cuando todas sus intersecciones con planos perpendiculares son congruentes, es decir, tienen la misma forma y área.



Figura 2.7: Un conductor de sección constante.

Definición 2.10: Hilo conductor

Un *hilo conductor* es un conductor cuya sección es constante y de área despreciable en relación a su longitud.



Figura 2.8: Dos cuerpos A y B unidos a través de un hilo conductor C.

Definición 2.11: Inducción Electrostática

La Inducción Electrostática es el fenómeno por el cual, en un conductor (cargado o en estado neutro), se produce un desplazamiento ordenado de electrones libres y, por ende, una distribución heterogénea de cargas, debido a la presencia de un cuerpo cargado, llamado inductor, que se encuentra en las proximidades del primero.

Ejemplo 2.12

Si a un conductor metálico le acercamos el extremo frotado de una regla plástica, es decir, un cuerpo con exceso de electrones, entonces los electrones libres del metal se desplazarán a través de éste, alejándose de las cargas negativas del inductor por repulsión electrostática.

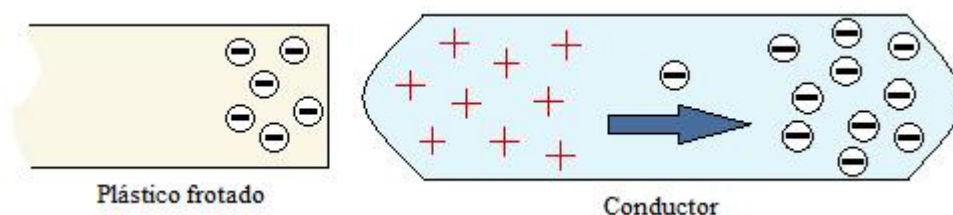


Figura 2.9: Por inducción electrostática, los electrones libres se desplazan hacia el extremo más alejado del inductor. ■

Observación 2.13

1) Comprobaríamos experimentalmente que, si el extremo hacia el cual se desplazaron los electrones, se pone *en contacto* con un segundo cuerpo conductor, *los electrones libres* que vienen desplazándose *pasan del primer conductor a este segundo*, sosteniéndose de esta manera el desplazamiento existente.

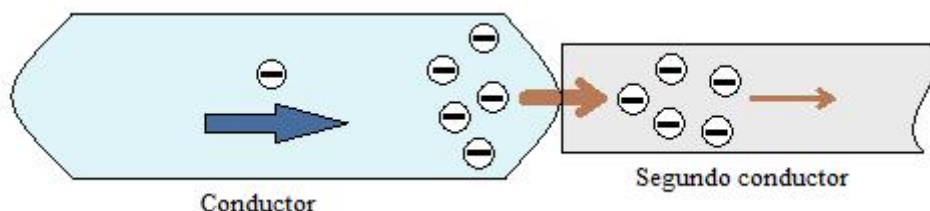


Figura 2.10: En su desplazamiento, los electrones libres son transferidos a un segundo conductor puesto en contacto con el primero, para así proseguir con su trayecto.

2) Así mismo, podríamos comprobar que, al alejar el cuerpo inductor del conductor inicial, los electrones que habían sido desplazados experimentan ahora, *durante cierto lapso de tiempo*, un desplazamiento *en sentido opuesto* al que tuvo lugar durante la inducción, hasta restituir por completo la distribución de cargas que tenía inicialmente el conductor.

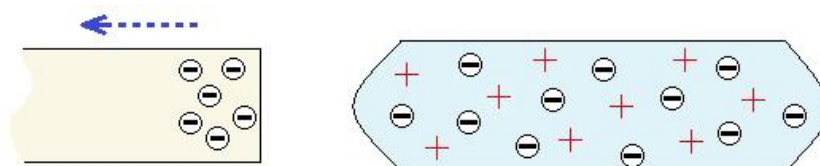


Figura 2.11: En referencia al ejemplo anterior, se ha restituido la distribución inicial de cargas en el conductor.

En base a esta última observación, definimos el estado final del conductor de la siguiente manera.

Definición 2.14: Equilibrio electrostático de un conductor

El Equilibrio electrostático de un conductor (cargado o en estado neutro) es el estado en el cual no existe movimiento ordenado de cargas eléctricas.

A continuación, definiremos de manera elemental un concepto inherente a todos los sistemas físicos: la Energía.

Definición 2.15: Energía

Energía es la capacidad que hace que un cuerpo se desplace.

El símbolo y la unidad correspondientes a la Energía son, respectivamente,

$$E = \text{Energía}, [E] = \text{Joule} = J$$

En un conductor, se cumple que, cuanto *mayor sea la energía*, mayor será la cantidad de electrones desplazados por unidad de tiempo.

Definición 2.16: Voltaje entre dos puntos de un conductor

*Dado un dispositivo capaz de suministrar energía, el **voltaje entre dos puntos A y B de un conductor** es la cantidad de energía suministrada por el dispositivo a dicho conductor, para desplazar 1 Coulomb desde A hasta B.*

La notación correspondiente es

$$V_{AB} = \text{Voltaje entre los puntos A y B.}$$

La unidad utilizada es

$$[V_{AB}] = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{Volt} = V$$

Esto significa que entre dos puntos de un conductor, uno inicial y uno final, el voltaje es de 1 Volt cuando le es transferido 1 Joule de energía para desplazar 1 Coulomb $= 6.25 \times 10^{18}$ electrones desde el punto inicial hasta el punto final.

Ejemplo 2.17

Si A y B son dos puntos de una varilla metálica, y un dispositivo le suministra 5 J por cada carga de 1 C desplazada desde A hasta B, entonces $V_{AB} = 5 V$.

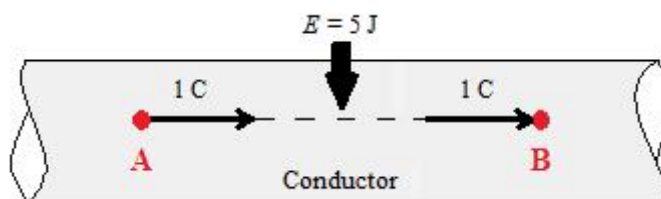


Figura 2.12: Ejemplo 2.17.

Cómo funciona un generador de fuerza electromotriz

Exponemos, ahora, *un modelo de funcionamiento de un generador de fuerza electromotriz*, concepto que veremos en breve.

La figura que sigue muestra dos conductores *A* y *B*. Inicialmente están cargados, el conductor *A* negativamente, y el conductor *B*, positivamente. Si los conectamos mediante un hilo conductor, el nuevo sistema se comporta, *en un instante, como si fuera un único conductor, en el cual ha tenido lugar una separación de cargas por desplazamiento de electrones*, es decir, como si todos o parte de los electrones que, ahora, tiene en exceso el cuerpo *A*, provengan de haberse alejado de un inductor cargado negativamente y puesto en las proximidades del cuerpo *B*. Al no existir, en realidad, cuerpo inductor, entonces, según la Observación 2.13, *toda o parte de la carga negativa de A, al estar constituida por electrones libres, se desplaza a través del hilo hasta B, durante un cierto tiempo*, hasta que el nuevo sistema alcance el equilibrio electrostático.

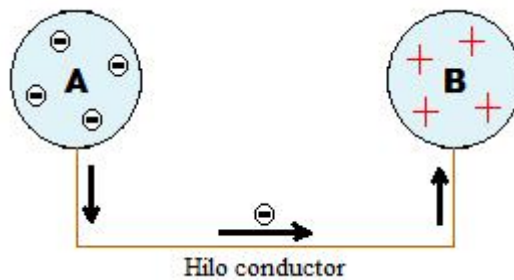


Figura 2.13: Durante un corto tiempo, electrones en exceso de A se desplazan por el hilo hasta llegar a B.

Si deseáramos mantener la circulación de electrones a través del hilo conductor, deberíamos reponer permanentemente los electrones que salen de *A* y, simultáneamente, eliminar los que llegan al conductor *B*, de modo que, en el sistema formado por ambos conductores y el hilo, se sostenga la separación de cargas inicial.

Un *generador* es, básicamente, un conductor capaz de suministrar una cantidad constante de energía, y por ende, de sostener un voltaje $V_{A'B'}$ entre sus extremos, voltaje que es responsable de que una determinada cantidad de electrones se desplace, por unidad de tiempo, de uno de sus extremos hasta el otro, siempre en el mismo sentido, como mostramos en la Figura 2.14.

Al introducir tal dispositivo en el sistema anterior, los electrones que llegan a *B* pasan, de acuerdo con la Observación 2.13, al extremo *A'* del generador, eliminándose de esta manera las cargas que llegan a *B*. Ya en *A'*, son desplazados hacia el otro extremo del generador, *B'*, en virtud de la misma Observación y por ser, el generador, un conductor. Seguidamente, estos electrones pasan del extremo *B'* al conductor *A*, conforme a dicha observación, con lo cual, son repuestas las cargas negativas en *A*, y que, por mantenerse de esta manera la separación de cargas, comienzan a circular nuevamente por el hilo, repitiéndose así el ciclo y sosteniéndose la circulación de electrones.

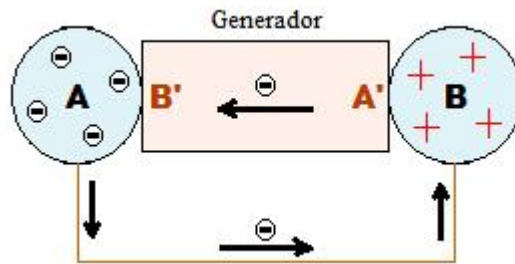


Figura 2.14: En presencia de un generador, se sostiene la circulación de cargas a través del hilo conductor.

Observación 2.18

La cantidad de voltaje $V_{A'B'}$ proporcionado por el generador determina, como ya dijimos, la cantidad de cargas que desplazadas por unidad de tiempo, desde A' hasta B' , vale decir, de acuerdo al modelo que acabamos de exponer, desde A hasta B a través del hilo conductor, razón por la que decimos que el voltaje entre los extremos del hilo es igual al voltaje entre los extremos del generador al que se encuentra conectado, es decir $V_{AB} = V_{A'B'}$.

Podemos, finalmente, definir a un generador de fuerza electromotriz, de la siguiente manera.

Definición 2.19: Generador de fuerza electromotriz

Un generador de fuerza electromotriz *fem* (*electromotriz* = movimiento de carga eléctrica), o batería, es un dispositivo que, conectado a un hilo conductor, es capaz de generar y sostener una circulación de electrones a través de éste, y en un único sentido.

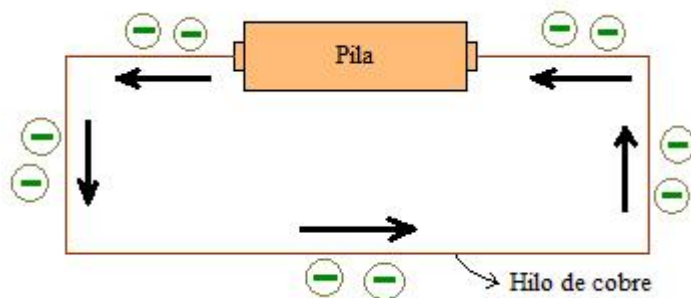


Figura 2.15: Una pila es un generador de *fem*, pues, conectada a los extremos de un hilo de cobre, hace circular electrones a través de él.

Pasamos, ahora, a analizar la circulación de electrones producida por un generador.

2.8 Corriente eléctrica

Uno de los conceptos físicos fundamentales para nuestro trabajo, y que es consecuencia inmediata de lo expuesto en el punto anterior, es el de *corriente eléctrica*.

Definición 2.20: Corriente eléctrica

La corriente eléctrica, o simplemente “corriente”, es el movimiento ordenado de electrones a través de uno o más conductores, como consecuencia del efecto de un agente inductor o bien de un generador.

Como vimos, un conductor metálico tiene electrones libres en movimiento desordenado, a través de la estructura del material. Como consecuencia de este movimiento, pasan tantos electrones en un sentido como en el otro, a través de la sección. Si conectamos el conductor a un generador, se produce el desplazamiento, en un único sentido, de sólo una *parte de los electrones libres*, pues el movimiento no deja de ser desordenado, aunque ahora, pasan más electrones en este sentido que en el opuesto.

Convención 2.21

El fenómeno de la corriente eléctrica se analiza *suponiendo que la totalidad de los electrones libres constituye dicha corriente*, desplazándose con velocidad constante y en un único sentido, a través de la sección del conductor.

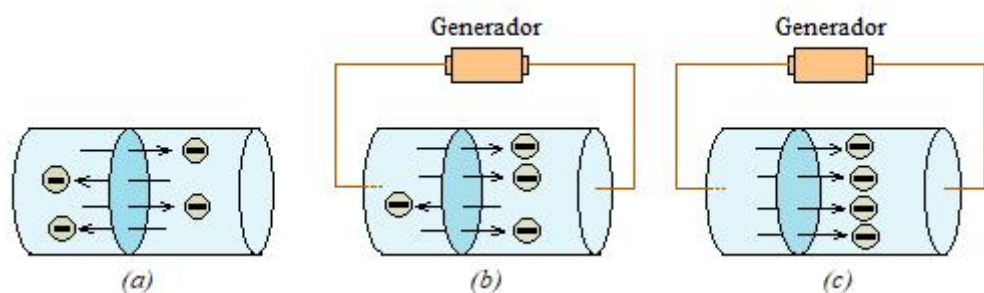


Figura 2.16: Movimiento de electrones libres de un conductor.

(a) Sin conexión. (b) Con conexión a un generador.
(c) Comportamiento idealizado, según la Convención 2.21

Continuamos, ahora, con las definiciones relativas al concepto que acabamos de ver.

Definición 2.22: Carga eléctrica hasta el instante t

La carga eléctrica hasta el instante t , es la cantidad total de electrones de una corriente que han atravesado la sección del conductor, desde un instante inicial $t_0 = 0$ hasta dicho instante t .

El símbolo para esta magnitud es

$$Q(t) = \text{Carga eléctrica hasta el instante } t.$$

Mientras que, naturalmente, la unidad es

$$[Q(t)] = \text{Coulomb} = C$$

En general, al referirnos a una igualdad que relaciona el símbolo de la magnitud *tiempo* con la cantidad seguida de la unidad correspondiente, omitiremos la escritura de esta última. Por ejemplo, escribiremos $t = 6$ en lugar de $t = 6 \text{ seg}$.

Ejemplo 2.23

Suponiendo que un conductor comienza a analizarse al ser conectado a un generador, y determinándose luego que después de 11 segundos ha pasado, por su sección, una carga total de $1.28 \times 10^{-15} C$, entonces

$$Q(0) = 0 C \text{ y } Q(11) = 1.28 \times 10^{-15} C$$

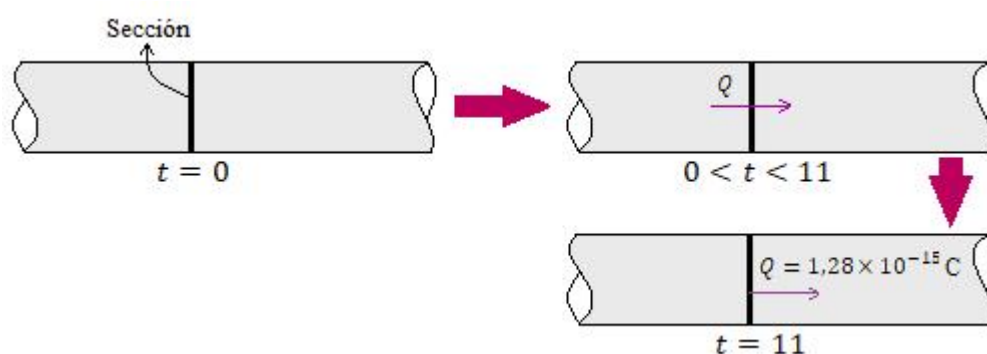


Figura 2.17: Ejemplo 2.23. ■

Ejemplo 2.24

En base al Ejemplo anterior, calcular la carga que atravesó la sección entre los instantes $t = 11$ y $t = 18$, sabiendo que la carga eléctrica hasta este último instante es $2.24 \times 10^{-15} C$.

Solución

Si a la carga que atravesó la sección hasta los 18 segundos, le restamos la que pasó hasta los 11 segundos, obtenemos la cantidad pedida. Recordando que $Q(11) = 1.28 \times 10^{-15} C$, resulta

$$Q(18) - Q(11) = (2.24 \times 10^{-15} - 1.28 \times 10^{-15}) C = 9.6 \times 10^{-16} C.$$

Es decir, entre los 11 y los 18 segundos, han atravesado la sección $9.6 \times 10^{-16} C = 9.6 \times 10^{-16} \times 6.25 \times 10^{18} \text{ electrones} = 6000 \text{ electrones}$. ■

Este último ejemplo da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.25: Carga eléctrica entre los instantes t y $t + \Delta t$

Dado un conductor, en el que tiene lugar una corriente eléctrica, la **carga eléctrica entre los instantes t y $t + \Delta t$** es la cantidad total de electrones que atravesó la sección entre dichos instantes, es decir, es la diferencia

$$Q(t + \Delta t) - Q(t)$$

Definición 2.26: Intensidad media de corriente en un intervalo de tiempo $[t; t + \Delta t]$

La Intensidad media de corriente en un intervalo de tiempo $[t; t + \Delta t]$ es el cociente entre la carga eléctrica entre los instantes t y $(t + \Delta t)$, y la longitud de dicho intervalo. Es decir,

$$I_m[t; t + \Delta t] = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

La unidad utilizada para esta magnitud es

$$[I_m[t; t + \Delta t]] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{seg.}} = \frac{C}{\text{seg.}} = \text{Ampere} = A$$

Ejemplo 2.27

Si entre los instantes $t_1 = 3$ y $t_2 = 7$, pasa una carga de $3.2 \times 10^{-18} C$ a través de la sección de un conductor, en el que tiene lugar una corriente, entonces la intensidad media de la misma, entre dichos instantes, es

$$I_m[3; 7] = \frac{3.2 \times 10^{-18} C}{4 \text{ seg.}} = 8 \times 10^{-19} \frac{C}{\text{seg.}} = 8 \times 10^{-19} A$$

Por lo tanto, se encuentra circulando, en promedio, una carga de $8 \times 10^{-19} C$ por segundo. O equivalentemente, como $1 C = 6.25 \times 10^{18}$ electrones, entonces

$$8 \times 10^{-19} A = 8 \times 10^{-19} \frac{C}{\text{seg.}} = 8 \times 10^{-19} \times 6.25 \times 10^{18} \frac{\text{electrones}}{\text{seg.}} = 5 \frac{\text{electrones}}{\text{seg.}}$$

En consecuencia, por la sección del conductor están pasando a razón de 5 electrones por cada segundo de dicho intervalo de tiempo.

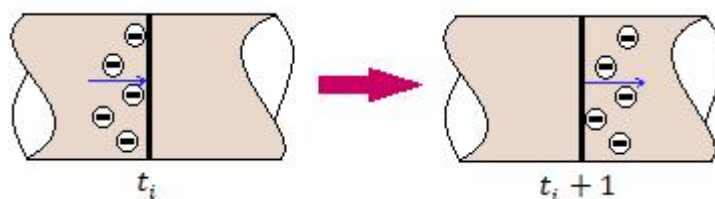


Figura 2.18: Dos instantes en una misma sección.
En promedio, pasan a través de ella 5 electrones por segundo. ■

Nos interesa, ahora, conocer el *promedio de carga eléctrica por segundo*, que atraviesa la sección del conductor, *en un instante*, es decir, el caso en que el intervalo de tiempo tiende a cero. Surge así el concepto de *intensidad instantánea de corriente*.

Definición 2.27: Intensidad instantánea de corriente

La Intensidad instantánea de corriente, o bien intensidad de corriente en un instante t , o simplemente intensidad de corriente, simbolizada por $I(t)$, es

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_m[t; t + \Delta t]$$

Es decir

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Naturalmente, la unidad utilizada para la Intensidad de corriente es la misma que para la Intensidad media de corriente, es decir

$$[I(t)] = \frac{C}{seg.} = \text{Ampere} = A$$

Observemos que $I(t)$ es precisamente la derivada de la función $Q(t)$, suponiendo que $Q(t)$ es derivable $\forall t > 0$. Luego,

$$I(t) = Q'(t)$$

Esta última ecuación nos permite elaborar la siguiente conclusión.

Conclusión 2.28

Puesto que $Q'(t) = I(t)$ entonces, por definición de función primitiva, $Q(t)$ es una primitiva de $I(t)$. Es decir,

$$Q(t) = \int I(t) dt$$

O equivalentemente, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral,

$$Q(t) = \int_0^t I(u) du$$

Ejemplo 2.29

La carga eléctrica que ha atravesado la sección de un conductor entre los instantes 0 y t es $Q(t) = 3t^4$. Hallar:

- La función intensidad de corriente en el instante t .
- La intensidad de corriente a los 7 segundos.

Solución

a) De acuerdo a la Definición 2.27, tenemos que $I(t) = Q'(t) = (3t^4)' = 12t^3$.
Luego, $I(t) = 12t^3 A$.

b) Al ser $t = 7$, la intensidad buscada es $I(7) = 12(7)^3 A = 4116 A$. ■

Ejemplo 2.30

La intensidad de corriente en cada instante t , sobre la sección de un conductor, viene dada por $I(t) = 3t^3 - 6t^2$. Calcular la carga eléctrica hasta los 5 segundos.

Solución

De acuerdo a la Conclusión 2.28 y aplicando la Regla de Barrow, tenemos

$$Q(5) = \int_0^5 I(u) du = \int_0^5 (3u^3 - 6u^2) du = \left[\frac{3}{4}u^4 - \frac{6}{3}u^3 \right]_0^5 = \frac{3}{4}5^4 - 2 \times 5^3 - 0 =$$

$= 218.75$. Por lo tanto

$$Q(5) = 218.75 A. \quad \blacksquare$$

2.9 El circuito eléctrico y su modelado

Hemos ya, de alguna manera, expuesto ejemplos sencillos de circuitos eléctricos, más precisamente en las Figuras 2.14 y 2.15, así como también lo hemos presentado, inevitable e implícitamente, en las Definiciones 2.19 y 2.20 de generador y de corriente eléctrica, respectivamente. Estamos, pues, en condiciones de definir este concepto, el cual es objeto del modelado que nos proponemos mostrar.

Definición 2.31: Circuito eléctrico

Un Circuito eléctrico, o simplemente circuito, es todo dispositivo constituido por uno o más cuerpos conductores conectados dos a dos, de los cuales, por lo menos uno de ellos es un hilo conductor, y por lo menos, otro, es un generador, gracias al cual repite su ciclo una corriente eléctrica, luego de haber circulado ésta, de alguna manera, a través de todo el sistema.

En un circuito, el sentido que se adopta para la corriente eléctrica es el opuesto al sentido de desplazamiento de los electrones. Además, indicaremos dicha corriente mediante el símbolo de una de las dos magnitudes que la mide, en este caso $I = I(t)$, ya que en un circuito, es su intensidad instantánea lo que suele resultar de interés a medir, razón por la cual, diremos que es esta intensidad I lo que se desplaza o circula por dicho circuito.

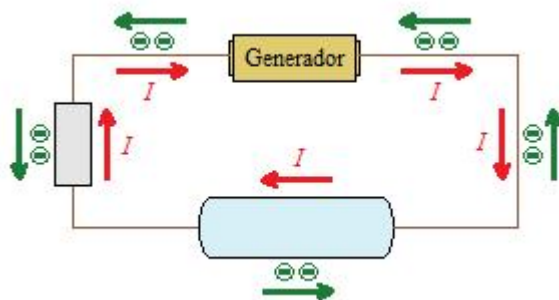


Figura 2.19: Circuito eléctrico. El sentido convencional de la corriente, representado por su intensidad, es opuesto al sentido del movimiento real de los electrones.

Para obtener el modelo del circuito, recurriremos a algunas Leyes de la Física, que permitirán determinar el voltaje existente en los componentes básicos de dicho circuito.

Cabe aclarar que, en lo sucesivo, al escribir V_{AB} , Q o I , daremos por sobre entendido que se trata de funciones dependientes del tiempo, es decir,

$$V_{AB} = V_{AB}(t), Q = Q(t), I = I(t).$$

Elementos o componentes de un circuito eléctrico

Exponemos a continuación los elementos típicos que suelen formar parte de estos sistemas.

Hilo conductor

Constituido por uno o varios tramos que unen a los componentes restantes del circuito. Generalmente vienen recubiertos de algún material aislante como el plástico. *Los cables* son los hilos conductores más comunes. Gráficamente se lo representa mediante segmentos de recta.



Figura 2.20: Representación de un hilo conductor y de dos de sus puntos.

Supondremos que el voltaje entre dos puntos A y B de un hilo conductor es nulo, ya que, por su función, la resistencia que ofrece al paso de los electrones es despreciable. Es decir,

$$V_{AB} = 0$$

Interruptor.

Consiste básicamente en un pequeño conductor que permite interrumpir la circulación de corriente. Lo designaremos gráficamente de la siguiente manera:

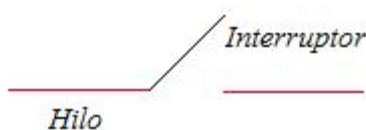


Figura 2.21: Símbolo del interruptor a lo largo de un hilo conductor.

Generador

Según la Definición 2.19, es el encargado de proporcionar, en cada instante t , un voltaje $V_{AB}(t)$ entre sus extremos A y B . En este caso, al voltaje suministrado por el generador lo simbolizaremos por

$$F(t) = \text{Voltaje del generador en el instante } t.$$

Naturalmente, la unidad utilizada es

$$[F(t)] = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{Volt} = V$$

Dentro del circuito, el generador será simbolizado según la siguiente figura:



Figura 2.22: Símbolo del generador dentro del circuito.

Resistor

Se trata de un cuerpo conductor que ofrece resistencia u oposición al paso de los electrones. En consecuencia, es un dispositivo utilizado para limitar la intensidad de corriente. Su símbolo será el que muestra la Figura 2.23.



Figura 2.23: Resistor de un circuito.

Para determinar el voltaje existente entre los extremos A y B de un resistor aplicaremos la **Ley de Ohm**, que expresa lo siguiente:

Ley de Ohm

Si la temperatura a la que se encuentra el resistor no varía, el cociente entre el voltaje entre sus extremos y la intensidad de corriente que circula en cada instante, es una constante. Es decir,

$$\frac{V_{AB}}{I} = R$$

donde

V_{AB} : Voltaje entre los extremos del resistor.

I : Intensidad de corriente que circula por el circuito.

R : Constante de proporcionalidad. Recibe el nombre de **resistencia eléctrica del resistor**.

La unidad correspondiente a esta magnitud es

$$[R] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} = \text{Ohm} = \Omega$$

De esta ley se desprende que el voltaje entre los extremos A y B de un resistor es

$$V_{AB} = R \cdot I$$

Existen materiales, como el silicio, para los cuales no se cumple la Ley de Ohm. Por otro lado, independientemente del material, cabe destacar que *todos los conductores ofrecen resistencia eléctrica*.

Capacitor

Es un dispositivo capaz de almacenar carga eléctrica de manera temporal y de liberarla en el momento que se requiera. Gráficamente lo simbolizamos como en la figura que sigue.

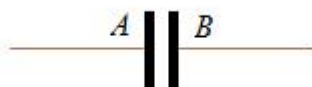


Figura 2.24: Capacitor conectado a un hilo conductor.

Sea cual fuere el tipo de capacitor, su estructura produce los mismos efectos que en el caso de que ésta fuera como lo indica su símbolo gráfico, es decir, formado por dos placas metálicas separadas y paralelas, entre medio de las cuales se encuentra una sustancia aislante. Explicaremos brevemente su funcionamiento:

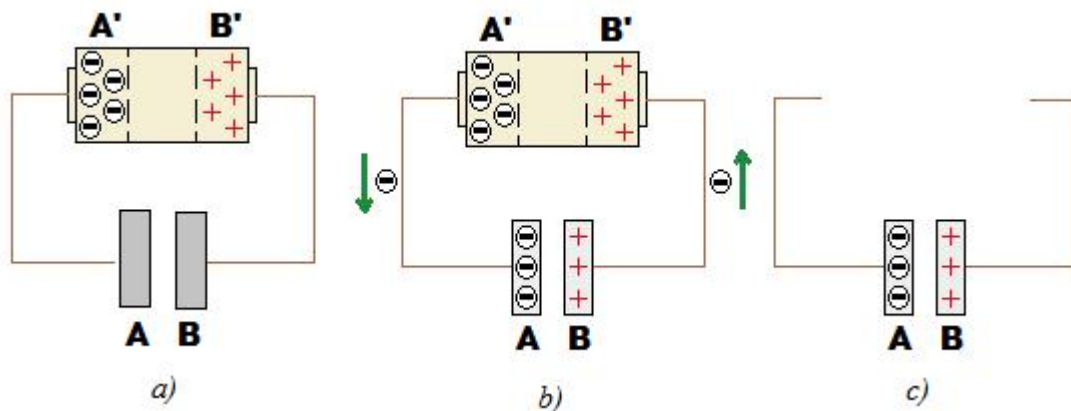


Figura 2.25: Carga y descarga de un capacitor.

Inicialmente, las placas están en estado neutro (*Figura 2.25 a*); al conectarlas a un generador (*Figura 2.25 b*), éste, *como si* estuviera cargado positivamente en una porción correspondiente al extremo B' , hace que electrones de la placa B tiendan a restablecer el equilibrio electrostático del sistema conductor formado por la placa B , el hilo entre B y B' , y la porción B' del generador. Así, dichas cargas se desplazan por el hilo hasta el extremo B' , atraviesan el generador y llegan así a la placa A , en virtud del funcionamiento de éste; de esta manera, esta última se carga negativamente, la porción B' conserva su carga positiva, y la placa B se carga positivamente. Al no existir, en realidad, electrones libres que repitan un ciclo, debido naturalmente a la separación entre las placas conductoras, la corriente cesará en algún momento, precisamente

cuando el sistema formado por la placa B , el hilo BB' , y la porción B' , esté en equilibrio electrostático y con carga positiva, al haber permanecido la mencionada porción B' cargada positivamente, al igual que el tramo de hilo BB' . Análogamente sucede con el sistema formado por la porción A' del generador, el tramo $A'A$ de hilo, y la placa A , sistema éste, cargado negativamente y ya en equilibrio. Es éste el **período de carga del capacitor**. Puesto que la carga negativa acumulada por la placa A , es la que provino de la placa B a través del circuito, ambas placas quedan con cantidades opuestas de carga, es decir $Q_A = -Q_B$, siendo, en el caso de la siguiente figura, Q_A negativa y Q_B positiva, y decimos que la **carga eléctrica del capacitor** es el valor absoluto de estas cantidades. Cabe aclarar que, en caso de no desconectar el generador, tanto la duración del período de carga como la carga eléctrica con la que resulta el capacitor, dependen del voltaje constante con que cuente dicho generador.

Si desconectamos el generador en cualquier momento (*Figura 2.25 c*)), ya sea después de haberse logrado el equilibrio mencionado en el párrafo anterior, o antes de que éste llegue a producirse, el capacitor queda cargado, en mayor o en menor medida respectivamente, conservando la carga que recibió cada placa durante el período de carga. Cabe destacar que las placas se mantienen cargadas porque, al estar muy cerca una de la otra y tener cargas de distinto signo, éstas se atraen y, por ende, tienden a mantenerse en su lugar.

Si a continuación, unimos las placas mediante un hilo conductor, la carga negativa de la placa A se desplazará por el hilo hasta neutralizar la placa B , hasta lograrse el equilibrio electrostático del nuevo sistema constituido por las dos placas y el hilo: ha tenido lugar así el **período de descarga**.

Observación 2.32

Naturalmente, la carga eléctrica del capacitor en un instante t , es precisamente la carga que ha atravesado cualquier sección del circuito, hasta ese instante. Es decir,

$$Q_{\text{capacitor}}(t) = Q(t)$$

Para determinar el voltaje existente entre los extremos A y B de un capacitor recurriremos a la **Ley de Coulomb**, que afirma lo siguiente:

Ley de Coulomb

El cociente entre la carga eléctrica del capacitor y el voltaje entre sus extremos, o sea, entre sus placas A y B , es una constante. Es decir,

$$\frac{Q(t)}{V_{AB}} = C$$

donde

$Q(t)$: Carga eléctrica del capacitor.

V_{AB} : Voltaje entre los extremos del capacitor.

C : Constante de proporcionalidad. Recibe el nombre de **capacitancia del capacitor**.

La unidad correspondiente a esta magnitud es

$$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Faradio}$$

De esta ley se desprende que el voltaje entre los extremos A y B de un capacitor es

$$V_{AB} = \frac{Q(t)}{C}$$

Inductor

Se trata de un elemento que se opone a cualquier cambio en la corriente eléctrica, por lo que, en particular, impide que se produzca un cambio brusco de intensidad de corriente. Su símbolo en el circuito es el siguiente.



Figura 2.26: Símbolo gráfico de un inductor.

Para hallar el voltaje existente entre los extremos A y B de un inductor, aplicaremos la **Ley de Faraday**, que indica lo siguiente:

Ley de Faraday

En un inductor, el cociente entre el voltaje entre sus extremos y la velocidad de variación de la intensidad de corriente, es una constante. Es decir,

$$\frac{V_{AB}}{I'(t)} = L$$

donde

V_{AB} : Voltaje entre los extremos del inductor.

$I'(t)$: Derivada de la intensidad de corriente.

L : Constante de proporcionalidad. Recibe el nombre de **inductancia del inductor**.

La unidad correspondiente a esta magnitud es

$$[L] = \frac{\text{Volt}}{\frac{\text{Ampere}}{\text{seg}}} = \text{Henry} = \text{Hy}$$

De esta ley se desprende que el voltaje entre los extremos A y B de un inductor es

$$V_{AB} = L \cdot I'(t)$$

De esta última fórmula podemos deducir lo siguiente:

1) Si no existe variación en la intensidad de corriente, entonces $I(t)$ es constante. Luego, $I'(t) = 0$. En este caso, el voltaje entre los extremos del inductor es nulo. Es decir,

$$V_{AB} = 0$$

Por lo tanto, cuando no hay cambios en la intensidad de corriente eléctrica, el inductor se comporta como si fuera un hilo conductor.

2) Si se produce una variación en el valor absoluto de $F(t)$, es decir, en el voltaje del generador, entonces tendrá lugar una proporcional variación en el valor absoluto V_{AB} del inductor. En consecuencia, al ser L constante, variará $I'(t)$ en la misma proporción. Luego, una variación brusca en el voltaje $F(t)$ del generador, traerá aparejado un cambio brusco en la intensidad de corriente.

Y precisamente, esta clase de dispositivos tiende a neutralizar dichos “saltos de corriente”, basándose en propiedades inherentes a su estructura de *espiras* y al *Electromagnetismo*.

Convención 2.33

En lo que sigue, al indicar algunos de los elementos que acabamos de ver, será indistinto utilizar el nombre del dispositivo o la letra que simboliza a la magnitud correspondiente. Por ejemplo, será lo mismo escribir “resistor” que “ R ”.

Finalmente agrupamos, en la siguiente tabla, las expresiones resultantes a utilizar.

Dispositivo	Voltaje entre sus extremos
Resistor (R)	$R \cdot I$
Capacitor (C)	$\frac{Q(t)}{C}$
Inductor (L)	$L \cdot I'(t)$
Generador	$F(t)$

Tabla 2.1

Las Leyes de Kirchhoff

Para efectuar el análisis de cualquier circuito eléctrico y poder expresar la relación matemática entre las magnitudes que intervienen en cada instante, suele recurrirse a dos reglas prácticas conocidas como *Leyes de Kirchhoff*. La aplicación de tales leyes, junto con los datos contenidos en la Tabla 2.1, nos permitirá *obtener el modelo del circuito eléctrico*.

Antes de enunciarlas, necesitamos definir dos conceptos involucrados.

Definición 2.34: Nodo y Malla

Nodo de un circuito eléctrico es cualquier punto donde dos o más dispositivos tienen, mediante hilos conductores, una conexión común.

Llamamos **malla** de un circuito a cualquier camino que parta de un nodo, pase por componentes de dicho circuito y vuelva al mismo nodo.

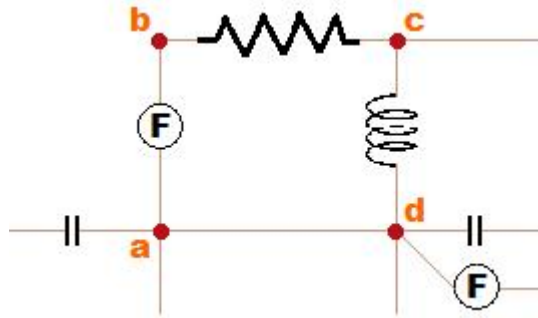


Figura 2.27: Cuatro nodos a, b, c y d en un circuito.
El camino a b c d a constituye una malla.

Enunciamos, entonces, las leyes mencionadas.

Primera Ley de Kirchhoff

La suma de las intensidades de corriente que llegan a un nodo es igual a la suma de las intensidades que salen de aquél.

Ejemplo 2.35

Si al nodo **a** de la Figura 2.28 llegan las intensidades de corriente $I_1 = 5\text{ A}$, $I_2 = 7\text{ A}$ e I_3 , y de él salen $I_4 = 10\text{ A}$ e $I_5 = 4\text{ A}$, calcular I_3 .

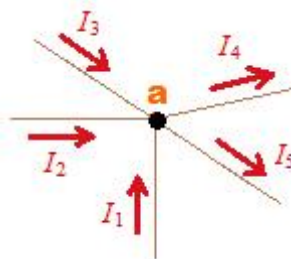


Figura 2.28.

Solución

Teniendo en cuenta la Primera Ley de Kirchhoff y despejando, nos queda

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 \Rightarrow I_3 = I_4 + I_5 - (I_1 + I_2) = (10 + 4)\text{ A} - (5 + 7)\text{ A} = 2\text{ A}$$

Por lo tanto $I_3 = 2\text{ A}$ ■

Segunda Ley de Kirchhoff

La suma algebraica de los voltajes de los dispositivos existentes en una malla es cero.

Cuando apliquemos esta Segunda Ley, recurriremos a *tres reglas prácticas*, que exponemos en la siguiente Convención.

Convención 2.36: Reglas a utilizar cuando se aplica la Segunda Ley de Kirchhoff

1) Si entre dos puntos *A* y *B* del circuito no existen dispositivos, entonces

$$V_{AB} = 0$$

2) Cuando la corriente atraviesa *un generador*, tiene lugar *una elevación de voltaje*. En este caso, para agilizar la notación gráfica, diremos que se produce un “*pasaje de menos a más*” en lugar de decir un “*pasaje de menor voltaje a mayor voltaje*”.

En efecto, de acuerdo con lo explicado en el modelo de funcionamiento de un generador, éste suministra voltaje, hecho que no puede más que significar un aumento de dicha magnitud.

Por el contrario, si la corriente pasa a través de cualquier otro dispositivo –que no sea un generador ni un hilo conductor –, se produce una *disminución o caída de voltaje*. En este caso, diremos que se produce un “*pasaje de más a menos*” en vez de un “*pasaje de mayor voltaje a menor voltaje*”.

Esto ocurre debido a la resistencia eléctrica que ofrece cualquier otro dispositivo que no sea un generador, motivo por el cual tiene lugar una disminución de la energía que fue suministrada al circuito, junto con el hecho de que dichos dispositivos carecen de la capacidad de suministrar energía por sí mismos.

3) Si en el recorrido de la corriente a través de una malla se produce una ***elevación de voltaje (pasaje de menos a más)*** al atravesar un dispositivo, el voltaje entre los extremos de dicho dispositivo se considera ***positivo***.

En caso contrario, si la corriente pasa por un dispositivo en el que se produce una ***disminución de voltaje (pasaje de más a menos)***, el voltaje entre los extremos de dicho dispositivo se considera ***negativo***.

Pasamos, ahora, a resolver ejemplos en los que aplicaremos ambas leyes, en un circuito dado, y llegaremos así al ***modelo matemático de un circuito***.

Ejemplo 2.37

Consideremos el circuito eléctrico de la siguiente figura:

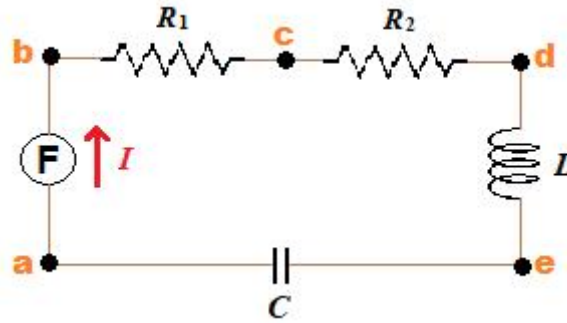


Figura 2.29.

Donde $F(t) = 2e^{-3t} \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10 \, \Omega$, $C = 0.5 \text{ F}$, $L = 2 \text{ Hy}$.

- Aplicar la Segunda Ley de Kirchhoff a la malla **abcdea**, a fin de plantear una ecuación diferencial que permita hallar la intensidad de corriente $I(t)$.
- Hallar y representar gráficamente $I(t)$ en el intervalo $[0, 50]$, suponiendo que $I(0) = I'(0) = 0$.

Solución

a) Hallamos la ecuación diferencial según los siguientes pasos:

Primer Paso

Utilizando la Convención 2.36, recorremos la malla y asignamos, según corresponda, el signo + o - a cada extremo de los dispositivos del circuito, como indicamos en la siguiente figura.

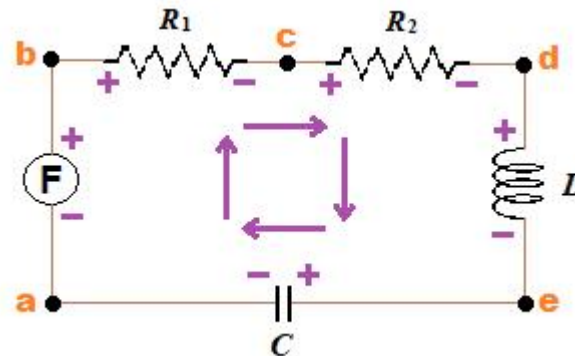


Figura 2.30.

Segundo Paso

Recorriendo nuevamente la malla, y teniendo en cuenta los signos + y - que hemos agregado a cada dispositivo resulta que, nuevamente por la Convención 2.36, a las elevaciones de voltaje, es decir, a los pasajes de - a +, corresponden voltajes positivos, mientras que a las caídas de tal magnitud, esto es, a pasajes de + a -, corresponden voltajes negativos.

Por lo tanto, aplicando la Segunda Ley de Kirchhoff obtenemos

$$V_{ab} - V_{bc} - V_{cd} - V_{de} - V_{ea} = 0$$

Sabiendo que $V_{ab} = F(t)$ y utilizando la Tabla 2.1, resulta

$$F(t) - R_1 \cdot I(t) - R_2 \cdot I(t) - L \cdot I'(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Reemplazando ahora según los datos, y omitiendo la escritura de las unidades, la expresión anterior es

$$2 e^{-3t} - 10 \cdot I(t) - 10 \cdot I(t) - 2 \cdot I'(t) - \frac{Q(t)}{0.5} = 0$$

o bien

$$2 \cdot I'(t) + 20 \cdot I(t) + 2Q(t) = 2 e^{-3t}$$

que, dividiendo miembro a miembro por 2, equivale a

$$I'(t) + 10 \cdot I(t) + Q(t) = e^{-3t}$$

Ahora bien, buscamos como modelo matemático a una ecuación diferencial que permita hallar la función incógnita $I(t)$. Como desconocemos la cantidad de carga $Q(t)$, derivaremos miembro a miembro esta última ecuación respecto de t :

$$I''(t) + 10 \cdot I'(t) + Q'(t) = -3 e^{-3t}$$

Y, finalmente, considerando que $Q'(t) = I(t)$ según la Conclusión 2.28, obtenemos

$$I''(t) + 10 \cdot I'(t) + I(t) = -3 e^{-3t}$$

Esta ecuación diferencial de orden 2, en la incógnita $I(t)$, es el modelo matemático asociado al circuito eléctrico de la Figura 2.30.

b) Para hallar $I(t)$, resolvemos la ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$\begin{cases} I''(t) + 10 \cdot I'(t) + I(t) = -3 e^{-3t} \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = 0 \end{cases}$$

Para ello aplicamos el software Wolfram Mathematica 10.0, ejecutando el siguiente comando:

$$DSolve\left[\left\{I''(t) + 10 \cdot I'(t) + I(t) == -3 e^{-3t}, I(0) == 0, I'(0) == 0\right\}, I(t), t\right]$$

Obtenemos la solución:

$$I(t) = \frac{1}{80} e^{-(5+2\sqrt{6})t} \left(-6 + \sqrt{6} - (6 + \sqrt{6}) e^{4\sqrt{6}t} + 12 e^{2(1+\sqrt{6})t} \right)$$

Su gráfica se muestra en la siguiente figura

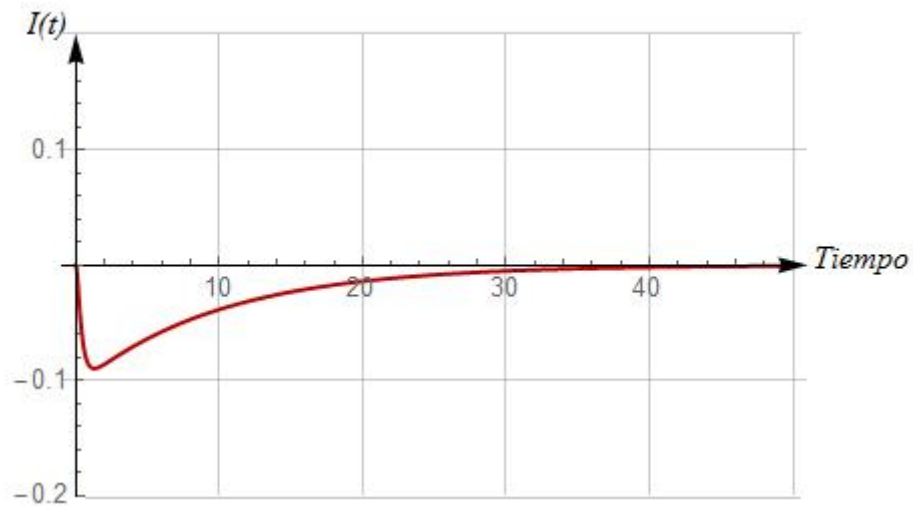


Figura 2.31: Gráfica de la función solución $I(t)$.

Observando el gráfico, podemos comprobar que la intensidad de corriente tiende a 0 a medida que transcurre el tiempo. Ello se debe a que, al estar presente en el circuito un capacitor, éste impide la circulación de la corriente una vez que quedó completamente cargado. ■

Ejemplo 2.38

Consideremos el siguiente circuito:

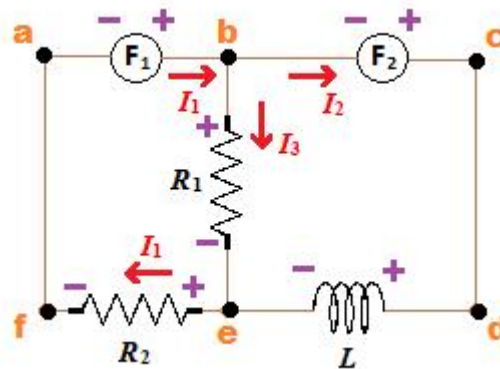


Figura 2.32.

donde

$$F_1(t) = 12\text{ V}, F_2(t) = 9\text{ V}, R_1 = 10\ \Omega, R_2 = 8\ \Omega, L = 2\text{ Hy}.$$

Ambos generadores sostienen corriente en el mismo sentido.

- Aplicar la Primera Ley de Kirchhoff al nodo **b**.
- Aplicar la Segunda Ley de Kirchhoff a las mallas **abefa** y **bcdeb**, para obtener una EDO que permita determinar la intensidad de corriente $I_2(t)$.
- Resolver la ecuación diferencial obtenida en el inciso anterior, suponiendo que en el instante $t = 0$ no circula corriente por el circuito.
- Representar gráficamente la intensidad de corriente $I_2(t)$ en los 10 primeros segundos.

Solución

a) Al aplicar la Primera Ley de Kirchhoff al nodo **b** obtenemos

$$I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) \quad [2.1]$$

b) Habiendo considerado ya, en la Figura 2.32, los signos + y - correspondientes a las elevaciones y caídas de voltaje, aplicamos la Segunda Ley a la malla **abefa**, por lo que resulta

$$V_{ab} - V_{be} - V_{ef} - V_{fa} = 0$$

Teniendo en cuenta que $V_{ab} = F_1(t)$, el hecho de que, en el nodo **e**, convergen las intensidades $I_2(t)$ e $I_3(t)$, y que $V_{fa} = 0$ pues el voltaje entre dos puntos de un hilo conductor es nulo, resulta, aplicando los datos contenidos en la Tabla 2.1:

$$F_1(t) - R_1 \cdot I_3(t) - R_2 \cdot I_1(t) - 0 = 0 \quad [2.2]$$

De la ecuación [2.1] tenemos que

$$I_3(t) = I_1(t) - I_2(t) \quad [2.3]$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación [2.2] obtenemos

$$F_1(t) - R_1 \cdot (I_1(t) - I_2(t)) - R_2 \cdot I_1(t) = 0$$

Luego

$$12 - 18 I_1(t) + 10 I_2(t) = 0$$

Por lo tanto

$$I_1(t) = \frac{12 + 10 I_2(t)}{18} \quad [2.4]$$

Hacemos, ahora, lo propio con la malla **bcdeb**. Previamente, debemos tener presente que, el tramo desde **e** hasta **b**, es decir, *el recorrer la malla en sentido opuesto al sentido convencional de la corriente $I_3(t)$* , que es la que circula en dicho tramo, *equivale a considerar que se produce una elevación de voltaje al atravesar el resistor R_1* , en lugar de una caída. Luego, el voltaje correspondiente aparecerá sumando. Resulta, así,

$$V_{bc} + V_{cd} - V_{de} + V_{eb} = 0$$

Teniendo en cuenta que $V_{bc} = F_2(t)$, que $V_{cd} = 0$ pues entre los nodos **c** y **d** del hilo conductor no hay dispositivos, y haciendo uso nuevamente de la Tabla 2.1 obtenemos

$$F_2(t) + 0 - L \cdot I_2'(t) + R_1 \cdot I_3(t) = 0$$

Por lo tanto

$$9 - 2 I_2'(t) + 10 I_3(t) = 0 \quad [2.5]$$

Aplicando las ecuaciones [2.3]-[2.4] para sustituir $I_3(t)$ en [2.5] y reduciendo expresiones, obtenemos la EDO buscada:

$$2 I_2'(t) + \frac{40}{9} I_2(t) = \frac{47}{3}$$

c) Resolvemos la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} 2 I_2'(t) + \frac{40}{9} I_2(t) = \frac{47}{3} \\ I_2(0) = 0 \end{cases}$$

Recurriendo al software Wolfram Mathematica, ejecutamos el comando:

$$\text{DSolve}\left[\left\{2 I_2'(t) + \frac{40}{9} I_2(t) = \frac{47}{3}, I_2(0) == 0\right\}, I_2(t), t\right]$$

La solución obtenida es

$$I_2(t) = \frac{141}{40} \left(1 - e^{-\frac{20}{9}t}\right)$$

d) Para graficar $I_2(t)$ en los 10 primeros segundos ejecutamos el siguiente comando:

$$\text{Plot}\left[\frac{141}{40} \left(1 - e^{-\frac{20}{9}t}\right), \{t, 0, 10\}, \text{GridLines} \rightarrow \text{Automatic}, \text{AxesStyle} \rightarrow \text{Arrowheads}[0.04]\right]$$

La gráfica obtenida es la siguiente:

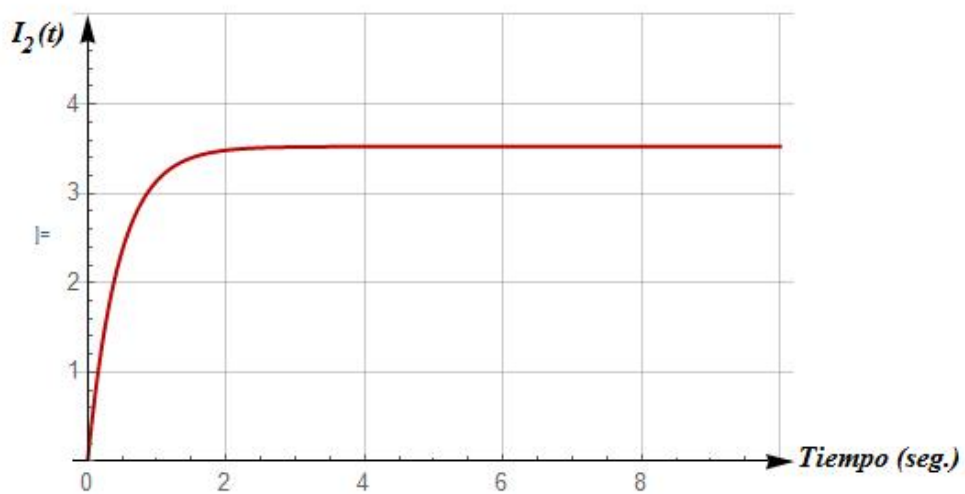


Figura 2.33: Gráfica de $I_2(t)$.

Observamos la intensidad de corriente $I_2(t)$ tiende a estabilizarse a un valor aproximado de 3.6 Amperes. ■

Ejemplo 2.39

Consideremos el circuito:

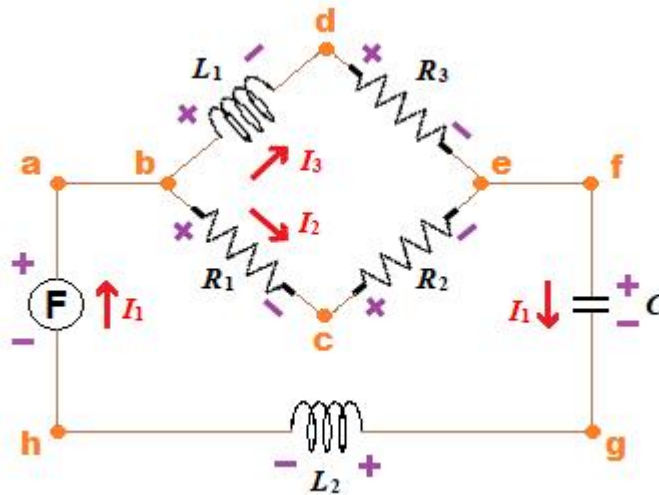


Figura 2.34.

con los datos

$$F(t) = 200 \text{ V}, R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega, L_1 = L_2 = 1 \text{ Hy}, C = 1 \text{ F}.$$

Aplicar la Primera Ley de Kirchhoff al nodo **b**, y la Segunda Ley a las mallas **bdecb** y **abcefga**, para probar que las intensidades de corriente $I_1(t)$ e $I_3(t)$ verifican el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} 2I_1(t) - I_3'(t) - 3I_3(t) = 0 \\ -I_1''(t) - 2I_1'(t) - I_1(t) + 2I_3'(t) = 0 \end{cases}$$

Solución

Por la Primera ley de Kirchhoff aplicada al nodo **b**, resulta

$$I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) \quad [2.6]$$

Aplicando la Segunda Ley a la malla **bdecb**, tenemos

$$-V_{bd} - V_{de} + V_{ec} + V_{cb} = 0$$

Entonces

$$-L_1 \cdot I_3'(t) - R_3 \cdot I_3(t) + R_2 \cdot I_2(t) + R_1 \cdot I_2(t) = 0$$

Luego

$$-I_3'(t) - I_3(t) + I_2(t) + I_2(t) = 0$$

de donde resulta

$$-I_3'(t) - I_3(t) + 2I_2(t) = 0 \quad [2.7]$$

Despejamos $I_2(t)$ de [2.6]:

$$I_2(t) = I_1(t) - I_3(t) \quad [2.8]$$

y reemplazamos en [2.7] obteniendo

$$-I_3'(t) - I_3(t) + 2(I_1(t) - I_3(t)) = 0$$

de donde resulta

$$2I_1(t) - I_3'(t) - 3I_3(t) = 0 \quad [2.9]$$

Y aplicando ahora la misma Ley a la malla **abcefga**, tenemos

$$V_{ab} - V_{bc} - V_{ce} + V_{ef} - V_{fg} - V_{gh} + V_{ha} = 0$$

Entonces

$$0 - R_1 \cdot I_2(t) - R_2 \cdot I_2(t) + 0 - \frac{Q(t)}{C} - L_2 \cdot I_1'(t) + F(t) = 0$$

Utilizando los datos del enunciado y sustituyéndolos en esta última ecuación obtenemos

$$-2I_2(t) - Q(t) - I_1'(t) + 200 = 0 \quad [2.10]$$

Reemplazamos [2.8] en [2.10] y tenemos

$$-2(I_1(t) - I_3(t)) - Q(t) - I_1'(t) + 200 = 0$$

Derivando miembro a miembro respecto de t , y teniendo en cuenta que $Q'(t) = I_1(t)$ obtenemos finalmente

$$-I_1''(t) - 2I_1'(t) - I_1(t) + 2I_3'(t) = 0 \quad [2.11]$$

De [2.9] y [2.11] resulta el sistema

$$\begin{cases} 2I_1(t) - I_3'(t) - 3I_3(t) = 0 \\ -I_1''(t) - 2I_1'(t) - I_1(t) + 2I_3'(t) = 0 \quad \blacksquare \end{cases}$$

Capítulo 3

Nociones básicas del funcionamiento del corazón y del marcapasos

En este capítulo expondremos someramente el funcionamiento de las células del corazón, partiendo de su anatomía para luego mencionar las propiedades eléctricas del tejido cardíaco. Posteriormente haremos una breve descripción de un marcapasos. Estos conceptos ayudarán a comprender el modelo matemático del marcapasos que desarrollaremos en el capítulo siguiente. Primeramente, necesitaremos algunos conceptos previos, que los enunciamos a continuación.

3.1 Nociones previas

Átomos cargados

Como mencionamos en el capítulo anterior, cuando un cuerpo está cargado, lo puede estar positiva o negativamente. Lo mismo vale, naturalmente, para el propio átomo. Es más: salvo, en general, en el caso de los metales conductores, el hecho de que un cuerpo esté cargado no puede ser más que una consecuencia de que lo estén sus átomos constituyentes. Un *átomo con carga* recibe el nombre de **ion**. Si el átomo perdió algún electrón, en cuyo caso está cargado positivamente, se dice que es un **ion positivo**.

Mientras que, si ganó algún electrón, es decir, si está cargado negativamente, se dice que es un **ion negativo**.

Para hacer referencia a su carga, suele colocarse, al símbolo correspondiente a la clase de átomo, el signo $+$ o $-$ como superíndice.

Ejemplo 3.1

Sabiendo que el símbolo correspondiente a un átomo de potasio es K , entonces, la escritura K^+ indica que nos estamos refiriendo a un átomo de potasio con defecto de electrones, es decir, a un *ion positivo* de potasio. ■

3.2 El corazón y sus propiedades eléctricas

Anatomía del corazón

El corazón humano es un órgano muscular contráctil y hueco; generalmente su peso varía entre 250 y 300 gramos. Se encuentra dividido internamente en cuatro cavidades: dos superiores llamadas aurículas (izquierda y derecha) y dos inferiores llamadas ventrículos (izquierdo y derecho). En la aurícula derecha desembocan las venas cavas, mientras que, a la izquierda, las venas pulmonares. Por otro lado, del ventrículo derecho parten las arterias pulmonares, mientras que el ventrículo izquierdo se conecta a la aorta. La siguiente figura muestra estas partes mencionadas.

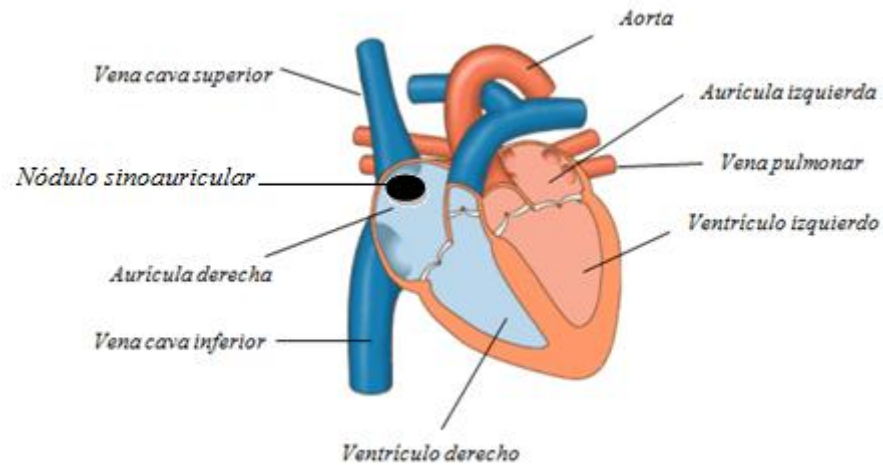


Figura 3.1: Anatomía del corazón.
Fuente: <https://es.wikipedia.org/wiki/Corazon>.

Capas del corazón

De adentro hacia afuera, el corazón presenta las siguientes capas:

Endocardio: Tapiza las cavidades internas del corazón, tanto aurículas como ventrículos.

Miocardio: Es la capa más ancha y representa la mayor parte del grosor del corazón. Está formado por tejido muscular y es el encargado de bombear la sangre, mediante su contracción, por el sistema circulatorio.

Pericardio: Es una membrana que envuelve al corazón, separándolo de las estructuras vecinas. Forma una especie de bolsa o saco que cubre completamente al corazón.

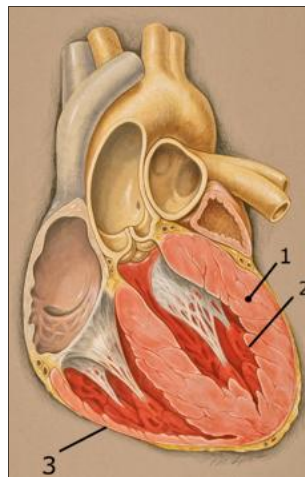


Figura 3.2: Capas del corazón.
1: Miocardio. 2: Endocardio. 3: Pericardio.
Fuente: <https://es.wikipedia.org/wiki/Corazon>.

Los tejidos del corazón están formados por fibras que tienen la capacidad de intercambiar iones de diversos elementos en el órgano cardíaco. En consecuencia, les es posible la conducción y producción de corriente eléctrica. El miocardio, por ejemplo, tiene la propiedad de iniciar señales eléctricas. De esto nos ocuparemos más adelante.

Fisiología del corazón

El Sistema Circulatorio está formado por vasos sanguíneos que transportan sangre desde y hacia el corazón. Las arterias transportan la sangre desde el corazón al resto del cuerpo, y las venas la transportan desde el cuerpo hasta el corazón.

Para que la sangre viaje por todo el aparato circulatorio es necesario que exista una diferencia de presión, la cual es generada por las contracciones del corazón. Primero se contraen ambas aurículas simultáneamente e instantes después se contraen los ventrículos. El circuito completo del recorrido de la sangre consta de los siguientes pasos:

- La aurícula derecha recibe sangre poco oxigenada desde los diferentes órganos a través de la vena cava inferior y la vena cava superior.
- La aurícula derecha traspasa la sangre al ventrículo derecho.
- El ventrículo derecho impulsa la sangre hacia la arteria pulmonar y los pulmones.
- La sangre se oxigena a su paso por los pulmones y vuelve al corazón, entrando en la aurícula izquierda.
- Desde la aurícula izquierda la sangre pasa al ventrículo izquierdo.
- Desde el ventrículo izquierdo, la sangre es propulsada hacia la arteria aorta de la que parten numerosas ramas para proporcionar oxígeno a todos los tejidos del organismo.
- Una vez que los diferentes órganos han captado el oxígeno de la sangre arterial, la sangre pobre en oxígeno entra en el sistema venoso y retorna a la aurícula derecha a través de las venas cavas inferior y superior, cerrándose el circuito.

Funcionamiento eléctrico del corazón

El corazón tiene la capacidad de generar *un impulso eléctrico* que, al propagarse, provoca la **contracción de sus aurículas y ventrículos**, con lo cual la sangre es “bombeada” hacia resto del organismo.

Veamos en qué consiste el **impulso eléctrico cardíaco**, con ayuda de la siguiente figura:

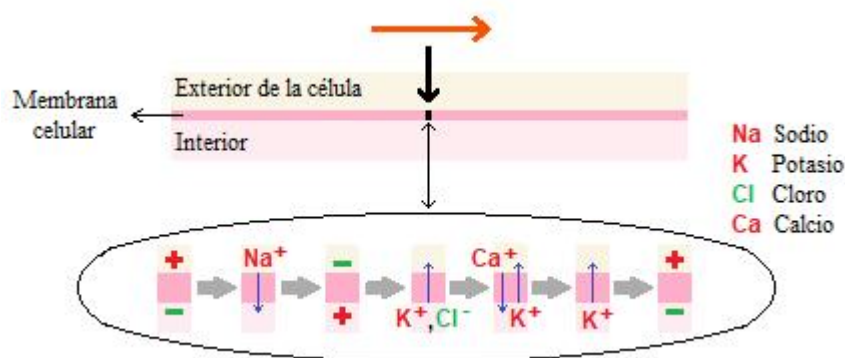


Figura 3.3: Propagación del impulso eléctrico del corazón.

Estos impulsos son generados en una parte específica del miocardio, el **nódulo sinoauricular**, mediante células especializadas para esta función.

Cada una de estas células tiene la particularidad de que, *a través de un punto* de su **membrana**, que es la delgada capa que recubre a la célula, tiene lugar *una secuencia de pasajes e intercambios de iones*, entre la superficie exterior y la superficie interior de dicha membrana; se trata, pues, de un *desplazamiento transversal de cargas, en etapas*, que comúnmente se llama *impulso eléctrico del corazón*. Notemos, en la Figura 3.3, que la secuencia comienza con la entrada de iones positivos de sodio, y finaliza con la salida de los propios de potasio, restableciéndose así la distribución inicial de cargas que existía en ese punto. Producida dicha secuencia, ésta *se propaga multidireccionalmente* hacia el resto de la membrana, es decir, se repite de la manera descrita en el resto de esa célula, para luego, transmitirse a las células de que están compuestos ciertos conductos que unen el nódulo sinoauricular con las cavidades auriculares y ventriculares. Así, el impulso es transmitido a las células de esas cavidades. Como resultado de esto, dichas cavidades se contraen en dos etapas que, juntas, conforman **un latido** del corazón.

Son oportunas, aquí, las siguientes definiciones.

Definición 3.2: Latido cardíaco

*Un latido cardíaco es una acción de bombeo en dos fases que dura aproximadamente un segundo. La primera fase, llamada **diástole**, consiste en la contracción de las aurículas, a fin de impulsar la sangre hacia los ventrículos.*

*La segunda fase, llamada **sístole**, consiste en la contracción de los ventrículos para expulsar la sangre hacia los tejidos.*

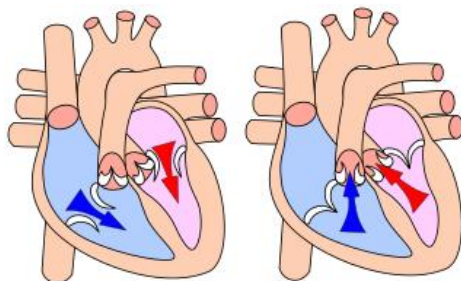


Figura 3.4: Fases del latido del corazón.

Izquierda: Diástole. Derecha: Sístole.

Fuente: <https://es.wikipedia.org/wiki/Corazon>.

Definición 3.3: Latidos uniformes

Tres o más latidos consecutivos son uniformes cuando existe un período constante de tiempo entre la finalización de uno y el comienzo del siguiente.

Definición 3.4: Frecuencia cardíaca

Frecuencia cardíaca es el número de latidos por unidad de tiempo, suponiendo que éstos son uniformes en el tiempo.

Dicho todo esto, podemos enunciar la siguiente conclusión:

Conclusión 3.5

En condiciones normales, cada impulso eléctrico genera un latido cardíaco, vale decir, la frecuencia cardíaca es consecuencia de la frecuencia con que son emitidos los impulsos, resultando, ambas, numéricamente iguales.

Por último, necesitamos una noción que nos permita pensar en el corazón como un cuerpo conductor de corriente eléctrica. Esto lo exponemos del siguiente modo:

El corazón pensado como un conductor de corriente eléctrica

Los pasajes de iones que tienen lugar en un impulso constituyen, según lo explicado cuando analizamos el funcionamiento eléctrico del corazón, pasajes de cargas, *como lo es una corriente*, pues ésta consiste en un *pasaje de electrones*, de acuerdo con la Definición 2.20. En consecuencia, podemos considerar esos pasajes de iones *como corrientes eléctricas*, y en virtud de esto, al *corazón como un conductor*.

El umbral de estimulación

En la naturaleza existe un sistema de células denominado “*tejidos excitables*”. Un ejemplo de este tipo son las células cardíacas y las neuronales. Los tejidos excitables tienen la característica de que cuando son sometidos a una estimulación, reaccionan de acuerdo a la intensidad de la estimulación recibida. Sin embargo, para que puedan reaccionar, se precisa que la estimulación tenga una intensidad mínima. El valor mínimo necesario para provocar una respuesta de los tejidos excitables recibe el nombre de “*umbral de estimulación*”. En particular, cuando los tejidos excitables son las células cardíacas y la estimulación consiste en aplicar un voltaje, las células cardíacas reaccionan provocando su contracción. Este fenómeno se conoce como “*despolarización cardíaca*”. En este caso, el umbral de estimulación es el mínimo valor de voltaje que se debe aplicar a las células cardíacas para que éstas se puedan contraer.

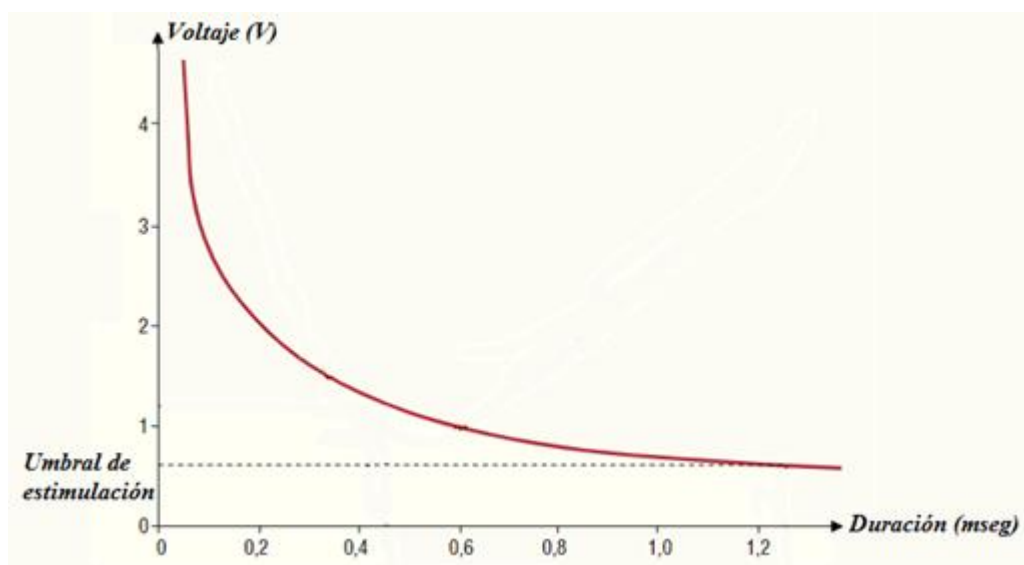


Figura 3.5: Representación gráfica del voltaje enviado al corazón y del umbral de estimulación.

Fuente: <https://www.revespcardiol.org/es-pdf-S1131358707752585>

3.3 El marcapasos y su función

De acuerdo con la Conclusión 3.5, las anomalías en la frecuencia de generación de los impulsos eléctricos pueden causar diferentes tipos de alteraciones en el latido cardíaco. Entre estas alteraciones, están las llamadas *arritmias*, tales como la *taquicardia* (latidos rápidos del corazón) y la *bradicardia* (latidos lentos). Para solucionar este tipo de anomalías, se creó el marcapasos. Su definición la damos a continuación.

Definición 3.6: Marcapasos

Un marcapasos es un pequeño dispositivo alimentado por una batería, que ayuda al corazón a latir con un ritmo constante.

De este modo, un marcapasos ayuda a *mantener la frecuencia cardíaca normal* del corazón. Para ello, claro está, debe *uniformar sus latidos*, pero *dentro de la frecuencia adecuada*. Así, si sucede algún inconveniente que impida que las células cardíacas ejecuten su labor de contracción, el corazón no latirá de manera uniforme, por lo cual se requerirá de un marcapasos que auxilie al corazón en sus funciones.

Elementos que componen un marcapasos

El marcapasos es aproximadamente del tamaño de una caja de fósforos y consta de dos partes:

- Un generador de impulsos, que incluye la batería y varios circuitos electrónicos.
- Alambres o cables denominados electrodos, que se fijan a la pared del corazón. Según las necesidades del paciente, el marcapasos puede tener uno o dos electrodos.

El marcapasos se implanta cerca de la clavícula. Si sólo se necesita un electrodo, éste se coloca en el ventrículo derecho. Si se necesitan dos electrodos, el segundo se coloca en la aurícula derecha. Luego, se conectan los electrodos al marcapasos.

Una vez implantado el marcapasos, los electrodos transmiten las señales del corazón. El generador de impulsos “lee” estas señales y la batería envía impulsos eléctricos al corazón para estimularlo rítmicamente.

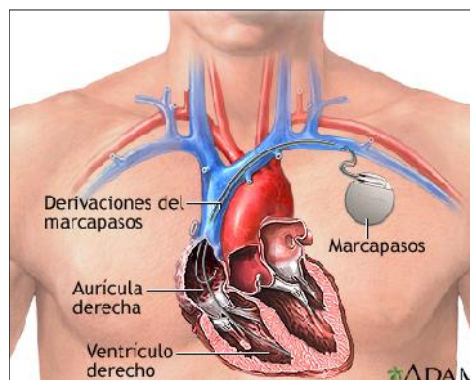


Figura 3.6: Marcapasos.

Fuente: <https://medlineplus.gov/spanish/ency/article/007369.htm>

La batería del marcapasos típicamente dura unos 7 u 8 años. Cuando ésta se agota, debe implantarse un nuevo marcapasos.

Funcionamiento del marcapasos

Cuando los impulsos eléctricos generados en el nódulo sinoauricular son insuficientes, o no son uniformes, el dispositivo emite, durante un breve lapso, una corriente eléctrica llamada *pulso*, que, al llegar a las cavidades del corazón (aurícula o ventrículo), genera el impulso eléctrico requerido para la contracción de aquéllas.

Este pulso se caracteriza, particularmente, por un pronunciado y rápido incremento de la intensidad de corriente, y un posterior descenso de similares características, hasta su valor inicial cero, como lo muestra el gráfico siguiente.



Figura 3.7: Pulso enviado por el marcapasos hacia el corazón.

¿Cómo se controla un marcapasos?

Los marcapasos se controlan a través de programadores, que son equipos que tienen la capacidad de obtener toda la información almacenada en el generador en relación al estado de los catéteres, la vida útil de la batería, la programación y el porcentaje de uso, etc., y permite también cambiar la programación del dispositivo según sea necesario y acorde a los requerimientos individuales. Los controles se realizan cada 4 a 6 meses aproximadamente.

¿Se puede modelar matemáticamente un marcapasos?

Como veremos en el próximo capítulo, es posible modelar matemáticamente el mecanismo responsable del funcionamiento de un marcapasos mediante un circuito eléctrico.

Más específicamente, podemos suponer que el marcapasos consiste, básicamente, en una batería de voltaje constante $F(t) = F_0$ con $F_0 > 0$, un capacitor de capacitancia C , un interruptor, y los cables, que se conectan a las cavidades del órgano, que son las responsables de contraerse para producir los latidos.

La modelación matemática, aquella descripción matemática simplificada de un fenómeno de la realidad, es una herramienta sumamente útil en Biotecnología.

En particular, la modelación matemática del marcapasos favorece la prueba de su funcionamiento antes de ser implementado, lo que incrementa la seguridad para el usuario. De esto nos ocuparemos en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Modelado del marcapasos y su simulación

En este capítulo modelaremos matemáticamente un marcapasos, partiendo de la idea de una ecuación diferencial como modelo matemático.

Plantearémos dos modelos: El Modelo Exponencial y El Modelo Logístico, para luego compararlos. Finalmente efectuaremos una simulación de ambos modelos utilizando el software Wolfram Mathematica 10.0.

4.1 Presentación del modelo

Asumiremos que un marcapasos es un circuito eléctrico compuesto por:

- Una batería de voltaje constante $F(t) = F_0$.
- Un capacitor de capacitancia C .
- El corazón que funciona como resistor, con resistencia constante R .
- Los cables (o electrodos) que conectan cada uno de estos dispositivos.
- Un interruptor S , que se activa y desactiva mediante un micro controlador y un transistor.

La siguiente figura ilustra este modelo:

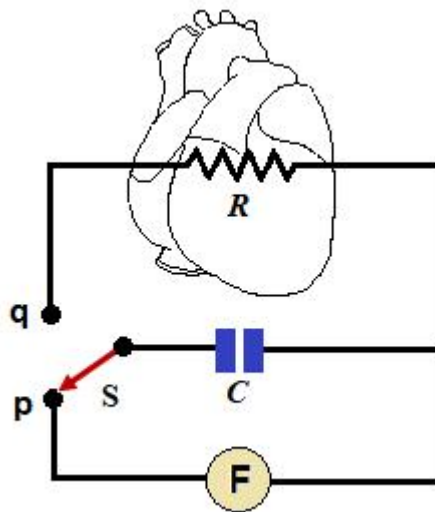


Figura 4.1: Circuito fundamental del modelo eléctrico de un marcapasos.

La batería tiene, como función principal, la de generar corriente eléctrica cuyas cargas serán almacenadas en una de las placas del capacitor, durante los períodos de carga de éste, para luego ser liberadas, durante sus períodos de descarga, en forma de *pulsos secuenciales*.

Mientras el interruptor S se encuentra en la posición p , el capacitor se carga, y cuando pasa a ocupar la posición q , comienza a descargarse, lo que permite que empiece a generarse un pulso que llegará hasta el corazón.

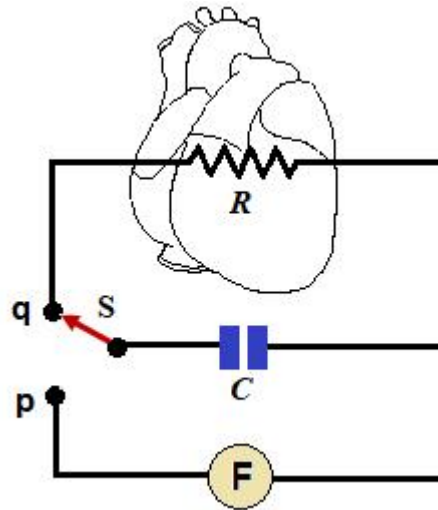


Figura 4.2: Etapa de descarga del capacitor.

Veamos con más detalle cómo es el procedimiento de carga-descarga:

Durante un intervalo de tiempo $[0, t_1)$, el interruptor S está en la posición p y el capacitor se carga en el tiempo t_1 , cuando la batería envía su corriente al capacitor. Esta instancia constituye el primer período de carga del capacitor.

Luego, en el intervalo de tiempo $[t_1, t_1 + t_2)$ el interruptor S pasa a la posición q , con lo cual el capacitor se descarga y envía un impulso al corazón durante un tiempo t_2 .

En el instante $t_1 + t_2$, S retoma la posición p y el capacitor vuelve a cargarse en el intervalo de tiempo $[t_1 + t_2, (t_1 + t_2) + t_1)$. Estamos en el segundo período de carga del capacitor.

Posteriormente, en el intervalo $[(t_1 + t_2) + t_1, (t_1 + t_2) + t_1 + t_2)$, el interruptor S vuelve a la posición q , para descargarse nuevamente.

De este modo, al mover S entre p y q , la carga y descarga en los intervalos de tiempo de duraciones t_1 y t_2 se repite de forma indefinida.

La siguiente figura muestra los lapsos de tiempo de carga-descarga.

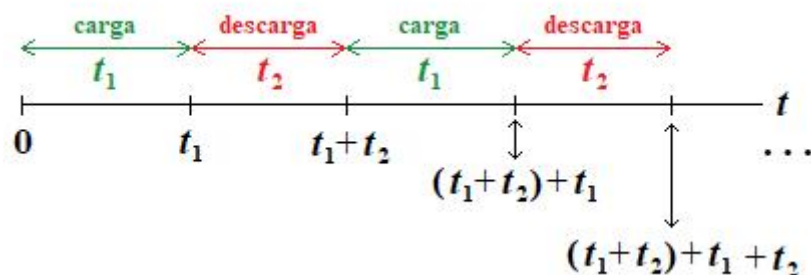


Figura 4.3.

Como vemos, estos lapsos de tiempo aseguran la frecuencia cardíaca. Además, puesto que $F(t) = F_0 = \text{constante}$, las corrientes enviadas al capacitor son constantes, con lo

cual lo serán, sucesivamente, las cargas almacenadas en C , los pulsos enviados al corazón y los impulsos generados en éste.

La siguiente Proposición prueba la expresión general del intervalo correspondiente al n -ésimo período de carga y de descarga del capacitor.

Proposición 4.1

Dado el modelo de circuito del marcapasos, entonces

1) El intervalo de tiempo asociado al n -ésimo período de carga del capacitor es

$$\left[(n-1)(t_1+t_2), (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \right)$$

2) El intervalo de tiempo asociado al n -ésimo período de descarga del capacitor es

$$\left[(n-1)(t_1+t_2)+t_1, n(t_1+t_2) \right)$$

donde

$$n \in \mathbb{N}$$

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

Demostración

Aplicaremos el Principio de Inducción sobre n .

Para $n = 1$

En este caso,

$$\left[(n-1)(t_1+t_2), (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \right) = \left[(1-1)(t_1+t_2), (1-1)(t_1+t_2)+t_1 \right) = \left[0, t_1 \right)$$

Según vimos en párrafos anteriores, $[0, t_1)$ es precisamente el intervalo que corresponde al primer período de carga del capacitor. En consecuencia, para $n = 1$ se verifica.

Hipótesis Inductiva

Supongamos que la expresión es válida para n , es decir, que el intervalo de tiempo asociado al n -ésimo período de carga del capacitor es

$$\left[(n-1)(t_1+t_2), (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \right)$$

Probemos que la expresión es válida para $(n+1)$

Veamos que el intervalo de tiempo asociado al $(n+1)$ -ésimo período de carga del capacitor es

$$\left[n.(t_1+t_2), n.(t_1+t_2)+t_1 \right)$$

Al intervalo asociado al n -ésimo período de carga del capacitor, le sucederá uno de descarga que, por ser consecutivo, y por ser t_2 la duración de un intervalo de descarga cualquiera, será

$$\left[(n-1)(t_1+t_2)+t_1, (n-1)(t_1+t_2)+t_1+t_2 \right) = \left[(n-1)(t_1+t_2)+t_1, n(t_1+t_2) \right)$$

Y puesto que t_1 es el tiempo que dura un intervalo cualquiera de carga, entonces, el intervalo de tiempo que sigue a aquel último, es decir, el asociado al $(n+1)$ -ésimo período de carga es

$$\left[n(t_1+t_2), n(t_1+t_2)+t_1 \right),$$

que es lo que queríamos demostrar.

2) Se prueba de manera similar al inciso 1). ■

4.2 El modelo matemático del marcapasos

En esta sección presentaremos dos modelos matemáticos que describen el funcionamiento del marcapasos: El Modelo Exponencial y El Modelo Logístico.

Como hemos visto, el corazón forma parte del circuito que modela al marcapasos. Este circuito aplica al órgano, en cada instante t , un voltaje que llamaremos $E(t)$. Dicho voltaje es el responsable de la corriente requerida en las cavidades del corazón. Los modelos matemáticos que presentaremos consistirán en plantear una ecuación diferencial que permita determinar el voltaje $E(t)$.

4.2.1 El Modelo Exponencial

Lleva este nombre porque, como veremos, la ecuación diferencial planteada tiene un tramo que responde a un Modelo Exponencial, según la Definición 1.17. El siguiente Teorema muestra cuál es dicho modelo.

Teorema 4.2: El Modelo Exponencial del marcapasos

Sea $E(t)$ el voltaje aplicado al corazón en el instante t . Sea $[0, t_1+t_2)$ el intervalo inicial de carga y descarga del capacitor. Entonces $E(t)$ verifica la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ -\frac{1}{R \cdot C} E(t) & \text{si } t_1 \leq t < t_1+t_2 \end{cases}$$

condiciones iniciales:

$$\begin{cases} E(0) = 0 \\ E(t_1) = F_0 \end{cases}$$

donde

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

F_0 : Voltaje de la batería.

Demostración

En el intervalo de tiempo $[0, t_1)$, el interruptor **S** está en la posición **p**. La representación gráfica del circuito es la siguiente:

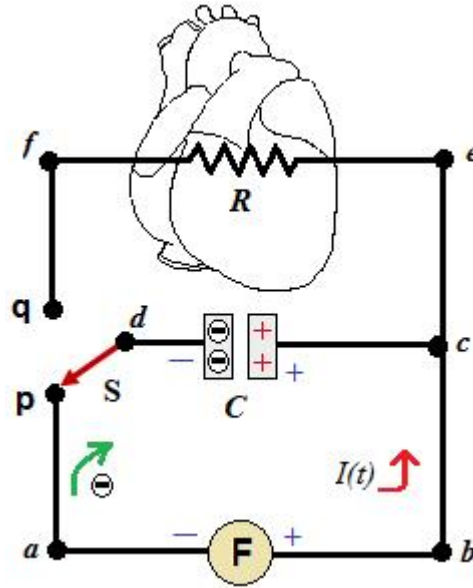


Figura 4.4: Funcionamiento del marcapasos durante el primer período de carga de C . La flecha verde indica el sentido de circulación real de la corriente.

En este caso, tiene lugar el primer período de carga del capacitor C . Como podemos apreciar en la Figura 4.4, la intensidad de corriente en el corazón es nula, ya que la malla **dcefdq**, al quedar abierta, está inhabilitada. Luego, $I(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_1)$.

Teniendo en cuenta que el corazón es un resistor y que su voltaje aplicado es $E(t)$ entonces, por la Ley de Ohm, tenemos que

$$E(t) = R \cdot I(t) = R \cdot 0 = 0 \quad \forall t \in [0, t_1)$$

Es decir

$$E(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_1) \quad [4.1]$$

En particular,

$$E(0) = 0 \quad [4.2]$$

De la ecuación [4.1] obtenemos que

$$E'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_1) \quad [4.3]$$

Donde, para el caso $t = 0$, $E'(0)$ se supone que es la derivada por derecha.

Por otro lado, si aplicamos la Segunda Ley de Kirchhoff a la malla **abcdpa** resulta

$$V_{ab} + V_{bc} - V_{cd} + V_{dp} + V_{pa} = 0 \quad [4.4]$$

Notemos que $V_{bc} = V_{dp} = V_{pa} = 0$ pues entre los nodos **b** y **c**, **d** y **p**, **p** y **a** no hay dispositivos. Además, $V_{ab} = F(t)$ y $V_{cd} = V_C$, donde $F(t)$ es el voltaje de la batería y V_C el del capacitor. Sustituyendo estos datos en [4.4] obtenemos

$$F(t) - V_C = 0 \quad [4.5]$$

Como $F(t) = F_0$, al reemplazar esta expresión en [4.5] resulta

$$V_C(t) = F_0 \quad \forall t \in [0, t_1) \quad [4.6]$$

Por otro lado, en el intervalo de tiempo $[t_1, t_1 + t_2)$, el interruptor **S** está en la posición **q** y la representación gráfica del circuito es:

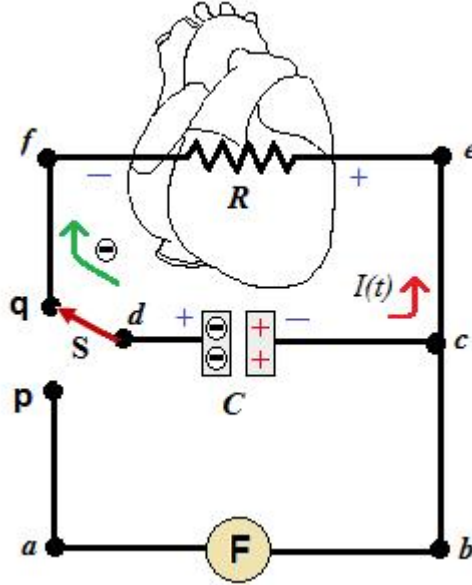


Figura 4.5: Funcionamiento del marcapasos durante el primer período de descarga de C .
La flecha verde indica el sentido de circulación real de los electrones.

Recordemos que, por convención, el sentido de movimiento de la corriente $I(t)$ es opuesto al sentido de circulación real de los electrones (confrontar con la Definición 2.31).

Según la Segunda Ley de Kirchhoff aplicada ahora a la malla **dcefd**, resulta que $\forall t \in [t_1, t_1 + t_2)$ se verifica

$$-V_{dc} + V_{ce} - V_{ef} + V_{fq} + V_{qd} = 0 \quad [4.7]$$

Observemos que $V_{ce} = V_{fq} = V_{qd} = 0$. Además, $V_{ef} = V_R$ y $V_{dc} = V_C$, donde V_R es el voltaje del resistor y V_C el del capacitor. Al reemplazar estos datos en [4.7] tenemos

$$-V_C - V_R = 0 \quad [4.8]$$

Aplicando la Tabla 2.1 a esta última ecuación obtenemos

$$-\frac{Q(t)}{C} - RI(t) = 0$$

Luego

$$RI(t) = -\frac{Q(t)}{C} \quad [4.9]$$

Como $E(t)$ es el voltaje aplicado al corazón, que funciona como resistor, entonces

$$E(t) = V_R \quad [4.10]$$

En consecuencia, por la Ley de Ohm, resulta

$$E(t) = R I(t) \quad [4.11]$$

De aquí tenemos que

$$I(t) = \frac{E(t)}{R} \quad [4.12]$$

Suponiendo que $I(t)$ es derivable en cualquier instante t , entonces, si derivamos miembro a miembro en la igualdad [4.11] tenemos

$$E'(t) = R I'(t) \quad [4.13]$$

Por otro lado, al derivar miembro a miembro [4.9] resulta

$$R I'(t) = - \frac{Q'(t)}{C} \quad [4.14]$$

Como $Q'(t) = I(t)$ por la Definición 2.27, entonces

$$I'(t) = - \frac{I(t)}{R \cdot C} \quad [4.15]$$

Reemplazando [4.12] en [4.15]

$$I'(t) = - \frac{E(t)}{R^2 \cdot C} \quad [4.16]$$

Sustituyendo [4.16] en [4.13] obtenemos

$$E'(t) = - \frac{R E(t)}{R^2 \cdot C}$$

Es decir

$$E'(t) = - \frac{E(t)}{R \cdot C} \quad \forall t \in [t_1, t_1 + t_2) \quad [4.17]$$

Probemos ahora que en el instante $t = t_1$ se verifica que $E(t_1) = F_0$.

En virtud de las ecuaciones [4.8] y [4.10] tenemos que

$-V_C(t) - V_R(t) = 0$ si $t_1 \leq t < t_1 + t_2$ y $V_R(t) = E(t)$, entonces

$-V_C(t_1) - V_R(t_1) = 0$ y $V_R(t_1) = E(t_1) \Rightarrow -V_C(t_1) - E(t_1) = 0$

Luego

$$V_C(t_1) = -E(t_1) \quad [4.18]$$

Además, por [4.6] tenemos $V_C(t) = F_0$ si $0 \leq t < t_1$, y por ser t_1 el primer instante que sigue al intervalo $[0, t_1)$, se verifica que

$$|V_C(t_1)| = |F_0| = F_0. \quad [4.19]$$

Como el sentido de la corriente a través del capacitor, durante el tiempo de carga, es opuesto al sentido de la corriente durante el tiempo de descarga, y teniendo en cuenta que si A, B son puntos de un circuito, se cumple $V_{AB} = -V_{BA}$ (ya que si es necesario suministrar una cantidad de energía para desplazar una carga desde A hasta B , una

misma cantidad de energía es insumida si esa carga se desplaza desde B hasta A), entonces, según [4.19] y [4.6] tenemos que $V_C(t_1) = -F_0$. Entonces, por [4.18] resulta $-E(t_1) = -F_0$, es decir

$$E(t_1) = F_0 \quad [4.20]$$

Por lo tanto, de las ecuaciones [4.2], [4.3], [4.17] y [4.20] obtenemos finalmente la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ -\frac{1}{R \cdot C} E(t) & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(0) = 0 \\ E(t_1) = F_0 \end{cases}$$

Observación 4.3

Como podemos comprobar, del Teorema anterior se deduce que el voltaje $E(t)$ aplicado al corazón durante el período de descarga del capacitor responde a la ecuación diferencial

$$E'(t) = -\frac{1}{R \cdot C} E(t) \quad \forall t \in [t_1, t_1 + t_2)$$

De acuerdo con la Definición 1.17, esta ecuación diferencial es un Modelo Exponencial; de ahí el nombre de este modelo matemático del marcapasos.

La siguiente Proposición muestra la solución de dicha ecuación diferencial.

Proposición 4.4: Solución del Modelo Exponencial del marcapasos

Sea la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ -\frac{1}{R \cdot C} E(t) & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(0) = 0 \\ E(t_1) = F_0 \end{cases}$$

Entonces, la solución es

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - t_1)} & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

donde

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

F_0 : Voltaje de la batería.

Demostración

Como $E'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_1]$ entonces

$$E(t) = c_1$$

donde c_1 es una constante. En particular, tomando $t = 0$ resulta

$$E(0) = c_1 \quad [4.21]$$

Por la condición inicial tenemos que

$$E(0) = 0 \quad [4.22]$$

Sustituyendo [4.22] en [4.21] obtenemos que $c_1 = 0$. En consecuencia,

$$E(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \quad [4.23]$$

Por otro lado, como $E'(t) = -\frac{1}{R \cdot C} E(t) \quad \forall t \in [t_1, t_1 + t_2]$ entonces, por la Proposición 1.18, la solución general de esta ecuación diferencial es

$$E(t) = c_2 e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} \quad [4.24]$$

donde c_2 es una constante. Para hallar esta constante, aplicamos la condición inicial

$$E(t_1) = F_0 \quad [4.25]$$

Valuando [4.24] en $t = t_1$ obtenemos

$$E(t_1) = c_2 e^{-\frac{1}{R \cdot C} t_1} \quad [4.26]$$

Reemplazando [4.25] en [4.26] resulta

$$F_0 = c_2 e^{-\frac{1}{R \cdot C} t_1}$$

Al despejar c_2 de esta última ecuación tenemos

$$c_2 = F_0 e^{\frac{1}{R \cdot C} t_1} \quad [4.27]$$

Reemplazando [4.27] en [4.24] obtenemos

$$E(t) = F_0 e^{\frac{1}{R \cdot C} t_1} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}$$

Es decir

$$E(t) = F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - t_1)} \quad \forall t \in [t_1, t_1 + t_2] \quad [4.28]$$

De [4.23] y [4.28] resulta que la solución de la ecuación diferencial es

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - t_1)} & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

■

Observación 4.5

Gracias al Modelo Exponencial del marcapasos planteado en el Teorema 4.2, el voltaje aplicado al corazón logró determinarse, en virtud de la Proposición 4.4, pero sólo en el intervalo de tiempo inicial de carga y descarga del capacitor. Es decir, pudimos hallar

$$E(t) \quad \forall t \in [0, t_1 + t_2)$$

Sin embargo, como $E(t)$ está definida $\forall t \geq 0$, ya que desde el instante en que el marcapasos es activado su funcionamiento es ininterrumpido, podemos generalizar dicho Teorema de la siguiente manera:

Teorema 4.6: El Modelo Exponencial del marcapasos: Caso general

Sea $E(t)$ el voltaje aplicado al corazón en el instante t y $n \in \mathbb{N}$. Sea $[(n-1)(t_1 + t_2), n(t_1 + t_2))$ el n -ésimo intervalo de carga y descarga del capacitor. Entonces $E(t)$ verifica la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1)(t_1 + t_2) \leq t < (n-1)(t_1 + t_2) + t_1 \\ -\frac{1}{R \cdot C} E(t) & \text{si } (n-1)(t_1 + t_2) + t_1 \leq t < n(t_1 + t_2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} E((n-1)(t_1 + t_2)) = 0 \\ E((n-1)(t_1 + t_2) + t_1) = F_0 \end{cases}$$

donde

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

F_0 : Voltaje de la batería.

Demostración

Por la Proposición 4.1, en el intervalo de tiempo $[(n-1)(t_1 + t_2), (n-1)(t_1 + t_2) + t_1)$ se produce el n -ésimo período de carga del capacitor C . En este caso, el interruptor **S** está en la posición **p**. Siguiendo los mismos pasos utilizados en la demostración del Teorema 4.2, se prueba que

$$\begin{cases} E'(t) = 0 & \forall t \in [(n-1)(t_1 + t_2), (n-1)(t_1 + t_2) + t_1) \\ E((n-1)(t_1 + t_2)) = 0 \end{cases} \quad [4.29]$$

Por otro lado, nuevamente por la Proposición 4.1, en el intervalo de tiempo $[(n-1)(t_1 + t_2) + t_1, n(t_1 + t_2))$ se produce el n -ésimo período de descarga del capacitor C . En este caso, el interruptor **S** está en la posición **q**. Recurriendo a la misma demostración utilizada en el Teorema 4.2, se verifica que

$$\begin{cases} E'(t) = -\frac{E(t)}{R \cdot C} & \forall t \in [(n-1)(t_1+t_2)+t_1, n(t_1+t_2)) \\ E((n-1)(t_1+t_2)+t_1) = F_0 \end{cases} \quad [4.30]$$

De [4.29] y [4.30] obtenemos finalmente la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1)(t_1+t_2) \leq t < (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \\ -\frac{1}{R \cdot C} E(t) & \text{si } (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \leq t < n(t_1+t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E((n-1)(t_1+t_2)) = 0 \\ E((n-1)(t_1+t_2)+t_1) = F_0 \end{cases}$$

■

El Teorema 4.6 permitirá hallar la solución general del voltaje aplicado al corazón, para cualquier instante. Esto lo probaremos en la siguiente Proposición.

Proposición 4.7: Solución General del Modelo Exponencial del marcapasos

Dado $n \in \mathbb{N}$ y la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1)(t_1+t_2) \leq t < (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \\ -\frac{1}{R \cdot C} E(t) & \text{si } (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \leq t < n(t_1+t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E((n-1)(t_1+t_2)) = 0 \\ E((n-1)(t_1+t_2)+t_1) = F_0 \end{cases}$$

Entonces la solución es

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1)(t_1+t_2) \leq t < (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - ((n-1)(t_1+t_2)+t_1))} & \text{si } (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \leq t < n(t_1+t_2) \end{cases}$$

donde

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

F_0 : Voltaje de la batería.

Demostración

Es análoga a la demostración de la Proposición 4.4. ■

Es de esperar que $E(t)$ sea una función periódica, ya que la función del marcapasos consiste en ayudar al corazón a mantener la frecuencia cardíaca. En la siguiente Proposición probaremos que efectivamente dicha función es periódica.

Proposición 4.8

Sea $E(t)$ el voltaje aplicado al corazón en el instante t . Entonces $E(t)$ es periódica, de período $T = t_1 + t_2$

donde

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

Demostración

De la Proposición 4.7 sabemos que

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1)(t_1 + t_2) \leq t < (n-1)(t_1 + t_2) + t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - ((n-1)(t_1 + t_2) + t_1))} & \text{si } (n-1)(t_1 + t_2) + t_1 \leq t < n(t_1 + t_2) \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Probemos que $E(t+T) = E(t) \quad \forall t \geq 0$.

Sea $t \geq 0$; como $\mathbb{R}_{\geq 0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(n-1)(t_1 + t_2), n(t_1 + t_2))$ entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$t \in [(n-1)(t_1 + t_2), n(t_1 + t_2))$. Por lo tanto

$(n-1)(t_1 + t_2) \leq t < (n-1)(t_1 + t_2) + t_1$ o bien $(n-1)(t_1 + t_2) + t_1 \leq t < n(t_1 + t_2)$

Consideramos dos casos:

Primer Caso: $(n-1)(t_1 + t_2) \leq t < (n-1)(t_1 + t_2) + t_1$

En este caso,

$$E(t) = 0 \quad [4.31]$$

Por otro lado, como

$$(n-1)(t_1 + t_2) \leq t < (n-1)(t_1 + t_2) + t_1$$

Entonces, sumando miembro a miembro $t_1 + t_2$ obtenemos

$$(n-1)(t_1 + t_2) + t_1 + t_2 \leq t + t_1 + t_2 < (n-1)(t_1 + t_2) + t_1 + t_1 + t_2$$

Es decir

$$n(t_1 + t_2) \leq t + t_1 + t_2 < n(t_1 + t_2) + t_1$$

En consecuencia

$$E(t + t_1 + t_2) = 0 \quad [4.32]$$

Luego, de [4.31] y [4.32] resulta que $E(t + t_1 + t_2) = E(t)$

Segundo Caso: $(n-1)(t_1+t_2)+t_1 \leq t < n(t_1+t_2)$

En este caso

$$E(t) = F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - ((n-1)(t_1+t_2) + t_1))} \quad [4.33]$$

Como $(n-1)(t_1+t_2)+t_1 \leq t < n(t_1+t_2)$

Luego, sumando miembro a miembro t_1+t_2 resulta

$$(n-1)(t_1+t_2)+t_1+t_1+t_2 \leq t+t_1+t_2 < n(t_1+t_2)+t_1+t_2$$

Es decir

$$n(t_1+t_2)+t_1 \leq t+t_1+t_2 < (n+1)(t_1+t_2)$$

Por lo tanto

$$E(t+t_1+t_2) = F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t+t_1+t_2 - (n(t_1+t_2) + t_1))} = F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - ((n-1)(t_1+t_2) + t_1))}$$

De aquí obtenemos que

$$E(t+t_1+t_2) = F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - ((n-1)(t_1+t_2) + t_1))} \quad [4.34]$$

En consecuencia, de [4.33] y [4.34] resulta que $E(t+t_1+t_2) = E(t)$ ■

Observación 4.9

De la Proposición 4.7 sabemos que el voltaje aplicado al corazón es una función definida por tramos. Es decir,

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - t_1)} & \text{si } t_1 \leq t < t_1+t_2 \\ 0 & \text{si } t_1+t_2 \leq t < (t_1+t_2) + t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - ((t_1+t_2) + t_1))} & \text{si } (t_1+t_2) + t_1 \leq t < 2(t_1+t_2) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Cabe preguntarnos si es posible expresar esta función mediante una sola fórmula. La respuesta es que sí, y para probarlo, necesitaremos el siguiente concepto previo.

Definición 4.10: La Función “Salto Unidad”

Sea $a \geq 0$. La función “Salto Unidad en a ”, simbolizada por $u_a(t)$, es

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

Si $a = 1$, la función Salto Unidad recibe el nombre de “Función escalón de Heaviside”. Se la suele simbolizar por $H(t)$.

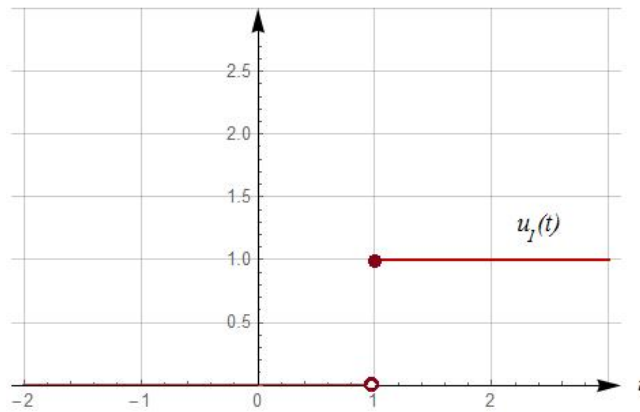


Figura 4.6: Función Salto Unidad en 1, también llamada “Función de Heaviside”.

La resta de dos funciones Salto Unidad genera una nueva función que será muy utilizada para nuestros propósitos. Dicha función la presentamos en la siguiente Proposición:

Proposición 4.11

Sean $a, b \geq 0$ con $a < b$. Entonces

$$u_a(t) - u_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración

$$u_a(t) - u_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases} - \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq b \\ 0 & \text{si } t < b \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \blacksquare$$

La diferencia de dos funciones Salto Unidad nos permitirá expresar una función definida por tramos mediante una sola fórmula, como veremos a continuación.

Ejemplo 4.12

Sea

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 2t & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ \sin(t) & \text{si } 4 \leq t < 10 \\ e^{4t} & \text{si } 10 \leq t < 20 \end{cases}$$

Entonces $f(t)$ puede expresarse mediante una sola fórmula del siguiente modo:

$$f(t) = (t^2 + 2t) \cdot (u_2(t) - u_4(t)) + \sin(t) \cdot (u_4(t) - u_{10}(t)) + e^{4t} \cdot (u_{10}(t) - u_{20}(t)) \quad \blacksquare$$

La siguiente Proposición muestra finalmente cómo expresar el voltaje aplicado al corazón mediante una sola fórmula.

Proposición 4.13

Sea $E(t)$ el voltaje aplicado al corazón en el instante t , para el Modelo Exponencial del marcapasos. Entonces

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - (n-1)T - t_1)} \left(u_{(n-1)T + t_1}(t) - u_{nT}(t) \right)$$

donde

R : Resistencia del corazón.

$T = t_1 + t_2$.

C : Capacitancia del capacitor.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

F_0 : Voltaje de la batería.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

Demostración

Por la Proposición 4.7, tenemos que

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1) \cdot T \leq t < (n-1) \cdot T + t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - (n-1)T - t_1)} & \text{si } (n-1) \cdot T + t_1 \leq t < n \cdot T \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Entonces, aplicando la Proposición 4.11 y siguiendo la resolución del Ejemplo 4.12, resulta

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \left(u_{(n-1)T}(t) - u_{(n-1)T + t_1}(t) \right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - (n-1)T - t_1)} \left(u_{(n-1)T + t_1}(t) - u_{nT}(t) \right)$$

Por lo tanto

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - (n-1)T - t_1)} \left(u_{(n-1)T + t_1}(t) - u_{nT}(t) \right) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 4.14

Se tienen los siguientes datos:

$$\begin{cases} F_0 = 12 \text{ V} \\ C = 1 \text{ F} \\ R = 1 \text{ } \Omega \\ t_1 = 2 \text{ seg} \\ t_2 = 1 \text{ seg} \end{cases}$$

Graficar $E(t)$ en el intervalo $[0, 9]$ utilizando el software Wolfram Mathematica.

Solución

Vemos que $T = t_1 + t_2 = 3\text{seg}$, y puesto que la longitud del intervalo dado es 9 segundos, entonces, en dicho lapso tienen lugar $9:3 = 3$ intervalos de un período de duración cada uno, vale decir, tienen lugar 3 períodos de descarga. En consecuencia, basándonos en la Proposición 4.13, nuestra expresión de $E(t)$ consistirá en una suma de 3 términos:

$$E(t) = \sum_{n=1}^3 F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C} (t - (n-1)T - t_1)} \left(u_{(n-1)T + t_1}(t) - u_{nT}(t) \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^3 12 e^{-(t - (n-1) \cdot 3 - 2)} \left(u_{(n-1) \cdot 3 + 2}(t) - u_{n \cdot 3}(t) \right)$$

Por lo tanto

$$E(t) = \sum_{n=1}^3 12 e^{-(t - 3(n-1) - 2)} \left(u_{3(n-1) + 2}(t) - u_{3n}(t) \right)$$

Para graficar $E(t)$ ejecutamos el comando:

$$\text{Plot} \left[\sum_{n=1}^3 12 e^{-(t - 3(n-1) - 2)} \left(\text{UnitStep}[t - (3(n-1) + 2)] - \text{UnitStep}[t - 3n] \right), \{t, 0, 9\} \right]$$

y obtenemos el siguiente gráfico:



Figura 4.7: Gráfica del voltaje aplicado al corazón en el intervalo $[0,9]$.

4.2.2 El Modelo Logístico

El Modelo Logístico del marcapasos surge como un refinamiento del Modelo Exponencial por la siguiente razón:

Si el corazón funcionara exactamente como si fuera un resistor, entonces el voltaje aplicado al corazón durante el período de descarga del capacitor respondería a un Modelo Exponencial, como lo probamos en el Teorema 4.2.

Sin embargo, esto no es lo que ocurre precisamente con el tejido cardíaco. Es por ello que May Cen y Tamayo Loeza, autores de la publicación que desarrollamos en esta tesis, proponen modelar el voltaje aplicado al corazón, en el intervalo inicial de descarga $[t_1, t_1 + t_2)$, mediante una ecuación diferencial logística. Esto le pondrá más realidad al Modelo Exponencial, como veremos a continuación.

En el Modelo Exponencial del marcapasos tenemos que

$$E'(t) = \sim E(t) \quad \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \quad [4.35]$$

donde

$$\sim = - \frac{1}{R \cdot C}$$

Como $\sim < 0$ entonces $E'(t) < 0$ en el intervalo $[t_1, t_1 + t_2)$. Por lo tanto, la ecuación diferencial [4.35] indica que la velocidad con que decrece el voltaje aplicado al corazón, en cada momento, es directamente proporcional a la cantidad presente de voltaje. Es por esto que la constante de proporcionalidad $\sim$ recibe el nombre de “*tasa de decrecimiento*”.

Pero las células cardíacas, vistas en su conjunto, son “*tejidos excitables*” y funcionalmente semejantes a las neuronas.

Todos los “*tejidos excitables*” presentan la característica de que cuando son sometidos a una pequeña estimulación, registran una reacción que es aproximadamente proporcional a la intensidad de la estimulación recibida, siempre que esta intensidad supere al *umbral*. Pero si la intensidad del estímulo es grande o excede cierto valor, las células cardíacas se inhiben, disminuyendo abruptamente su reacción.

En particular, si el estímulo es el voltaje aplicado por el marcapasos, se puede comprobar que el voltaje del corazón disminuye más abruptamente, cuanto mayor sea el voltaje aplicado por el marcapasos.

Es por ello que la tasa de decrecimiento $\sim$ *no es constante*, sino *aproximadamente constante*. Por esta razón es reemplazada por la siguiente expresión:

$$\sim = - E(t) \quad [4.36]$$

donde el factor $E(t)$, con > 0 , indicará una disminución abrupta de la tasa $\sim$ cuando el voltaje $E(t)$ aplicado al corazón sea grande, tal como ocurre en realidad. Se supone que es un número muy pequeño, y que depende de las características de los dispositivos que componen un marcapasos, es decir, de la resistencia R del corazón, de la capacitancia C del capacitor y del voltaje F_0 de la batería.

Entonces, reemplazando [4.36] en [4.35] obtenemos

$$E'(t) = (\sim - E(t)) E(t)$$

es decir

$$E'(t) = \sim E(t) - (E(t))^2$$

O equivalentemente

$$E'(t) = \sim E(t) \left(1 - \frac{E(t)}{\sim} \right) \quad \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \quad [4.37]$$

De acuerdo con la Definición 1.21, la ecuación diferencial [4.37] responde a un Modelo Logístico. En virtud de lo anteriormente expuesto, surge el modelo matemático que mostramos a continuación.

Definición 4.15: El Modelo Logístico del marcapasos

Sea $E(t)$ el voltaje aplicado al corazón en el instante t . Sea $[0, t_1 + t_2)$ el intervalo inicial de carga y descarga del capacitor. Entonces el Modelo Logístico del marcapasos es:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ \sim E(t) - (E(t))^2 & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales: $\begin{cases} E(0) = 0 \\ E(t_1) = F_0 \end{cases}$

donde

$$\sim = -\frac{1}{R \cdot C}, \quad > 0$$

F_0 : Voltaje de la batería.

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

En la siguiente Proposición mostraremos la solución del Modelo Logístico del marcapasos.

Proposición 4.16: Solución del Modelo Logístico del marcapasos

Dada la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ \sim E(t) - (E(t))^2 & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(0) = 0 \\ E(t_1) = F_0 \end{cases}$$

su solución es

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ \frac{\sim F_0 e^{\sim(t-t_1)}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim(t-t_1)}} & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

donde

$$\sim = -\frac{1}{R \cdot C}, \quad > 0$$

F_0 : Voltaje de la batería.

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

Demostración

Si $E'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_1)$ entonces, siguiendo los mismos pasos efectuados en la demostración de la Proposición 4.4, resulta

$$E(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_1) \quad [4.38]$$

Sea ahora

$$H(t) = E(t + t_1) \quad \forall t \in [0, t_2) \quad [4.39]$$

con lo cual tenemos $H(0) = E(0 + t_1) = E(t_1)$, es decir, de acuerdo con la segunda condición inicial,

$$H(0) = F_0 \quad [4.40]$$

Además, de [4.37] resulta

$$E'(t + t_1) = \sim E(t + t_1) \left(1 - \frac{E(t + t_1)}{\sim /} \right) \quad \text{si } 0 \leq t < t_2, \text{ que según [4.39] equivale a}$$

$$H'(t) = \sim H(t) \left(1 - \frac{H(t)}{\sim /} \right) \quad \text{si } 0 \leq t < t_2 \quad [4.41]$$

Las igualdades [4.41] y [4.40] constituyen las condiciones de hipótesis de la Proposición 1.23 acerca de la solución del Modelo Logístico, de lo cual se desprende que

$$H(t) = \frac{\sim /}{1 + \left(\frac{(\sim /) - F_0}{F_0} \right) e^{-\sim \cdot t}} \quad [4.42]$$

Desarrollando y utilizando equivalencias convenientes en [4.42], obtenemos

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{\sim}{\frac{F_0}{F_0} + \frac{((\sim /) - F_0) \cdot e^{-\sim \cdot t}}{F_0}} = \frac{\sim}{F_0 + \left(\frac{\sim}{F_0} - F_0 \right) \cdot e^{-\sim \cdot t}} = \\ &= \frac{\sim F_0}{F_0 + (\sim - F_0) \cdot e^{-\sim \cdot t}} = \frac{\frac{\sim F_0}{e^{-\sim \cdot t}}}{F_0 + (\sim - F_0) \cdot e^{-\sim \cdot t}} = \frac{\sim F_0 e^{\sim \cdot t}}{F_0 e^{\sim \cdot t} + \sim - F_0} \end{aligned}$$

es decir

$$H(t) = \frac{\sim F_0 e^{\sim \cdot t}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim \cdot t}} \quad [4.43]$$

Pero de [4.39] resulta $H(t - t_1) = E(t + t_1 - t_1) \quad \forall t \in [t_1, t_1 + t_2]$, es decir

$$E(t) = H(t - t_1) \quad \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \quad [4.44]$$

De [4.44] y [4.43] obtenemos

$$E(t) = \frac{\sim F_0 e^{\sim \cdot (t - t_1)}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim \cdot (t - t_1)}} \quad \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \quad [4.45]$$

De [4.38] y [4.45] resulta finalmente que

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ \frac{\sim F_0 e^{\sim \cdot (t - t_1)}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim \cdot (t - t_1)}} & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Del mismo modo que procedimos para el Modelo Exponencial del marcapasos, podemos hallar la solución general del voltaje aplicado al corazón, en cada instante, para el caso del Modelo Logístico. En la siguiente Proposición enunciamos dicha solución.

Proposición 4.17: Solución General del Modelo Logístico del marcapasos

Dado $n \in \mathbb{N}$ y la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1)(t_1+t_2) \leq t < (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \\ -E(t) - (E(t))^2 & \text{si } (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \leq t < n(t_1+t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E((n-1)(t_1+t_2)) = 0 \\ E((n-1)(t_1+t_2)+t_1) = F_0 \end{cases}$$

Entonces la solución es

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n-1)(t_1+t_2) \leq t < (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \\ \frac{\sim F_0 e^{\sim(t - ((n-1)(t_1+t_2)+t_1))}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim(t - ((n-1)(t_1+t_2)+t_1))}} & \text{si } (n-1)(t_1+t_2)+t_1 \leq t < n(t_1+t_2) \end{cases}$$

donde

$$\sim = -\frac{1}{R \cdot C}, \quad > 0$$

F_0 : Voltaje de la batería.

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

Demostración

Es análoga a la Proposición 4.7. ■

La siguiente Proposición muestra finalmente cómo expresar el voltaje enviado al corazón mediante una sola fórmula.

Proposición 4.18

Sea $E(t)$ el voltaje aplicado al corazón en el instante t , para el Modelo Logístico del marcapasos. Entonces

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sim F_0 e^{\sim(t - (n-1)T - t_1)}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim(t - (n-1)T - t_1)}} \left(u_{(n-1)T + t_1}(t) - u_{nT}(t) \right)$$

donde

$$\sim = -\frac{1}{R \cdot C}, \quad > 0, \quad T = t_1 + t_2$$

F_0 : Voltaje de la batería.

R : Resistencia del corazón.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

C : Capacitancia del capacitor.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

Demostración

Es similar al caso de la Proposición 4.13. ■

¿Cómo hallar la constante del Modelo Logístico del marcapasos?

La siguiente Proposición propone una manera de calcular la constante que figura en el Modelo Logístico del marcapasos:

Proposición 4.19

Sea $E(t)$ el voltaje aplicado al corazón en el instante t , para el Modelo Logístico del marcapasos. Entonces

$$\cong \left| -\frac{1}{E(t_1) \cdot R \cdot C} - \frac{E(t_1 + \Delta t) - E(t_1)}{\Delta t \cdot (E(t_1))^2} \right|$$

donde

R : Resistencia del corazón.

Δt : Lapso de tiempo pequeño.

C : Capacitancia del capacitor.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

Demostración

Si $t \in [t_1, t_1 + t_2)$ entonces, por el Teorema de Taylor para funciones de una variable, tenemos que

$$E(t) = E(t_1) + E'(t_1)(t - t_1) + E''(a) \frac{(t - t_1)^2}{2!}$$

donde $t_1 < a < t$.

En particular, si tomamos $t = t_1 + \Delta t$ con Δt próximo a cero, de modo tal que $(t_1 + \Delta t) \in [t_1, t_1 + t_2)$ entonces

$$\begin{aligned} E(t_1 + \Delta t) &= E(t_1) + E'(t_1)(t_1 + \Delta t - t_1) + E''(a) \frac{(t_1 + \Delta t - t_1)^2}{2!} = \\ &= E(t_1) + E'(t_1) \Delta t + E''(a) \frac{(\Delta t)^2}{2} \end{aligned}$$

Es decir

$$E(t_1 + \Delta t) = E(t_1) + E'(t_1) \Delta t + E''(a) \frac{(\Delta t)^2}{2!} \quad [4.46]$$

Por otro lado, como

$$E'(t_1) = \sim E(t_1) - (E(t_1))^2$$

con $\sim = -\frac{1}{R \cdot C}$, entonces

$$E'(t_1) = -\frac{1}{R \cdot C} E(t_1) - (E(t_1))^2 \quad [4.47]$$

Sustituyendo [4.47] en [4.46] resulta

$$E(t_1 + \Delta t) = E(t_1) + \left(-\frac{1}{R \cdot C} E(t_1) - (E(t_1))^2 \right) \Delta t + E''(a) \frac{(\Delta t)^2}{2!}$$

Despejando de esta última expresión obtenemos

$$= -\frac{1}{E(t_1) \cdot R \cdot C} - \frac{E(t_1 + \Delta t) - E(t_1)}{\Delta t \cdot (E(t_1))^2} + \frac{E''(a)}{2 \cdot (E(t_1))^2} \cdot \Delta t$$

Al ser Δt es un número próximo a cero, el último término de esta expresión puede despreciarse. Además, teniendo en cuenta que > 0 , podemos afirmar que

$$\cong \left| -\frac{1}{E(t_1) \cdot R \cdot C} - \frac{E(t_1 + \Delta t) - E(t_1)}{\Delta t \cdot (E(t_1))^2} \right| \quad \blacksquare$$

En el siguiente Ejemplo mostraremos cómo se ajustan a la realidad los Modelos Exponencial y Logístico del marcapasos. Los datos del experimento con un marcapasos real fueron extraídos de la publicación que estamos desarrollando.

Ejemplo 4.20

Se ha diseñado un marcapasos con una batería de voltaje $F_0 = 12 \text{ V}$ y un capacitor de capacitancia $C = 1 \text{ «F}$. El mismo le fue insertado a un paciente, a modo de prueba. Se tomó como $t_1 = 0 \text{ seg.}$ al tiempo de carga del capacitor, mientras que el tiempo de descarga del capacitor fue $t_2 = 25.1 \text{ msec.}$ Se efectuó la medición real de los niveles de voltaje con respecto al tiempo, obteniéndose los siguientes resultados:

Tiempo t (mseg.)	0	5	10	15	20	25
Voltaje V (Voltios)	11.0	6.7	4.0	2.3	1.3	0.8

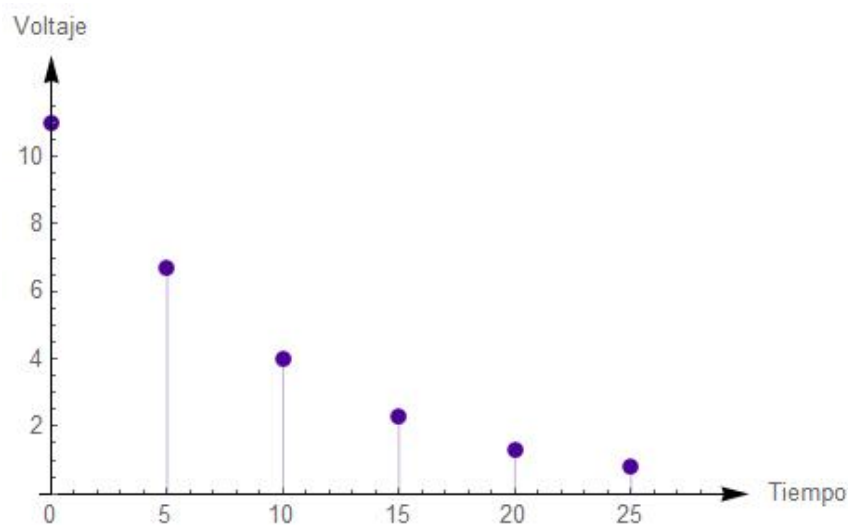


Figura 4.8: Representación gráfica de los datos reales del voltaje del marcapasos.

- a) Plantear el Modelo Exponencial del marcapasos en el intervalo $[0, t_1 + t_2)$, considerando $R = 10 \text{ k}\Omega$.
- b) Calcular el valor de la constante del Modelo Logístico del marcapasos.
- c) Plantear Modelo Logístico del marcapasos en el intervalo $[0, t_1 + t_2)$.
- d) Comparar los Modelos Exponencial y Logístico con el modelo real del marcapasos. ¿Cuál de estos dos modelos se ajusta más a la realidad?

Solución

- a) De la Proposición 4.4 resulta que el Modelo Exponencial del marcapasos es

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ F_0 e^{-\frac{1}{R \cdot C}(t-t_1)} & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

Es decir

$$E(t) = 12 e^{-\frac{1}{10}t} \text{ si } 0 \leq t < 25.1$$

- b) Por la Proposición 4.19 sabemos que

$$\cong \left| -\frac{1}{E(t_1) \cdot R \cdot C} - \frac{E(t_1 + \Delta t) - E(t_1)}{\Delta t \cdot (E(t_1))^2} \right|$$

En este caso, de acuerdo a los datos que figuran en la tabla del enunciado, tenemos que

$$E(t_1) = E(0) = 11 \text{ V.}$$

Como Δt debe ser un valor próximo a cero, consideraremos $\Delta t = 0.0001 \text{ mseg.}$

Por otro lado, necesitamos calcular $E(t_1 + \Delta t) = E(0.0001)$. Como este valor no figura en la tabla, haremos una interpolación lineal con los datos de sus dos primeras columnas. Es decir, hallaremos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 11)$ y $(5, 6.7)$.

De este modo, la función interpolante es

$$y(t) = 11 - 0.86 t$$

Luego,

$$E(t_1 + \Delta t) = E(0.0001) \cong y(0.0001) = 10.999 \text{ V.}$$

En consecuencia

$$\cong \left| -\frac{1}{11 \cdot (10)} - \frac{10.999 - 11}{(0.0001) \cdot (11)^2} \right| = 0.00082$$

De este modo, si efectuamos redondeo simétrico con tres cifras decimales, resulta $= 0.001$.

c) Por la Proposición 4.16, el Modelo Logístico del marcapasos es

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ \frac{\sim F_0 e^{\sim(t-t_1)}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim(t-t_1)}} & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

Donde $\sim = -\frac{1}{R \cdot C}$. Es decir

$$E(t) = \frac{-1.2 e^{-\frac{1}{10}t}}{-\frac{1}{10} - 12(0.001) + (0.001)12e^{-\frac{1}{10}t}} \quad \text{si } 0 \leq t < 25.1$$

d) Para comparar los Modelos Exponencial y Logístico con el marcapasos real, volcamos en la siguiente tabla los resultados numéricos que se obtienen al valuar las funciones exponencial y logística que resultaron de los incisos anteriores:

Tiempo t	Voltaje V		
(mseg)	Modelo Exponencial	Modelo Logístico	Marcapasos real
0	12	12	11.0
5	7.2	6.9	6.7
10	4.4	4.1	4.0
15	2.6	2.4	2.3
20	1.6	1.4	1.3
25	0.9	0.8	0.8

La siguiente Figura muestra las gráficas de ambos modelos, además de los datos del marcapasos real:

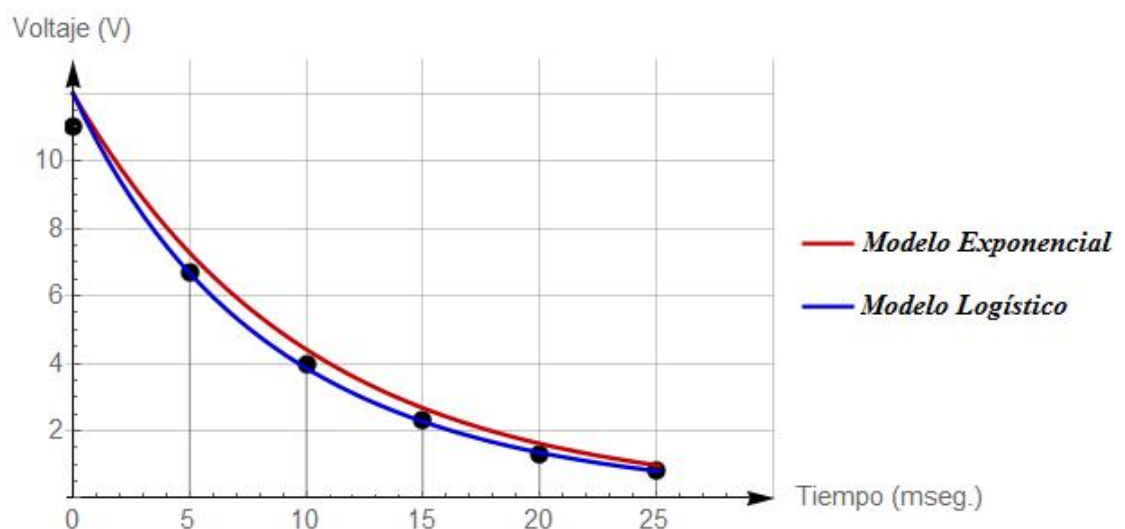


Figura 4.9: Representación gráfica de los Modelos Exponencial y Logístico, junto con los datos reales del voltaje del marcapasos.

Observando los resultados de la tabla, podemos comprobar que el Modelo Logístico se ajusta mejor a la realidad, ya que los valores del voltaje se parecen más a los del marcapasos real. ■

Observación 4.21

La Figura 4.9 del Ejemplo anterior permite analizar las curvas de voltaje que se obtienen con los Modelos Exponencial y Logístico. De la misma gráfica deducimos que el Modelo Logístico requiere una menor emisión de voltaje, y, por lo tanto, de energía, para contraer al miocardio, ya que los valores del voltaje no se encuentran por debajo del *umbral de estimulación*. Recordemos que, según lo desarrollado en el Capítulo anterior, el *umbral de estimulación* es el mínimo voltaje que hay que aplicar a las células del miocardio para que éstas reaccionen y se contraigan.

En base a estas observaciones, podemos afirmar que, con una menor inversión de energía, comparándola con el Modelo Exponencial, es posible alcanzar el *umbral de estimulación*. Este hecho sugiere una minimización en el desgaste de la batería, lo cual implicaría alargar su vida útil.

4.3 Simulación del marcapasos

Diseñamos una simulación, mediante el software Wolfram Mathematica 10.0, en la que se pueden visualizar las gráficas de los Modelos Exponencial y Logístico del marcapasos. La misma contiene los siguientes parámetros:

Voltaje de la batería (F_0), Capacitancia (C), Resistencia (R), Tiempo de carga del capacitor (t_1), Tiempo de descarga del capacitor (t_2) y el coeficiente β (el caso $\beta = 0$ coincide con el Modelo Exponencial). Los datos de los parámetros se ingresan a través del siguiente cuadro de diálogo:

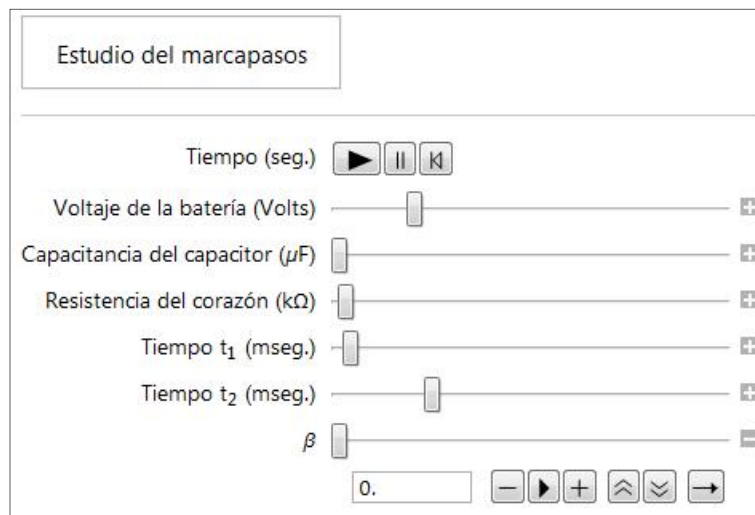


Figura 4.10: Cuadro de diálogo que permiten ingresar los valores de los parámetros.

Al ejecutar la simulación, se mostrará la gráfica del voltaje en función del tiempo, en un lapso comprendido entre 0 seg. y 100 mseg. y de acuerdo al modelo matemático

seleccionado. Además, se visualizará cómo el interruptor del marcapasos pasa alternativamente de los puntos p a q , durante los períodos de carga y de descarga. En la siguiente Figura se visualizan los resultados obtenidos al ejecutar la simulación.

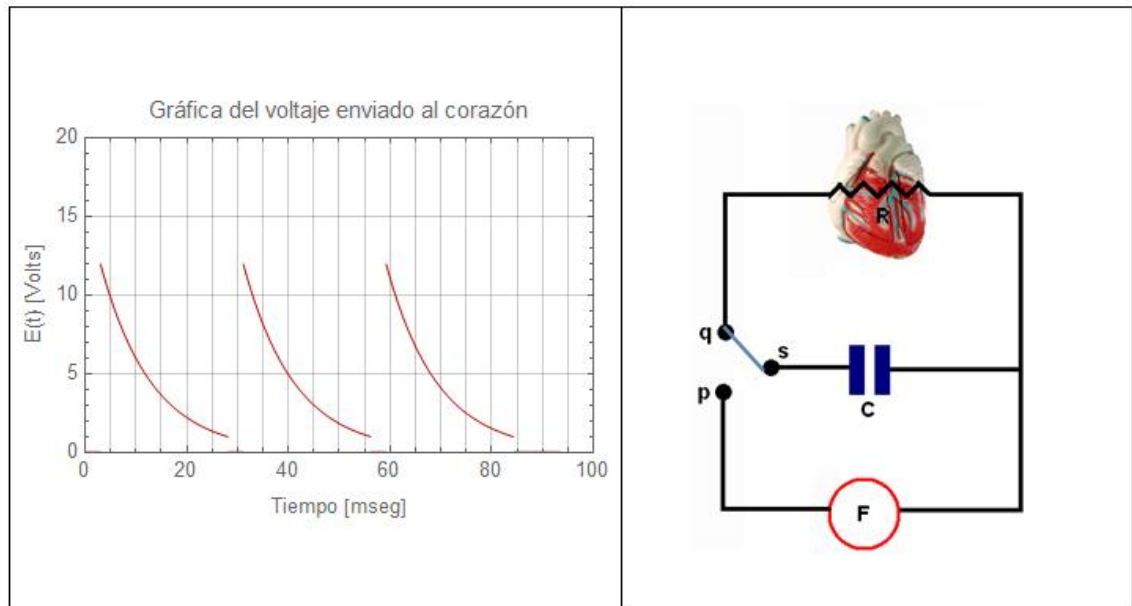


Figura 4.11: Gráficos que aparecen al ejecutar la simulación del marcapasos.

En este caso, los valores seleccionados para los parámetros fueron:

Voltaje de la batería (F_0): 12 V .

Capacitancia (C): 1 «F.

Resistencia (R): 10 kΩ .

Tiempo de carga del capacitor (t_1): 0 mseg.

Tiempo de descarga del capacitor (t_2): 25 mseg.

Coefficiente : 0.001. ■

Para finalizar este trabajo de tesis mostraremos cómo, mediante una simulación, es posible chequear el funcionamiento de un marcapasos, antes de insertárselo a un paciente que padece ciertas anomalías cardíacas.

4.4 Verificación del efecto del marcapasos mediante una simulación

La simulación por ordenadores es una poderosa herramienta que permite chequear, a un bajo costo, si el modelo matemático planteado se ajusta o no a la realidad. También se utiliza para predecir cómo se comportará el fenómeno que se está modelando. En esta sección efectuaremos la simulación de una de las anomalías cardíacas que puede ser corregida mediante un marcapasos: *la bradicardia*. La simulación consistirá en mostrar el electrocardiograma de un corazón con bradicardia, para luego corregir su funcionamiento mediante un marcapasos.

¿Qué es la bradicardia?

La bradicardia es la frecuencia cardíaca baja, debajo de 60 latidos por minuto. Normalmente, cuando está en reposo, el corazón de un adulto late entre 60 y 100 veces por minuto. La bradicardia puede ser un problema grave si el corazón no bombea suficiente sangre rica en oxígeno al cuerpo. En este caso, el paciente puede sufrir desmayos frecuentes, fatiga, dificultad para respirar o padecer un paro cardíaco repentino.

Esta anomalía, en muchos casos, se debe a alguna alteración en el sistema eléctrico del corazón y puede solucionarse con el implante de un marcapasos. De este modo, el marcapasos ayudará a que el corazón mantenga una frecuencia cardíaca adecuada.

¿Cómo detectar clínicamente la bradicardia?

La bradicardia se detecta mediante un electrocardiograma.

Un electrocardiograma (ECG) es la representación gráfica de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo, que se obtiene con un electrocardiógrafo en forma de cinta continua.

La actividad eléctrica de las células cardíacas produce un patrón característico de variaciones de voltaje. En un ECG se representa gráficamente esas variaciones del voltaje en función del tiempo, por lo que un electrocardiógrafo es comparable a un voltímetro que realiza la función de registrador.

La forma de onda de una señal de electrocardiograma puede asociarse con los picos y valles etiquetados como **P**, **Q**, **R**, **S** y **T**, según aparece en la Figura 4.12. Cada pico y valle representa una actividad específica dentro de la cavidad eléctrica del corazón, como por ejemplo la despolarización y polarización de las aurículas y ventrículos.

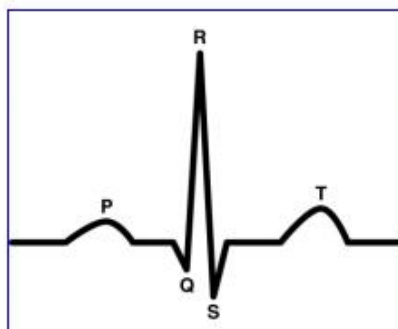


Figura 4.12: Señal de electrocardiograma normal.
Fuente: <https://es.wikipedia.org/wiki/Electrocardiograma>

En la siguiente figura podemos apreciar dos ECG: el de una persona normal y el de otra con bradicardia.

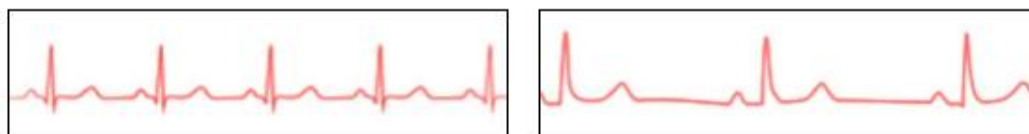


Figura 4.13: Izquierda: Electrocardiograma de un corazón normal. Derecha: Electrocardiograma de un corazón con bradicardia.

Fuente: <https://www.mayoclinic.org/es-es/diseases-conditions/bradycardia/symptoms-causes/syc-20355474>

Para mostrar cómo, mediante una simulación, es posible visualizar la manera de corregir la bradicardia mediante un marcapasos, plantearemos primeramente un modelo matemático que describa el comportamiento de un electrocardiograma.

Modelización matemática de un electrocardiograma

El Modelo de Gois, presentado en el año 2009, es uno de los modelos matemáticos más recientes que da una buena aproximación de un ECG. Según la Referencia citada en [7] y [8], el modelo matemático se plantea en términos del siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_{SA} x_2(t) (x_1(t) - w_{SA1}) (x_1(t) - w_{SA2}) - x_1(t) (x_1(t) + d_{SA}) (x_1(t) + e_{SA}) \\ \quad + \circ_{SA} \sin(w_{SA} t) - k_{SA-AV} (x_1(t) - x_3(t)) - k_{SA-HP} (x_1(t) - x_5(t)) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = -a_{AV} x_4(t) (x_3(t) - w_{AV1}) (x_3(t) - w_{AV2}) - x_3(t) (x_3(t) + d_{AV}) (x_3(t) + e_{AV}) \\ \quad + \circ_{AV} \sin(w_{AV} t) - k_{AV-SA} (x_3(t) - x_1(t)) - k_{AV-HP} (x_3(t) - x_5(t)) \\ \dot{x}_5(t) = x_6(t) \\ \dot{x}_6(t) = -a_{HP} x_6(t) (x_5(t) - w_{HP1}) (x_5(t) - w_{HP2}) - x_5(t) (x_5(t) + d_{HP}) (x_5(t) + e_{HP}) \\ \quad + \circ_{HP} \sin(w_{HP} t) - k_{HP-SA} (x_5(t) - x_1(t)) - k_{HP-AV} (x_5(t) - x_3(t)) \end{cases}$$

Con condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0.7, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0.2, x_5(0) = 0, x_6(0) = 0.7$$

Los pares $(x_1(t), x_2(t))$, $(x_3(t), x_4(t))$ y $(x_5(t), x_6(t))$ describen las oscilaciones de los nodos sino-auricular, aurículo-ventricular y de His-Purkinje respectivamente. Los parámetros que figuran en el sistema de ecuaciones permiten reproducir ritmos cardíacos normales y patológicos. No es el objetivo de esta tesis analizar el significado de estos parámetros. En la siguiente tabla mostramos sus valores para el caso de un ECG normal:

$a_{SA} = 3$	$a_{AV} = 3$	$a_{HP} = 5$
$w_{SA1} = 0.2$	$w_{AV1} = 0.1$	$w_{HP1} = 1$
$w_{SA2} = -1.9$	$w_{AV2} = -0.1$	$w_{HP2} = -1$
$d_{SA} = 3$	$d_{AV} = 3$	$d_{HP} = 3$
$e_{SA} = 4.9$	$e_{AV} = 3$	$e_{HP} = 7$
$w_{SA} = 0$	$w_{AV} = 0$	$w_{HP} = 0$
$\circ_{SA} = 1$	$\circ_{AV} = 1$	$\circ_{HP} = 20$
$k_{SA-AV} = 0$	$k_{AV-SA} = 5$	$k_{HP-SA} = 0$
$k_{SA-HP} = 0$	$k_{AV-HP} = 0$	$k_{HP-AV} = 20$

Considerando $k_{HP-AV} = 15$ y manteniendo el valor del resto de los parámetros idénticos a los de la tabla, el sistema resultante describe un ECG con patología de *bradicardia*. Con este modelo matemático, la señal ECG queda generada mediante la función

$$ECG(t) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1(t) + \gamma_3 x_3(t) + \gamma_5 x_5(t)$$

Donde

ECG Normal: $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 0.1, \gamma_3 = 0.05, \gamma_5 = 0.4$

ECG con bradicardia: $\gamma_0 = 0.5, \gamma_1 = 0.2, \gamma_3 = 0.04, \gamma_5 = 0.02$

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela un electrocardiograma no tiene solución analítica. Para hallar su solución numérica recurrimos al software Wolfram Mathematica 10.0, utilizando el comando *NDSolve*. En la siguiente figura mostramos la gráfica de la función $ECG(t)$, correspondiente al modelado de un electrocardiograma normal.

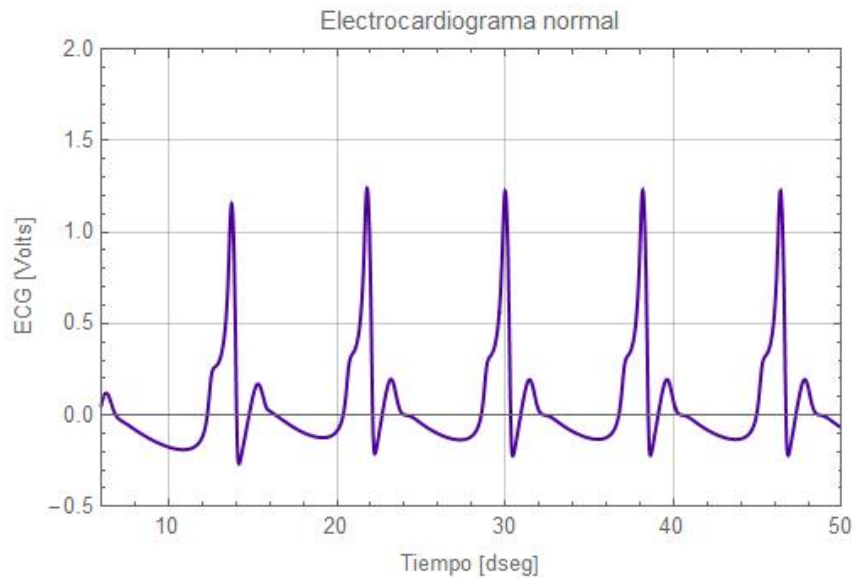


Figura 4.14: Electrocardiograma normal.

Corrección de la bradicardia mediante un marcapasos

Como mencionamos anteriormente, la bradicardia puede ser corregida mediante un marcapasos. Antes de insertárselo al paciente, es posible diseñar una simulación que permita determinar los valores convenientes de la capacitancia, voltaje de la batería, tiempo de carga y de descarga del capacitor, para lograr que el corazón recupere su ritmo normal de latido.

Al incorporar un marcapasos a un paciente con bradicardia, el voltaje existente en su corazón, es decir, su electrocardiograma, quedará expresado mediante la función

$$ECGB(t) = 0.5 + 0.2 b_1(t) + 0.04 b_3(t) + 0.02 b_5(t) + E(t)$$

Donde

$(b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t), b_6(t))$: es la solución del Modelo de Gois del ECG, para un paciente con bradicardia.

$E(t)$: es el Modelo Logístico del marcapasos. Es decir,

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sim F_0 e^{\sim(t - (n-1)T - t_1)}}{\sim - F_0 + F_0 e^{\sim(t - (n-1)T - t_1)}} \left(u_{(n-1)T + t_1}(t) - u_{n.T}(t) \right)$$

Con

$$\sim = - \frac{1}{R \cdot C} \geq 0$$

R : Resistencia del corazón.

$$T = t_1 + t_2.$$

C : Capacitancia del capacitor.

t_1 : Tiempo de carga del capacitor.

F_0 : Voltaje de la batería.

t_2 : Tiempo de descarga del capacitor.

La siguiente simulación muestra tres gráficos: un ECG normal, un ECG con bradicardia y un ECG con bradicardia y marcapasos. En este último gráfico se utilizó la función $ECGB(t)$ para determinar, regulado los controladores, qué valores de R , C , t_1 , t_2 , F_0 y β son los apropiados para que dicho ECG se asemeje a un ECG normal.

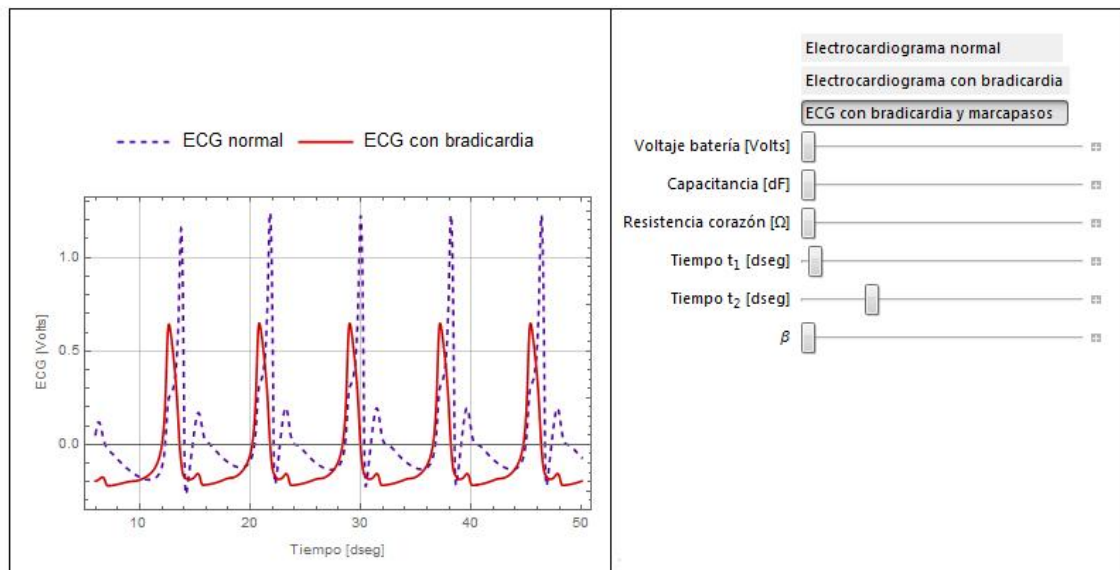


Figura 4.15: Simulación de un electrocardiograma con bradicardia y marcapasos.

De este modo, se podrá chequear el correcto funcionamiento del marcapasos antes de ser probado en el paciente. ■

Capítulo 5

Conclusiones

La descripción cuantitativa de muchos fenómenos de la realidad depende de la elaboración de *modelos matemáticos*, muchos de los cuales se basan en el importante concepto de *derivada de una función*, concepto que, en general, es utilizado bajo la forma de *ecuaciones diferenciales*.

En nuestro trabajo, las ecuaciones diferenciales de primer orden resultan ser las herramientas necesarias para abordar la modelación propuesta, mediante dos modelos matemáticos: el Modelo Exponencial y el Modelo Logístico.

Por su parte, la articulación ordenada de conceptos propios tanto de la Física como de la Matemática hace posible el *Modelado del Circuito Eléctrico*, que resulta imprescindible para el posterior Modelo Matemático del Marcapasos.

En efecto, en base al concepto de *electrón*, que es la *carga* constituyente fundamental del modelo estructural de la materia, puede arribarse, previa explicación del fenómeno electrostático y del modelo de un generador, a la idea de *corriente eléctrica*, que es aquello que “se mueve” a través de ciertos materiales propicios para nuestro estudio, como los *conductores*, que, dispuestos convenientemente, dan lugar al *circuito eléctrico*. Finalmente, el análisis de éste se ve facilitado marcadamente gracias a las *Leyes de Kirchhoff*, mediante la descripción algebraica de las leyes físicas a las que obedecen los componentes del circuito.

Ahora bien, la capacidad del corazón de generar impulsos eléctricos secuenciales y uniformes, imprescindibles para su normal funcionamiento, junto con el hecho de que puede ser considerado como un conductor de corriente, permiten el diseño del marcapasos *en base a un circuito eléctrico* que pueda ser conectado al órgano, capaz de emitir *pulsos eléctricos* con las mismas características que los impulsos generados en el corazón, vale decir, *secuenciales y uniformes*.

El modelado del *marcapasos* a través de un circuito, junto con algunas características básicas del funcionamiento del dispositivo, permiten obtener *su modelo matemático*. Esto es posible, a su vez, gracias al aporte del Capítulo 2: el modelado de un circuito.

Los Modelos Matemáticos Exponencial y Logístico del Capítulo 1 dan lugar a los respectivos modelos matemáticos del marcapasos, donde el Modelo Logístico es, en realidad, una *versión mejorada del Modelo Exponencial*, en virtud de la excitabilidad de los tejidos cardíacos, vista en el Capítulo 3, y de la determinación del parámetro τ .

La comparación de ambos modelos entre sí, y la contrastación de éstos con los datos reales extraídos de la experiencia, muestran tanto la mejora mencionada como también la bondad de las aproximaciones de dichos modelos.

Con todo esto, el Modelo Logístico del Marcapasos resulta ser una herramienta matemática satisfactoria a la hora de diseñar y ajustar adecuadamente estos dispositivos.

Referencias

- [1] Iván de Jesús May Cen, Erik del Jesús Tamayo Loeza. *Modelación del funcionamiento de un marcapasos y su implementación electrónica*. Entreciencias 2, (5):215-226. León, 2014.
- [2] Dennis Zill, Michael Cullen. *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Ed. Thomson, 2006.
- [3] Antonio Máximo, Beatriz Alvarenga. *Física General con experimentos sencillos*. Ed. Oxford University Press, 2008.
- [4] <https://es.wikipedia.org/wiki/Corazon>.
- [5] Sociedad Argentina de Electrofisiología Cardíaca.
<https://www.sociedadesadec.org.ar/marcapasos/>
- [6] <https://www.mayoclinic.org/es-es/diseases-conditions/bradycardia/symptoms-causes/syc-20355474>
- [7] Elena de la Vega de la Peña. “*Las Matemáticas de la fisiología del corazón*”. Tesis de Licenciatura en Matemática. Directora: Begoña Cano Urdiales. Universidad de Valladolid. 2014.
- [8] M.A. Quiroz Juárez, O. Jiménez Ramírez. “*Generación de Señales ECG a través de un circuito Electrónico Digital*”. XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático. Cancún. 2014.