UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

Facultad de Tecnología e informática



"Números extremadamente y colosalmente abundantes y su relación con la hipótesis de Riemann"

Por

Bruno Di Lenarda

Director de tesis: Dr. Agustín Tomas Besteiro

Tesis presentada para optar por el título de licenciado en matemática

-diciembre 2025-

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia, por el apoyo incondicional y la motivación constante que siempre me brindaron.

A mi madre, que aunque ya no está físicamente, me acompaña en cada logro con su amor y su ejemplo. Mi padre Juan Carlos, que siempre me cuidó y mis hermanos Lucio y Javier, que siempre me acompañaron.

A mi pareja Nahir por su cariño, comprensión y apoyo, que me ayudó a seguir.

A mi madrina Claudia por estar siempre presente.

A mis amigos Tomy, Chamo, Germán, Suggu y Ontar, por su interés y por acompañarme durante el desarrollo de esta tesis.

A mi director de tesis Agustín por enseñarme cómo es el mundo de la investigación e incentivarme a entrar en él.

A mis profesores de UAI por sus enseñanzas.

A mi manager Alexis por estar siempre pendiente de mis avances y al equipo de DISIS del cliente, principalmente Javier y Mariano,

con quienes establecí una buena relación y no pararon de insistirme en continuar para finalizar este camino.

Resumen: En este trabajo explicaremos los diferentes conjuntos de números abundantes, sus propiedades, la relación entre ellos y las equivalencias con la desigualdad de Robin y la hipótesis de Riemann.

Palabras clave: hipótesis de Riemann, desigualdad de Robin, función suma de divisores, índice de abundancia, números abundantes, superabundante, extremadamente abundante, colosalmente abundante.

Índice

Índice de figuras **8**

Introducción **9**

1. Resultados y definiciones preliminares **11**

1.1. Teoremas fundamentales 11

1.1.1. Convergencia de la serie Armónica 13

1.2. Función Sigma 14

1.3. Números abundantes 18

1.3.1. Propiedades de los superabundantes 22

2. Hipótesis de Riemann y Desigualdad de Robin **25**

2.1. Función Zeta de Riemann 25

2.1.1. Continuidad analítica 27

2.2. Hipótesis de Riemann 28

2.3. Desigualdad de Robin 29

2.3.1. Constante de Euler-Mascheroni 31

3. Números extremadamente abundantes **33**

3.1. Números extremadamente abundantes 33

4. Números Colosalmente Abundantes **37**

4.1. Números colosalmente abundantes 37

4.2. Relación entre los CA y XA 40

5. Conclusión **49**

Apéndice **51**

A.1. Tablas de referencia 51

Índice de figuras

1.1. Función contadora de divisores $d(n)$ 15

1.2. Función Suma de divisores $\sigma(n)$ 15

1.3. Gráfico de índice de abundancia de n=1 hasta n=1000 20

2.1. Gráfico de la función $\zeta(s)$ en el plano complejo. El color de un punto s codifica el valor de $\zeta(s)$. Colores fuertes denotan valores cercanos a 0 y el tono codifica el valor del argumento. El punto s=1 es el polo de la función zeta; los puntos negros en el eje real negativo y en la línea crítica $Re(s)$=1/2 son sus ceros. 28

2.2. En rojo $\sigma(n)$ y en verde $e^{\gamma} n \log(\log(n))$ para valores de n entre 0 y 20000. 29

2.3. En rojo $\sigma(n)/n$ y en verde $e^{\gamma} \log(\log(n))$ para valores de n entre 0 y 10000. 30

2.4. $G(n)$ acotada por e^{γ}. Se visualizan valores hasta n=20000 30

2.5. $G(n)$ con valores de $n \leq 5040$. Se observan valores $\sigma(n) > e^{\gamma} n \log(\log(n))$. 30

3.1. $\#XA < \infty$. Los puntos azules son los valores de $G(n)$ y se puede ver $G(n_0) = M$. . 35

3.2. $\#XA = \infty$. Los puntos azules son los valores de $G(n)$. Los XA no superan e^{γ} y no se visualiza ningún máximo absoluto. 36

4.1. $G'(n)$ tiene al menos un máximo que es **CA**. 38

4.2. Como N, N' son CA, $n \in XA$ y $N < n < N'$, el mayor de los CA es también un XA. . . 40

4.3. Los puntos rojos representan a los CA y los círculos azules a los XA. Hay infinitos CA que también son XA. 41

4.4. Gráfico de los Conjuntos para $SA_{1,000,000}$. La gran mayoría de los CA son XA . . . 46

4.5. Situación 1: Hipótesis de Riemann verdadera, entonces los conjuntos CA y XA son infinitos. 47
4.6. Situación 2: Hipótesis de Riemann falsa, entonces aunque el conjunto CA es infinito, los XA no lo son. 47

Introducción

La hipótesis de Riemann, uno de los problemas más fundamentales y enigmáticos de la teoría de números, postula que todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$ (Edwards, 1974). Esta conjetura posee profundas implicancias en la distribución de los números primos y se conecta con diversas áreas de la matemática, incluida la teoría de los números abundantes.

Entre estas conexiones, destaca la desigualdad de Robin, que establece un vínculo directo entre ciertas propiedades de la función suma de divisores y la validez de la hipótesis de Riemann. En particular, se sabe que si dicha desigualdad llega a fallar en algún caso, entonces la hipótesis sería falsa, y viceversa.

En este trabajo, nos proponemos estudiar los comportamientos de ciertos subconjuntos de números enteros que nos servirán para entender la relación con dicha desigualdad. A través del análisis teórico y comparativo de sus propiedades, buscamos entender mejor en qué medida estas familias de números podrían acercarnos a un posible resultado de la hipótesis. A modo de detalle, decir que este estudio analiza principalmente varios teoremas pertenecientes a Nazardonyavi y Yakubovich, 2014 que analizan estos subconjuntos, así como también los aportes de Robin (Robin, 1984) y Grönwall (Grönwall, 1913), cuyas contribuciones constituyen la base teórica indispensable para el análisis de la desigualdad y de su relación con la Hipótesis de Riemann.

Comenzaremos mencionando algunos teoremas y proposiciones fundamentales en la teoría de números para definir y explicar el comportamiento de los conjuntos que nos ayudarán a estudiar la hipótesis. Como tema fundamental para iniciar, veremos la función suma de divisores

y, junto a esta, el índice de abundancia, el cual nos servirá para presentar los números superabundantes. Estos números son la base de los conjuntos a estudiar y nos permitirán avanzar con las demostraciones y las equivalencias que veremos respecto de la desigualdad de Robin.

Por último, veremos la relación entre los conjuntos extremadamente abundantes y colosalmente abundantes, destacando los resultados expuestos en (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014), los cuales resumen el estado actual de las investigaciones en esta área.

Capítulo 1

Resultados y definiciones preliminares

En este primer capítulo se introducirán algunos de los teoremas y proposiciones que se utilizarán más adelante para explicar las hipótesis y demostraciones necesarias para el desarrollo de los temas centrales de este trabajo. En algunos casos no se detallarán todos los casos particulares que pueden surgir de la mención de estos, ya que no serán requeridos para su uso.

1.1. Teoremas fundamentales

Teorema 1.1 *Teorema fundamental de la aritmética*

Todo $n \in \mathbb{N},\ n>1$, es un número primo o bien puede ser representado unívocamente como producto de potencias de números primos:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_j^{k_j} = \prod_{i=1}^{j} p_i^{k_i} \ ,$$

donde $p_1 < p_2 < ... < p_j$ son primos y $k_i \in \mathbb{N}$.

Esta expresión se llama representación canónica de n.

Demostración: Asumimos los siguientes resultados

- Todo $n \in \mathbb{N},\ n>1$ tiene por lo menos un divisor primo (n es primo o compuesto).

- Lema de Euclides. Si un primo $p|ab$, para $a, b \in \mathbb{N}$ entonces $p|a$ o $p|b$.

Existencia:

Supongamos que el resultado no es válido. Sea $m \in \mathbb{N}$, más chico que n, no puede ser expresado como producto de números primos. Como un número primo se escribe como producto de primos entonces m no es primo. Si m es compuesto $\exists\, r, s \in \mathbb{N} : 1 < r < m, 1 < s < m$ y $m = r.s$. Como m es el menor número natural que no puede ser expresado como producto de números primos, asumimos que r y s pueden ser expresados como producto de primos. Entonces: Sea $r = p_1.p_2...p_k$ y $s = q_1.q_2...q_l$ donde $p_1...p_n, q_1...q_l$ son primos. Tenemos que:

$$m = r.s = p_1...p_k.q_1...q_l \ ,$$

que son primos, lo cual es un absurdo.

Unicidad:

Supongamos que existe $m = p_1...p_k = q_1...q_l$ (admitiendo repetidos). Queremos ver que estas representaciones son iguales a excepción del orden. Dado que estos dos productos son iguales a n, cualquier primo de un producto es divisor de otro, es decir, $p|n$. Entonces podemos tomar cualquier primo p_i, con $1<i<n$ y tenemos $p_i|n = q_1...q_l$. Por lema de Euclides existe $1 \leq j \leq l$ tal que $p_i|q_j$. Como q_j es primo, tenemos $1|q_j$ y $q_j|q_j$, y dado que p_i es primo, entonces $p_i = q_j$. Luego $p_i = p_1$ y $q_j = q_1$.

Como $p_1 = q_1$ entonces $\cancel{p_1}.p_2...p_k = \cancel{q_1}.q_2...q_l$. Usando el mismo razonamiento tenemos $p_2=q_2$ y repetimos el proceso hasta cancelar todos los primos en común. Queremos ver $k=l$.

Veamos el caso $k < l$. Por la cancelación anterior tenemos $1 = q_{k+1}...q_l$. Esto es absurdo, porque $q_{k+1}...q_l$ son primos. El caso $k > l$ es similar, considerando $p_{l+1}...p_k$ y $p_{l+1}...p_k$ son primos. Por lo tanto, $k=l$ y $p_i=q_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. □

Proposición 1.1 *Sean $n=p_1.p_2...p_r$ primos no necesariamente todos distintos y p_{r+1} un número primo tal que $p_{r+1} \neq p_i$ para $1 \leq i \leq r$. Entonces $(n, p_{r+1}^{k_{r+1}}) = 1$, donde (a, b) es el máximo común divisor de a, b.*

Demostración: Los divisores de n son $1, p_1, p_2, ..., p_r$ y todas sus combinaciones.

Los divisores de $p_{r+1}^{k_{r+1}}$ son $1, p_{r+1}, p_{r+2}, ..., p_{r+1}^{k_{r+1}}$. Como $p_{r+1} \neq p_i$, $1 \leq i \leq r$, entonces $p_{r+1} \nmid n$. Por lo tanto, $p_{r+1}^{k_{r+1}} \nmid n$ y $(n, p_{r+1}^{k_{r+1}})$=1. □

1.1.1. Convergencia de la serie Armónica

Un punto clave para explicar la hipótesis de Riemann y la Desigualdad de Robin es la función Suma de divisores, denotada como $\sigma(n)$, que calcula la suma de todos los divisores positivos de un número n. Esta función se relaciona con la abundancia de números, el cual es uno de los pilares que nos ayudará al estudio de los temas que desarrollaremos durante este trabajo. A su vez, para explicar la idea de abundancia añadiremos la función Indice de Abundancia $I(n)$ que se detallará más adelante en este capítulo.

Debido a la importancia de $I(n)$, vamos a ver un teorema que ayude a demostrar ciertas propiedades de la misma:

Teorema 1.2 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $f:[n:\infty) \to \mathbb{R}$, *f monótona y decreciente, entonces:*

1. *La serie convergente* $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ *converge a* $c \in \mathbb{R} \iff \int_N^{\infty} f(x)dx$ *es convergente*
2. *Si* $\int_N^{\infty} f(x)dx = +\infty \implies \sum_{n=N}^{\infty} f(n) = +\infty$
3. *Vale las siguientes cotas:*

$$\int_{n=N}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)dx \ .$$

Corolario 1.2.1 *La serie armónica diverge.*

Demostración: Aplicando el punto 2 del teorema anterior considerando $f(x) = \frac{1}{x}$ tenemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = ln(x)\Big|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} ln(x) = +\infty \ .$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. □

Sin embargo, esto ocurre para los casos donde la potencia de $\frac{1}{n}$ es menor o igual a 1.

Veremos a continuación que, si el exponente del término es mayor a 1, la serie converge.

Corolario 1.2.2 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ *con* ϵ>0 *converge.*

Demostración: Aplicando el punto 1 del teorema anterior y considerando $f(x) = \frac{1}{x^{1+\epsilon}}$ tenemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\epsilon}} = -\frac{1}{\epsilon x^{\epsilon}}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\epsilon}(1 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\epsilon}}) = \frac{1}{\epsilon} < \infty \ .$$

Entonces, se demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge

En base a esta demostración resulta que, si tendemos a infinito nuestra serie, es convergente si y solo si el exponente del denominador es mayor a 1. □

1.2. Función Sigma

Definición 1.1 *Definimos la función contadora de divisores* $d(n)$ *como:*

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 \ ,$$

donde d es divisor de n.

La función $d(n)$ devuelve la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo:

$d(2)$=2

$d(3)$=2

$d(4)$=3

$d(12)$=6

Si p es primo, entonces $d(p)$=2.

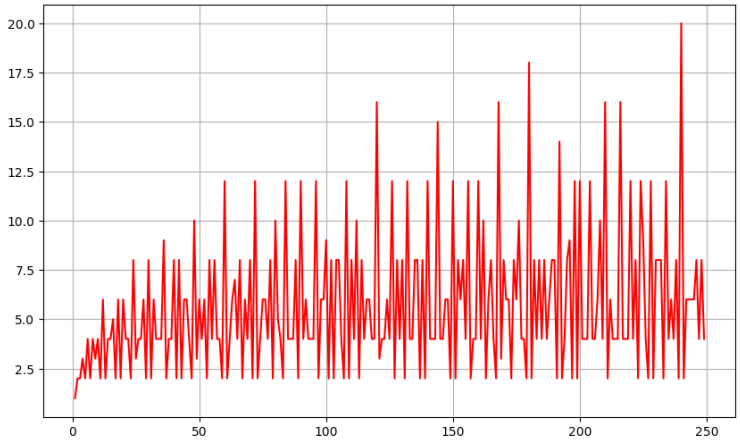


Figura 1.1: Función contadora de divisores $d(n)$

Definición 1.2 *Definimos la función suma de divisores $\sigma(n)$ como:*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \ ,$$

La función $\sigma(n)$ asocia cada número entero positivo n la suma de sus divisores positivos. A modo de ejemplo se muestran algunos de los primeros valores:

$\sigma(2)$=1+2=3.

$\sigma(3)$=1+3=4.

$\sigma(4)$=1+2+4=6.

$\sigma(12)$=1+2+3+4+6+12=28.

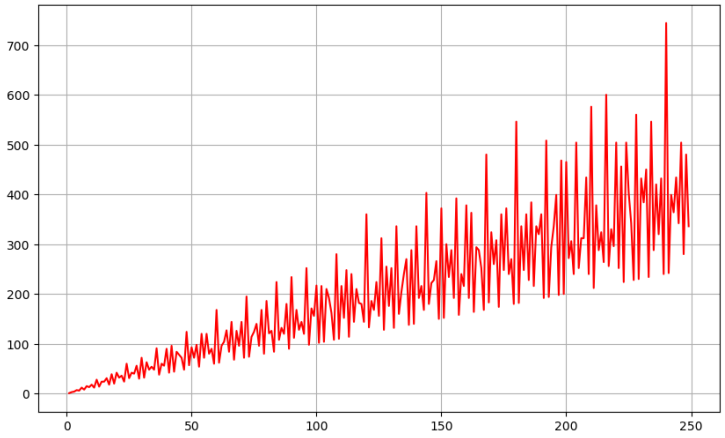


Figura 1.2: Función Suma de divisores $\sigma(n)$

Definición 1.3 *Una función* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ *es multiplicativa si y sólo si* $f(m.n)=f(m).f(n)$ *para* m *y* n *coprimos*

Teorema 1.3 *Si* f *es una función multiplicativa y* $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_j^{k_j}$, *para* $j\in\mathbb{N}$, *entonces* $f(n) = f(p_1^{k_1})f(p_2^{k_2})...f(p_j^{k_j})$

Demostración: Para demostrar este teorema utilizaremos el principio de inducción sobre la factorización de n.

Si n tiene un solo primo en su descomposición, entonces $n=p_1^{k_1}$ y $f(n)=f(p_1^{k_1})$.

Ahora, supongamos que el teorema es verdadero para n con r primos distintos en su factorización. Se quiere probar que vale el caso para r+1.

Se tiene $f(n) = f(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}p_{r+1}^{k_{r+1}})$. Dado que f es multiplicativa y por proposición anterior tenemos que $(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}, p_{r+1}^{k_{r+1}})=1$ y entonces vale $f(n)=f(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r})f(p_{r+1}^{k_{r+1}})$. Por hipótesis inductiva sabemos que $f(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r})=f(p_1^{k_1})f(p_2^{k_2})...f(p_r^{k_r})$.

Por lo tanto,

$$f(n) = f(p_1^{k_1})f(p_2^{k_2})...f(p_r^{k_r})f(p_{r+1}^{k_{r+1}}) \qquad \square$$

Teorema 1.4 *La función* $\sigma(n)$ *es multiplicativa.*

Demostración: Sean a, b coprimos, entonces no tienen divisores en común.

Por lo tanto, los divisores $a.b$ son de la forma a_ib_j, donde a_i es divisor de a y b_j es divisor de b.

Podemos listar los divisores

$$a_0 = 1, a_1, a_2, ..., a_r = a$$

$$b_0 = 1, b_1, b_2, ..., b_r = b$$

Por lo tanto, la suma de divisores es

$$\sigma(a) = \sum_{i=0}^{r} a_i \qquad \sigma(b) = \sum_{j=0}^{s} b_j \ .$$

Entonces tenemos:

$$\sigma(a)\ \sigma(b) = (\sum_{i=0}^{r} a_i)\ (\sum_{j=0}^{s} b_j) =$$

$$= (a_0 + a_1 + ... + a_r)(b_0 + b_1 + ... + b_s) = (a_0b_0 + a_1b_1 + ...) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{r,s} a_i b_j = \sigma(a.b) \ . \qquad \square$$

Teorema 1.5 *Sea n=p^k con p primo y k∈$\mathbb{N}$ entonces*

$$\sigma(n) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \ .$$

Demostración: Los divisores de n=p^k son $1, p, p^2, ..., p^{k-1}, p^k$, por lo tanto,

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + ... + p^{k-1} + p^k = \sum_{i=0}^{k} p^i = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \ . \qquad \square$$

Corolario 1.5.1 *Sea n∈$\mathbb{N}$ una potencia de 2, entonces n=2^k y $\sigma(n)$=$2n - 1$.*

Demostración: Si n=2^k , entonces por teorema anterior $\sigma(n)$=$\frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1}$=$2 \cdot 2^k - 1$=$2n - 1$.

$\square$

Teorema 1.6 *Representación canónica de $\sigma(n)$.*

Sea n≥2, n∈$\mathbb{N}$ tal que n=$p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ su representación canónica, entonces

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k+i} - 1}{p_i - 1} \ .$$

Demostración: Por **Teorema 1.4**

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}) = \sigma(p_1^{k_1})\sigma(p_2^{k_2}) ... \sigma(p_r^{k_r}) \ .$$

Aplicando **Teorema 1.5**

$$\sigma(p_1^{k_1})\sigma(p_2^{k_2}) ... \sigma(p_r^{k_r}) = (\frac{p_1^{k+1} - 1}{p_1 - 1})(\frac{p_2^{k+2} - 1}{p_2 - 1}) ... (\frac{p_r^{k+r} - 1}{p_r - 1}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k+i} - 1}{p_i - 1} \ . \qquad \square$$

Corolario 1.6.1 *Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ libre de cuadrados, es decir,*

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i = p_1 p_2 ... p_r \ ,$$

con p_i primo. Entonces

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} (p_i + 1)$$

Demostración: Aplicando el **Teorema 1.6** tenemos

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} (\frac{p_i^2 - 1}{p_i - 1}) = \prod_{i=1}^{r} (\frac{(p_i + 1)\cancel{(p_i - 1)}}{\cancel{(p_i - 1)}}) = \prod_{i=1}^{r} (p_i + 1) \ . \qquad \square$$

Corolario 1.6.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$ semiprimo, es decir, un número primo producto de dos números primos. En este caso $n=p_1.p_2$, con $p_1 \neq p_2$. Entonces,*

$$\sigma(n) = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \ .$$

Demostración: Aplicando el corolario anterior, tenemos $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{2}(p_i + 1)=(p_1 + 1)(p_2 + 1)$. $\square$

1.3. Números abundantes

Habiendo explicado las características de la función $\sigma(n)$ podemos comenzar a introducirnos en las bases que constituyen este trabajo, por lo cual veremos aquellos conjuntos de números característicos relacionados directamente con la suma de sus divisores.

Para presentar estos conjuntos, primero tendremos que definir los números abundantes y el concepto de índice de abundancia. La idea es entender mejor los posibles máximos de la función $\sigma(n)$. Una vez definidos, podremos explorar los números superabundantes como introducción a los conjuntos de números extremadamente abundantes y colosalmente abundantes, que trabajaremos más adelante en otros capítulos.

Definición 1.4 *Definimos un número abundante como aquellos números* $n \in \mathbb{N}$ *tales que* $\sigma(n) \geq 2n$.

Por ejemplo:

$\sigma(11)$=12 no es un número abundante.

$\sigma(12)$=1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12=28≥24 es abundante.

Definición 1.5 *Un número* $n \in \mathbb{N}$ *es altamente abundante si para todo* $m < n$ *tenemos que* $\sigma(n) > \sigma(m)$.

Ejemplos:

$\sigma(20)$=42 es altamente abundante, ya que 42 es mayor que la suma de divisores propios de cualquier número natural menor a 20.

$\sigma(21)$=32 no es altamente abundante, porque 20<21, pero $\sigma(21)<\sigma(20)$.

Definición 1.6 *Definimos el índice de abundancia como* $I(n)=\dfrac{\sigma(n)}{n}$.

La definición del índice de abundancia es clave para comprender los posibles máximos de $\sigma(n)$. Tengamos en cuenta que para los números altamente abundantes con un n grande, es más probable conseguir un $\sigma(n)$ muy grande. Por lo tanto, este índice permite normalizar los distintos conjuntos de números abundantes que estaremos trabajando para compararlos y clasificarlos.

Ejemplos:

$$\frac{\sigma(31)}{31} = \frac{32}{31} \approx 1.03 \quad , \quad \frac{\sigma(32)}{32} = \frac{63}{32} \approx 1.96 \quad , \quad \frac{\sigma(p)}{p} = \frac{p+1}{p} \approx 1 + \frac{1}{p} \ .$$

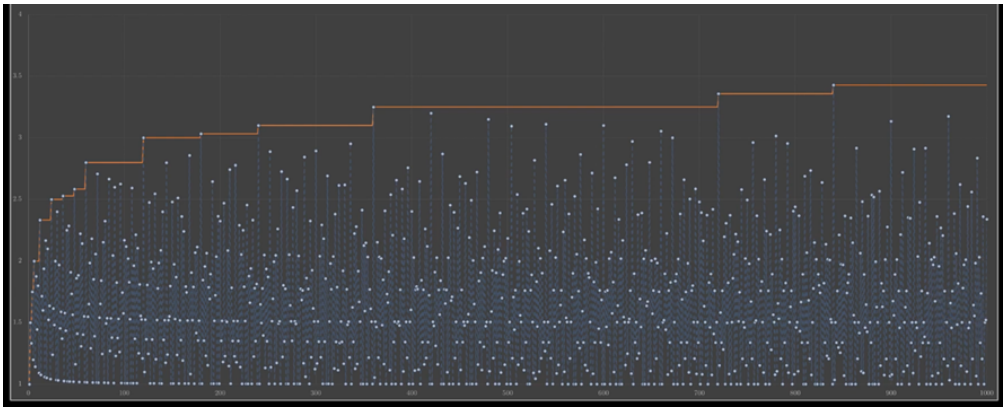


Figura 1.3: Gráfico de índice de abundancia de n=1 hasta n=1000

Una vez definido el índice de abundancia como la razón entre la suma de divisores de un número y el propio número, podemos analizar casos particulares en los que este índice toma valores excepcionalmente altos, que serían los máximos relativos de la función. Dentro de esta categoría especial se encuentran los **números superabundantes**.

Estos números poseen las características distintivas de los números abundantes y altamente abundantes, y se definen de la siguiente manera:

Definición 1.7 *Un número n es Superabundante (SA) si* $m<n$, $\forall m, n\in\mathbb{N}$ *tenemos que*

$$\frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n} .$$

Para conocer los primeros números *SA* se puede ver el listado que se encuentra en la **Tabla 2** del apéndice.

Teorema 1.7 *La función* $I(n)=\dfrac{\sigma(n)}{n}$ *no está acotada. (Laatsch, 1986)*

Demostración: Sea $n\in\mathbb{N}$ divisible por $1, 2, 3, ..., k$ consecutivos (por ejemplo $k!$). Entonces:

$$\sigma(n) = 1 + 2 + 3 + ... + k + ... + n \geq n + \frac{n}{2} + ... + \frac{n}{k} ,$$

dividiendo por n en ambos lados queda

$$I(n) = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1+2+3+...+k+...+n}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} ,$$

entonces tenemos

$$I(n) \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} .$$

Si $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} I(n) \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty .$$

Por lo tanto, $I(n)$ diverge. □

En el límite, k se encuentra de forma implícita. Se debe tener en cuenta que al comienzo de la demostración se asegura que n es divisible por k, por lo tanto, $I(n)$ depende de k. Como k tiende a infinito y, a su vez, k es divisor de n, resulta que n también tiende a infinito.

Lema 1.7.1 *La función $I(p^k)$, con p primo y $k \in \mathbb{N}$, es decreciente en p para k fijo.*

Demostración: Por el **Teorema 1.6** tenemos $I(p^k) = \frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \frac{p^{k+1}-1}{p^k(p-1)} = \frac{p - \frac{1}{p^k}}{p-1}$. Queremos ver que la función es decreciente. Para esto consideramos la sucesión de números naturales:

Sea $a_n = \frac{n - \frac{1}{n^k}}{n-1}$, verifico que cumpla $a_{n+1} < a_n$.

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{n+1-\frac{1}{(n+1)^k}}{n} < \frac{n-\frac{1}{n^k}}{n-1}$$

$$\cancel{n^2} - 1 - \frac{(n-1)}{(n+1)^k} < \cancel{n^2} - \frac{n}{n^k} ,$$

multiplico ambos miembros de la desigualdad por -1

$$\frac{n}{n^k} < 1 + \frac{n-1}{(n+1)^k} \iff \frac{1}{n^{k-1}} < 1 + \frac{n-1}{(n+1)^k} .$$

Podemos asegurar que $\frac{1}{n^{k-1}} \leq 1$ si $k \geq 1$ y $n \geq 2$ y, a su vez, $1 + \frac{n-1}{(n+1)^k} > 1$ si $n \geq 2$. Teniendo en cuenta que el conjunto de los números primos es un subconjunto de los números Naturales, queda demostrado que la sucesión es decreciente y, por lo tanto, la función $I(p^k)$ también lo es. □

1.3.1. Propiedades de los superabundantes

Lema 1.7.2 *Si $n \in SA$ tal que $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, entonces $p_1 \dots p_r$ son los primeros r primos consecutivos. Es decir que necesariamente $p_1 = 2$.*

Demostración: Supongamos que n no contiene todos los primos consecutivos, quiere decir que falta al menos uno al que llamaremos q.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que reemplazamos un primo $q' > q$, que está en la factorización de n por q y mantiene el resto de la factorización con sus respectivas potencias.

$$n = p_1^{k_1} \dots q' \dots p_r^{k+r} \ ,$$

$$m = p_1^{k_1} \dots q^{k_q} \dots p_r^{k+r} \ .$$

n no tiene a q en su factorización y m tiene a q en la posición donde iría q'. Entonces, ahora estudiamos el índice de abundancia de ambos números.

$$\frac{I(n)}{I(m)} = \frac{\frac{\sigma(n)}{n}}{\frac{\sigma(m)}{m}} = \frac{\sigma(p_1^{k_1}) \dots \sigma(q'^{k_q}) \dots \sigma(p_r^{k_r})}{p_1^{k_1} \dots q'^{k_q} \dots p_r^{k_r}} \cdot \frac{p_1^{k_1} \dots q^{k_q} \dots p_r^{k_r}}{\sigma(p_1^{k_1}) \dots \sigma(q^{k_q}) \dots \sigma(p_r^{k_r})} \ .$$

La igualdad anterior vale porque $\sigma(n)$ es multiplicativa. Al realizar la multiplicación, se cancelan todos los factores exceptuando aquellos que dependen de q y q'.

$$\frac{\sigma(q'^{k_q})}{q'^{k_q}} \cdot \frac{q^{k_q}}{\sigma(q^{k_q})} = \frac{\frac{\sigma(q'^{k_q})}{q'^{k_q}}}{\frac{\sigma(q^{k_q})}{q^{k_q}}} = \frac{I(q'^{k_q})}{I(q^{k_q})} \ .$$

Teniendo en cuenta el lema anterior, podemos decir que, como $q' > q$, entonces, $I(q'^{k_q}) <$

$I(q^{k_q}) \iff \dfrac{I(q'^{k_q})}{I(q^{k_q})} < 1$. Por lo tanto

$$\frac{I(n)}{I(m)} = \frac{\frac{\sigma(n)}{n}}{\frac{\sigma(m)}{m}} < 1 \ ,$$

es decir,

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(m)}{m} \ ,$$

con $n>m$.

Esto es absurdo, ya que n tiene un índice de abundancia más pequeño que m, pero $n \in SA$, es decir, es un máximo relativo.

Dado el absurdo, resulta que los números Superabundantes son producto de los primeros r números primos consecutivos. □

Teorema 1.8 *Si* $n \in SA$ *y su representación canónica es* $n=p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, *entonces* $k_1 \geq \ldots \geq k_r$, *es decir, los exponentes son decrecientes, y* $k_r=1$ *excepto para* $n=4$ *y* $n=36$ *donde* $k_r=2$.

Demostración: Ver (Alaoglu & Erdös, 1944) □

A continuación, se mencionarán varias propiedades y características de los números superabundantes. Las demostraciones de los siguientes resultados se encuentran en Broughan (2017), capítulo 6. Debido a que no son el foco principal de este trabajo, no serán demostradas, pero sí serán incluidas para aportar una base de información para la posterior explicación de los demás conjuntos de números.

Proposición 1.2 *Sea* $n<n'$, *dos SA consecutivos, entonces* $\dfrac{n'}{n} \leq 2$.

Corolario 1.8.1 *Existen infinitos números SA.*

Corolario 1.8.2 *Sea* $x \in \mathbb{R}$, $x>0$, *entonces siempre existe un número SA* $n' \in [x, 2x)$.

Esta proposición y los corolarios asociados, sugieren el conjunto de números SA aparecen con cierta frecuencia dentro del conjunto de los Reales. Gracias al **Corolario 1.8.2** vemos que siempre, entre un número y el doble del mismo, vamos a poder encontrar un número SA.

Definición 1.8 *Definimos la función de Chebyshev, con p primo, como* $\theta(x)=\sum_{p\leq x}\log(p)$.

Teorema 1.9 *Para* $x\geq 3$ *se cumple* $\theta(x)\geq\frac{x}{3}$.

Demostración: Ver (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014), corolario 9 . □

Capítulo 2

Hipótesis de Riemann y Desigualdad de Robin

En la teoría de números, la función zeta de Riemann ocupa un lugar central debido a su profunda conexión con la distribución de los números primos. Su estudio ha llevado al desarrollo de importantes resultados en análisis matemático y ha dado lugar a conjeturas fundamentales, como la famosa hipótesis de Riemann.

Uno de los enfoques para estudiar dicha hipótesis es a través de equivalencias con funciones aritméticas. En particular, la desigualdad de Robin proporciona un criterio equivalente a la hipótesis de Riemann en términos de la función $\sigma(n)$.

En este capítulo, exploraremos la hipótesis de Riemann en su formulación original y su papel en la teoría analítica de números, para luego introducir la desigualdad de Robin y su relación con uno de los problemas más importantes de la matemática.

2.1. Función Zeta de Riemann

Definición 2.1 *Definimos la función Zeta de Riemann como la serie infinita*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} , \quad s \in \mathbb{C} .$$

Ya vimos, al estudiar la convergencia de la serie armónica, en el **Corolario 1.2.2** que si $s \in \mathbb{R}$ la serie converge para $s > 1$. Para $s \in \mathbb{C}$ tenemos que converge para $Re(s) > 1$ teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \ ,$$

donde s=$x + iy$, siendo x=$Re(s)$ y y=$Im(s)$. Estudiando n^s entonces:

$$n^s = n^{x+iy} = n^x.n^{iy} = n^x.e^{iy.ln(n)}$$

desarrollamos el término imaginario

$$e^{iy.ln(n)} = cos(y.ln(n)) + isen(y.ln(n))$$

$$|e^{iy.ln(n)}| = \sqrt{cos^2(y.ln(n)) + sen^2(y.ln(n))} = 1 \ .$$

Ahora al volver a estudiar n^s

$$|n^s| = |n^x|.|n^{iy}| = |n^x||e^{iy.ln(n)}| = |n^x| = n^x \ .$$

Como sabemos, el estudio de la convergencia de las series suele presentar dificultades para determinar el valor al que convergen. Si bien existen diversos métodos para analizar su comportamiento, estos no siempre garantizan un resultado exacto ni permiten establecer una cota precisa. Sin embargo, ciertas series, como la geométrica o la telescópica, pueden ser utilizadas como referencia para acotar y caracterizar otras series, lo que facilita la obtención de resultados.

En particular, la función Zeta de Riemann presenta un comportamiento interesante en relación con la convergencia de series cuando consideramos los casos pares de la función, es decir, $\zeta(2k)$ para k positivo. La expresión para estos casos fue inicialmente encontrada por Euler y es la siguiente:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!} \ ,$$

donde B_{2k} son los números de Bernoulli definidos mediante la serie de Taylor de la función generatriz:

$$G(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \ ,$$

con $|x|<2\pi$

De esta fórmula se obtiene: $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$, ...,
y se puede observar que:

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = \lim_{s\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lim_{s\to\infty} \frac{1}{n^s}) = 1 \ .$$

Para una explicación completa del tema ver (Arfken, 1970).

Para el caso en que se desea estudiar la serie evaluada en un número impar positivo, es decir, $\zeta(2k+1)$, aún no se ha demostrado una fórmula general que describa su comportamiento. Sin embargo, se han analizado ciertos casos específicos que han arrojado conclusiones interesantes. Algunos ejemplos de estos resultados son:

- $\zeta(3)$ es un número irracional. Fue demostrado por Roger Apéry en 1979 y a este valor se lo conoce como *Constante de Apéry*. (Apéry, 1979).

- Hay infinitos números de la forma $\zeta(3)$ que son irracionales (Rivoal, 2000).

- Al menos uno de los resultados entre $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional (Zudilin, 2001).

2.1.1. Continuidad analítica

La continuidad analítica permite extender el dominio de una función analítica. La función Zeta de Riemann se puede extender al plano complejo mediante la siguiente ecuación funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi}{2} s) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \ ,$$

para $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$, Γ es la función Gamma, siendo la generalización del factorial de un número

natural. Para la demostración de este resultado ver (Edwards, 1974).

Si s=−2, −4, −6, ... entonces $\zeta(s)$=0. Estos valores son los ceros triviales de $\zeta(s)$. Para los casos positivos ya vimos que $\zeta(s)$>0.

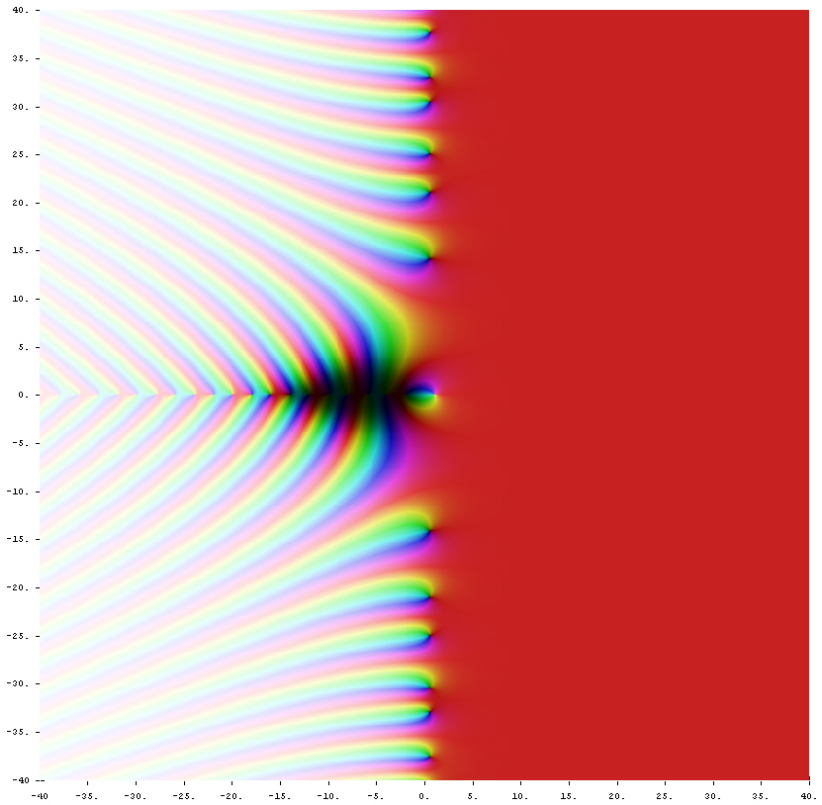


Figura 2.1: Gráfico de la función $\zeta(s)$ en el plano complejo. El color de un punto s codifica el valor de $\zeta(s)$. Colores fuertes denotan valores cercanos a 0 y el tono codifica el valor del argumento. El punto s=1 es el polo de la función zeta; los puntos negros en el eje real negativo y en la línea crítica $Re(s)$=1/2 son sus ceros.

2.2. Hipótesis de Riemann

La hipótesis de Riemann es una afirmación, no demostrada, que hace referencia a los ceros de la función zeta de Riemann. Bernhard Riemann calculó los seis primeros ceros no triviales de esta función y observó que todos estaban sobre una misma recta: $Re(s)=\frac{1}{2}$. En 1859 comentó que esto podría tratarse de un hecho general, dando comienzo a la hipótesis, la cual afirma que *todos los ceros no triviales de* $\zeta(s)$ *tienen parte* $Re(s)=\frac{1}{2}$. Hasta el momento se han calculado más

de diez billones de ceros, todos alineados sobre esta recta crítica (Platt & Trudgian, 2021).

Existen una gran cantidad de equivalencias relacionadas con la hipótesis de Riemann. Sin embargo, nos centraremos en una equivalencia particular que involucra a la *desigualdad de Robin*, la cual conoceremos a continuación y analizaremos mediante los conjuntos que definiremos luego.

2.3. Desigualdad de Robin

Teorema 2.1 *La hipótesis de Riemann es equivalente a demostrar la desigualdad:*

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log(\log(n)) \ ,$$

para n>5040*, donde* γ *es la constante de Euler-Mascheroni y* $e^{\gamma} \approx 1,781\ldots$

Demostración: Ver (Robin, 1984). □

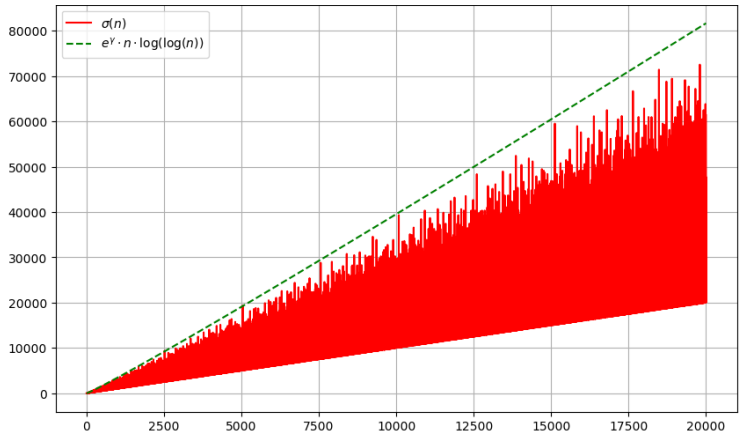


Figura 2.2: En rojo $\sigma(n)$ y en verde $e^{\gamma} n \log(\log(n))$ para valores de n entre 0 y 20000.

Podemos reescribir la desigualdad en términos del índice de abundancia

$$I(n) = \frac{\sigma(n)}{n} < e^{\gamma} \log(\log(n)) \ .$$

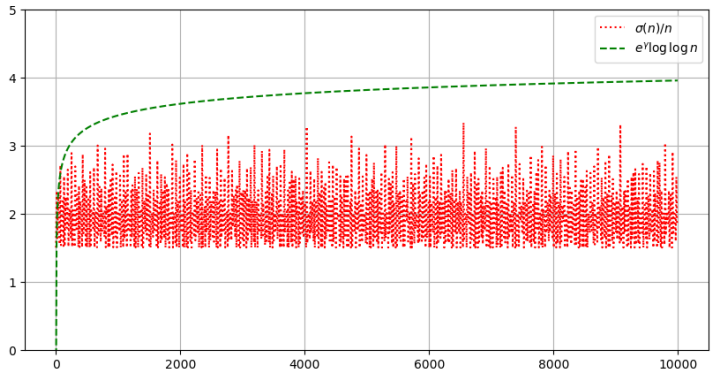


Figura 2.3: En rojo $\sigma(n)/n$ y en verde $e^{\gamma}\log(\log(n))$ para valores de n entre 0 y 10000.

De la misma forma podemos reescribir la desigualdad acotada por e^{γ}

$$G(n) = \frac{\sigma(n)}{n\log(\log(n))} < e^{\gamma} \ .$$

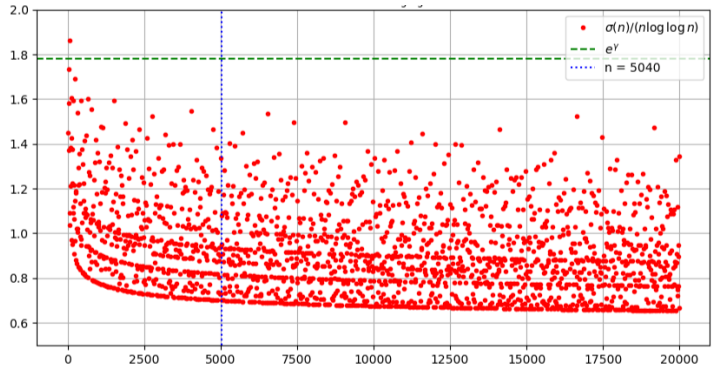


Figura 2.4: $G(n)$ acotada por e^{γ}. Se visualizan valores hasta n=20000

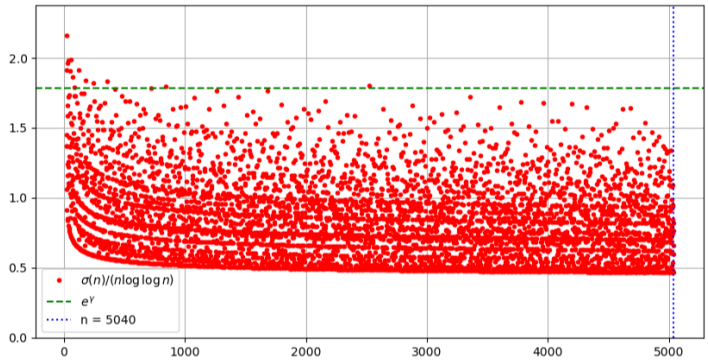


Figura 2.5: $G(n)$ con valores de $n \leq 5040$. Se observan valores $\sigma(n) > e^{\gamma} n\log(\log(n))$.

2.3.1. Constante de Euler-Mascheroni

La constante de Euler-Mascheroni se define como:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)) \cong 0,55721\ldots .$$

No se sabe si es irracional y, si fuese racional, el denominador es mayor a 10^{224663} (ver Haible y Papanikolaou, 1998). Esta constante muestra que, cuando la diferencia absoluta entre la suma de la serie armónica y $\log(n)$ tiende a infinito, el resultado es un valor fijo.

Teorema 2.2

$$\sigma(n) \leq e^{\gamma} n \log(\log(n)) + \frac{n(0,6482\ldots)}{\log(\log(n))}$$

para $n \geq 3$ *con la igualdad para* $n=12$ *y donde*

$$\frac{7}{3}\log(\log(12)) - e^{\gamma}\log^2(\log(12)) \approx 0,6482\ldots .$$

Este teorema demuestra una cota superior refinada a la función $\sigma(n)$.

Demostración: Ver (Robin, 1984). □

Ahora, para comprender mejor el comportamiento asintótico de la función, es útil examinar el siguiente teorema:

Teorema 2.3 *Teorema de Grönwall*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\log(\log(n))} = e^{\gamma} .$$

Demostración: Ver (Grönwall, 1913). □

Este teorema implica que, en términos de velocidad relativa, el numerador y el denominador crecen a la misma velocidad, con una tasa constante.

Teorema 2.4 *Si existen contraejemplos a la desigualdad de Robin, estos son infinitos.*

Demostración: Ver (Robin, 1984). □

Así como probar la Desigualdad de Robin es equivalente a probar la hipótesis de Riemann, existen otras equivalencias que, a su vez, están relacionadas a $\sigma(n)$.

Teorema 2.5 *La hipótesis de Riemann es equivalente a la siguiente desigualdad:*

$$\sigma(n) \leq H_n + e^{H_n} \log(H_n) \ .$$

Para n>1, donde $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *es la suma parcial de la serie armónica.*

Demostración: Ver (Lagarias, 2002). □

Notar que, a diferencia de la Desigualdad de Robin, esta desigualdad comienza a cumplirse a partir de $n = 1$.

Capítulo 3

Números extremadamente abundantes

Como bien mencionamos en el primer capítulo, al introducir los conjuntos de números que conforman la base de este trabajo, es momento de ver en detalle otro conjunto importante para estudiar: los números extremadamente abundantes. Vamos a definir sus propiedades y explicar su relevancia para la hipótesis de Riemann.

En primera instancia, veremos que los números extremadamente abundantes son un subconjunto de los Superabundantes, con lo cual compartirán varias características de estos últimos. Por otro lado, demostraremos que si la Desigualdad de Robin no se cumple para todos los casos, entonces el primer contraejemplo es un elemento de este conjunto.

Los siguientes resultados se pueden ver en (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014).

3.1. Números extremadamente abundantes

Definición 3.1 *Decimos que un número n es extremadamente abundante (XA) si, o bien,* n=10080 *o* n>10080 *y*

$$\frac{\sigma(n)}{n\log(\log(n))} > \frac{\sigma(m)}{m\log(\log(m))},$$

para todo $10080 \leq m \leq n,\ n, m \in \mathbb{N}$

Se utiliza como punto de partida el valor $n = 10080$, el cual también es SA, ya que hay

valores previos que son excepciones a la desigualdad. Nos interesa estudiar los valores a partir de 10080 a infinito.

Teorema 3.1 $XA \subset SA$.

Demostración: Primero, vale que $10080 \in SA$ (ver **Tabla 2**).

Si $n>10080$ y $n \in XA$ sabemos que $G(n) > G(m)$, por lo tanto

$$\frac{\sigma(n)}{n\log(\log(n))} > \frac{\sigma(m)}{m\log(\log(m))}, \quad \forall n>m\geq 10080.$$

Como n es XA entonces consideramos:

$$\frac{\sigma(n)}{n} = G(n)\log(\log(n)) > G(m)\log(\log(n)) > G(m)\log(\log(m)) = \frac{\sigma(m)}{m}.$$

Esta desigualdad se cumple para $m\geq 10080$. En particular para $m=10080$ tenemos

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(10080)}{10080}.$$

Como 10080 es SA

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(10080)}{10080} > \frac{\sigma(m)}{m} \Longrightarrow n \in SA\ . \qquad \square$$

Teorema 3.2 *Si existe un contraejemplo a la desigualdad de Robin, entonces el primero es XA.*

Demostración: Se puede mostrar numéricamente que no existen contraejemplos para $5040<n<10080$ viendo la **Tabla 2** del apéndice.

Sea $n>10080$ el primer contraejemplo. Para m tal que $10080\leq m<n$ tenemos que

$$G(m) < e^{\gamma} \leq G(n),\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ .$$

Esto implica que $n \in XA$. $\square$

Teorema 3.3 *La hipótesis de Riemann es verdadera* $\Longleftrightarrow \#XA=\infty$.

Comenzaremos demostrando $\#XA = \infty \implies$ la hipótesis de Riemann es verdadera y luego su recíproco.

Demostración: $\Leftarrow$)Supongmos que la hipótesis de Riemann es falsa.

Entonces, por **Teorema 3.2**, tenemos que $G(m) \geq e^{\gamma}$ para algún $m \geq 10080$. Por el Teorema de Grönwall (**Teorema 2.3**) sabemos que $M = \sup_{n \geq 10080} G(n)$ es finito y existe n_0 tal que $G(n_0) = M \geq e^{\gamma}$. (Si $M = e^{\gamma}$ entonces podemos tomar $n_0 = m$).

Sea $n > n_0$ satisface $G(n) \leq M = G(n_0)$ y $n \notin XA$. Por lo tanto $\#XA \leq n_0$. En particular $\#XA < \infty$.

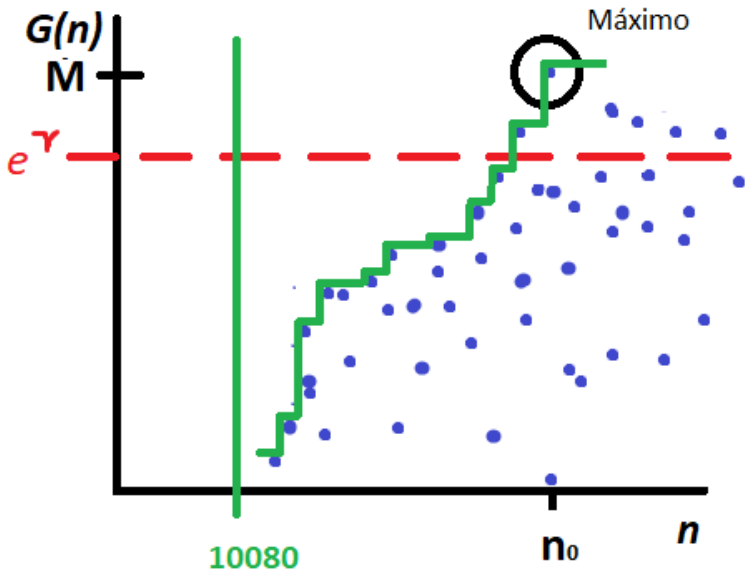


Figura 3.1: $\#XA < \infty$. Los puntos azules son los valores de $G(n)$ y se puede ver $G(n_0) = M$.

En el esquema podemos ver que los números XA alcanzan un máximo en n_0. Debido a que los XA tienden a e^{γ}, una vez que se supera este valor, a partir de cierto n (el cual sería nuestro n_0) comienzan a acercarse nuevamente a e^{γ}. Esto no permitiría que vuelva a haber un XA por definición.

$\Rightarrow$) Por otro lado, si la hipótesis de Riemann es verdadera, vale la desigualdad de Robin (**Teorema 2.1**). Supongamos que $\#XA$ es finito, sea m el máximo. Entonces, $\forall n > m$, vale $G(n) < G(m)$ y, por lo tanto, $\limsup_{n \to \infty} G(n) \leq G(m) < e^{\gamma}$. Sin embargo, esto contradice el Teorema de Grönwall, entonces vale que $\#XA = \infty$. □

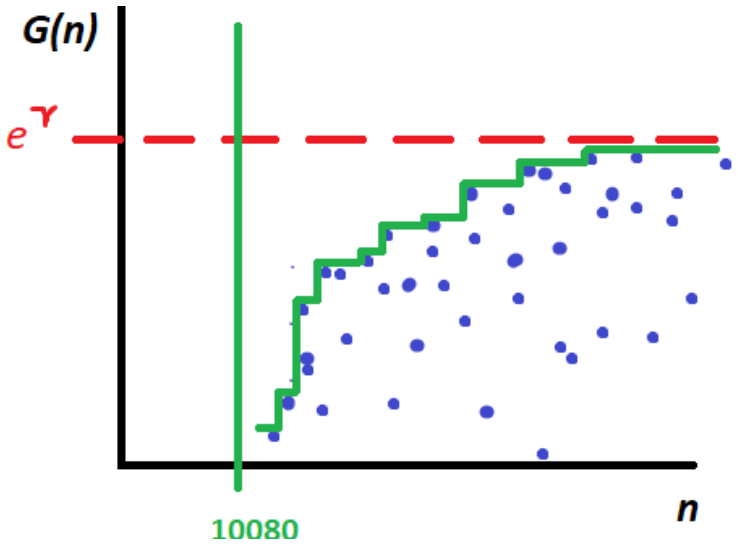


Figura 3.2: $\#XA = \infty$. Los puntos azules son los valores de $G(n)$. Los XA no superan e^{γ} y no se visualiza ningún máximo absoluto.

En esta imagen, se visualiza cómo todos los XA se encuentran por debajo de e^{γ}. Debido a esto, como el comportamiento del conjunto es asintótico, siempre podría encontrar un XA que está por encima del anterior, lo que lo vuelve infinito y no permitiría poder encontrar un máximo.

Capítulo 4

Números Colosalmente Abundantes

Finalmente llegamos a la sección donde detallaremos los elementos principales de este trabajo, a fin de entender más sobre lo comentado en los capítulos anteriores, y acercarnos a una mejor comprensión de la relación entre los conjuntos estudiados y la desigualdad de Robin, lo cual resulta fundamental para comprender mejor la conjetura de Riemann.

Para esto, definiremos un nuevo conjunto de números y veremos cómo están posicionados entre los demás conjuntos ya mostrados. Principalmente estudiaremos una importante relación entre este nuevo conjunto y los XA la cual, en caso de ser demostrada exitosamente, significaría la verificación de la hipótesis.

4.1. Números colosalmente abundantes

Definición 4.1 *Un número n es colosalmente abundante (CA) si para algún $\epsilon>0$ tenemos que*

$$\frac{\sigma(m)}{m^{1+\epsilon}} \leq \frac{\sigma(n)}{n^{1+\epsilon}}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} .$$

Como vimos en el capítulo 1, el **Teorema 1.7** afirma que la función $I(n)$ no está acotada. Es decir, $\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} = \infty$.

Por el Teorema de Grönwall tenemos también que $\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n\log(\log(n))} = e^{\gamma}$. Esto denota

que, al normalizar $\sigma(n)$ agregando $\log(\log(n))$ en el denominador, la función tiene un crecimiento asintótico donde su límite superior es e^{γ}.

Ahora bien, teniendo presente que el $\log(n) < n$ para todo n, podemos trabajar esta relación para ver que $\log(\log(n)) < n^{\epsilon}$. En esta desigualdad puede existir un n, para un ϵ fijo, para el cual no se cumpla, pero si tenemos en cuenta un n suficientemente grande y tomamos logaritmo de ambos miembros quedaría

$$\log(\log(\log(n))) < \log(n^{\epsilon}) \Longrightarrow \log(\log(\log(n))) < \epsilon log(n) \ .$$

Como ϵ es constante, incluso si su valor es ínfimo, $\log(n)$ crece exponencialmente dos veces más rápido que $\log(\log(\log(n)))$. Así entonces, si reemplazamos $\log(\log(n))$ por n^{ϵ}, con $\epsilon > 0$, llegamos a que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n.n^{\epsilon}} = 0 \ .$$

Por lo tanto $G'(n) = \dfrac{\sigma(n)}{n^{1+\epsilon}}$ tiene por lo menos un máximo, el cual vamos a asociar con los números CA.

Tener en cuenta que G' no es la derivada de $G(n)$, sino que se expresa de esta manera para diferenciar ambas funciones.

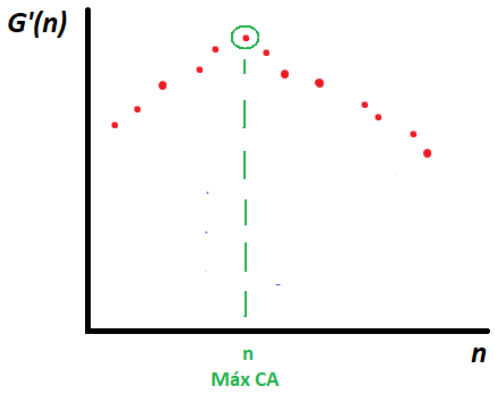


Figura 4.1: $G'(n)$ tiene al menos un máximo que es **CA**.

Recordemos que para los SA, la condición se cumple para los n tal que $m < n$. En el caso

de los CA, la desigualdad dada se cumple para todo $m, n \in \mathbb{N}$. La principal diferencia está en que los números CA tiene un índice de abundancia *ponderado* al agregar n^{ϵ} en el denominador.

Teorema 4.1 $CA \subset SA$.

Demostración: Supongamos que $n \in CA$ tal que $n \notin SA$. Entonces para un $m < n$ tenemos que $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(m)}{m}$.
Como $n \in CA$ tenemos:

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\epsilon}} \geq \frac{\sigma(m)}{m^{1+\epsilon}} > \frac{\sigma(n)}{n.m^{\epsilon}} ,$$

entonces

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\epsilon}} > \frac{\sigma(n)}{n.m^{\epsilon}} \Rightarrow \frac{1}{n^{\epsilon}} > \frac{1}{m^{\epsilon}} \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^{\epsilon} > 1 .$$

Esto contradice la hipótesis de que $m<n$. Por lo tanto, si $n \in CA$, entonces $n \in SA$. □

Teorema 4.2 *Existen infinitos CA.*

Demostración: Ver (Broughan, 2017), lema 6.11. □

Teorema 4.3 *Sea* $3 \leq N < n < N'$*, donde* N *y* N' *son dos CA consecutivos. Entonces,*

$$G(n) < Max\{G(N), G(N')\} .$$

Demostración: Ver (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014), proposición 20. □

Este teorema nos explica que, si tenemos dos números CA consecutivos, cualquier otro número en medio tiene que estar por debajo al evaluarlo en G. Es decir, si tomamos números **SA** y **XA**, por ser subconjunto de los $\mathbb{N}$, ninguno puede estar por encima de dos CA consecutivos.

El teorema es de los más importantes porque nos ayuda a entender la importancia de los números CA ya que, hasta este momento, hemos observado que los CA conforman un conjunto de máximos locales de $G(n)$. Sin embargo, estamos hablando de máximos locales de la función G, pero aun no podemos asegurar si estos números son los máximos entre los demás números abundantes pertenecientes a los otros conjuntos, principalmente por lo que hemos visto en el capítulo anterior sobre los números XA y el **Teorema 3.2**.

La pregunta entonces que debemos hacernos es ¿los números CA son los únicos máximos? ¿Podemos hallar algún XA que también sea máximo? Si esto es así ¿cuál de ambos números sería mayor?

Tengamos en cuenta que, como vimos en el capítulo anterior, si $\#XA$ es finito, entonces por Grönwall habría un máximo absoluto asegurado. Aun así, no es suficiente para contestar las preguntas anteriores al comparar con los valores de CA.

4.2. Relación entre los CA y XA

Lema 4.3.1 *Sea $N<N'$ dos* ***CA*** *consecutivos. Si existe un $n \in XA$, $n>10080$, que satisface $N<n<N'$, entonces $N' \in XA$.*

Demostración: Sea $B = \{n \in XA : N<n<N'\}$. Como $n \in XA$, tenemos que $B \neq \emptyset$. Sea $n' = Max\ B$. Como $n' \in XA$ y $n'>N$ tenemos que $G(n')>G(N)$.

Por **Teorema 4.3** $G(N')>G(n')$.

Por lo tanto, por la definición de XA tenemos que $N' \in XA$. □

Este lema, vinculado al **Teorema 4.3**, nos facilita entender entonces que si encontramos un número XA entre dos números CA, si el CA que le sigue está por encima del valor del XA, entonces resulta también ser un XA. Es decir, un número CA también puede ser XA.

Por lo tanto, ahora que sabemos que los CA pueden ser XA, teniendo en cuenta lo visto en el **Teorema 4.2**, en caso de tener infinitos XA entonces podriamos tener infinitos CA que sean XA.

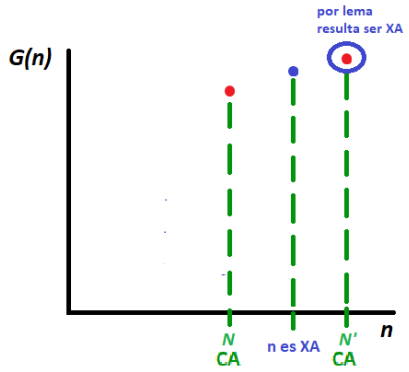


Figura 4.2: Como N, N' son CA, $n \in XA$ y $N<n<N'$, el mayor de los CA es también un XA.

Teorema 4.4 *Si la hipótesis de Riemann es verdadera entonces existen infinitos CA que son XA.*

Demostración: Si la hipótesis de Riemann es verdadera entonces por el **Teorema 3.3** del capítulo anterior $\#XA=\infty$.

Sea $n\in XA$, como $\#CA=\infty$ (**Teorema 4.2**) y por **Teorema 4.3** siempre existen $N, N'\in CA$ tal que $N<n\leq N'$.

Si $n=N'$ entonces $N'\in XA$. Sino, por lema anterior, $n\neq N'$ pero $N'\in XA$. □

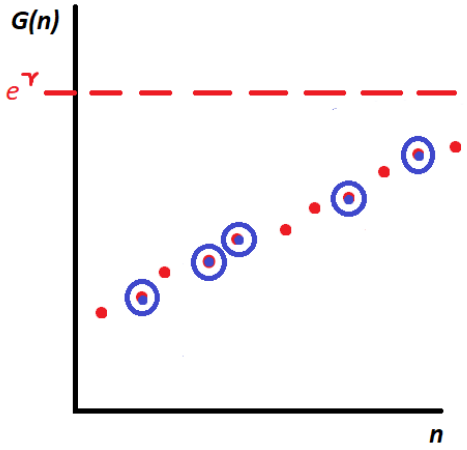


Figura 4.3: Los puntos rojos representan a los CA y los círculos azules a los XA. Hay infinitos CA que también son XA.

Teorema 4.5 *Existen infinitos $n\in CA$ tal que $\log(n)<p$ donde p es el primo más grande de la factorización de n.*

Demostración: Ver (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014), teorema 25. □

Tengamos en cuenta que, como $CA\subset SA$, la potencia de p es 1 (**Teorema 1.8**).

Lema 4.5.1 *Si $n\in XA$, $n>10080$ y p es el primo más grande de la factorización de n y $m=\frac{n}{p}$. Entonces $m>10080$.*

Demostración: Notar que

$$\log(n)=\log(p_1^{k_1}...p_r)=\log(p_1^{k_1})+...+\log(p_r)=$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \log(p_i^{k_i}) > \sum_{i=1}^{r} \log(p_i) = \theta(p_r) \ .$$

Recordemos que $\theta(p_r)$ es la función de Chebyshev (**Definición 1.8)**.

Entonces, por **Teorema 1.9** tenemos que

$$\theta(p_r) > \frac{p_r}{3}$$

$$\Rightarrow \log(n) > \frac{p_r}{3} \ ,$$

o lo que es lo mismo

$$3\log(n) > p_r \ .$$

Por lo tanto

$$m = \frac{n}{p_r} > \frac{n}{3\log(n)} > 10080 \ .$$

Ahora debemos ver que $f(x) = \dfrac{x}{3\log(x)}$ es estrictamente creciente. Entonces, esto quiere decir que $f'(x)>0$

$$f'(x) = \frac{\log(x) - 1}{3\log^2(x)} > 0 \quad para\, x > 1 \ .$$

Siendo la función estrictamente creciente, verificamos algún valor que sea mayor que 10080.

Si utilizamos x=400000 tenemos que

$$f(400000) = 10336 > 10080 \ .$$

Por lo tanto, quiere decir que la desigualdad se cumple para $n \geq 400000$.

¿Qué ocurre para $n<400000$?

En la **Tabla 1** del anexo se puede ver el resultado. El XA más chico después de 10080 es más grande que 400000 . □

Habiendo analizado estos teoremas que establecen la existencia de infinitos CA que, a su vez son XA, corresponde ahora examinar que esta relación no es absoluta. Estudiando más a fon-

do los números XA se encuentran propiedades que pueden demostrarnos situaciones contrarias a esta afirmación.

Teorema 4.6 *Sea* $n \in XA$ *y* $n=2^{k_1}...p_r$. *Entonces* $p_r < \log(n)$

Demostración: Para n=10080 tenemos que

$$P(10080) = 7 < 9.218 < \log(10080) \ ,$$

donde $P(n)=p_r$, es decir, el último primo de la factorización de n.

Por lema anterior (**Lema 4.5.1**) sabemos que si $n > 10080$ entonces $\dfrac{n}{p} = m > 10080$ ($n \in XA$ y $XA \subset SA$).

Entonces usando la definición de XA tenemos que:

$$\left(\frac{\sigma(n)}{n}\right) / \left(\frac{\sigma(m)}{m}\right) > \frac{\log(\log(n))}{\log(\log(m))} \ , \quad \text{con } n > m$$

$$\left(\frac{\sigma(n)}{n}\right) / \left(\frac{\sigma(m)}{m}\right) = \left(\frac{\sigma(2^{k_1}...p_{r-1}^{k_{r-1}}.p_r^{k_r})}{2^{k_1}...p_{r-1}^{k_{r-1}}.p_r^{k_r}}\right) / \left(\frac{\sigma(2^{k_1}...p_{r-1}^{k_{r-1}})}{2^{k_1}...p_{r-1}^{k_{r-1}}}\right) = \frac{\sigma(p_r)}{p_r} = \frac{p_r+1}{p_r} = 1 + \frac{1}{p_r} \ .$$

Entonces

$$1 + \frac{1}{p_r} > \frac{\log(\log(n))}{\log(\log(m))} \Rightarrow \frac{1}{p_r} > \frac{\log(\log(n))}{\log(\log(m))} - 1$$

$$\frac{1}{p_r} > \frac{\log(\log(n)) - \log(\log(m))}{\log(\log(m))} = \frac{\log\left(\frac{\log(n)}{\log(m)}\right)}{\log(\log(m))} = \frac{\log\left(\frac{\log(m)+\log(p_r)}{\log(m)}\right)}{\log(\log(m))}$$

$$\frac{1}{p_r} > \frac{\log\left(1 + \frac{\log(p_r)}{\log(m)}\right)}{\log(\log(m))}. \tag{4.1}$$

Ahora, usaremos la desigualdad $\dfrac{t}{t+1} < \log(1+t)$ a la que llamaremos $S(t)$ para acotar el numerador. Para eso, primero demostraremos que se cumple

$$\frac{t}{t+1} < \log(1+t) \Rightarrow 0 < \log(1+t)(t+1) - t \ .$$

Veamos si la función $f(x) = \log(1+x)(x+1) - x$ es estrictamente creciente.

$$f(x) = \log(1+x)(x+1) - x$$

$$f'(x) = \log(x+1) > 0\ , \quad \text{para } x > 0\ .$$

Por lo tanto, a partir de x>0 la función $f(x)$ es estrictamente creciente.

Además, para x=10080 la función es positiva, ya que $f(10080) \approx 82850,7684... > 0$.

Con la desigualdad probada, volvemos a la demostración inicial haciendo una sustitución. Entonces, si $t = \dfrac{\log(p_r)}{\log(m)}$ y $t+1 = \dfrac{\log(p_r)+\log(m)}{\log(m)}$, usando la desigualdad $S(t)$ podemos continuar desarrollando

$$\left(\frac{\log(p_r)}{\log(m)}\right) / \left(\frac{\log(p_r)+\log(m)}{\log(m)}\right) = \left(\frac{\log(p_r)}{\log(m)}\right) / \left(\frac{\log(n)}{\log(m)}\right) =$$

$$\frac{\log(p_r)}{\log(n)} < \log\left(1 + \frac{\log(p_r)}{\log(m)}\right)\ .$$

Ahora ya tenemos una cota para el numerador y podemos seguir desarrollando la demostración inicial (4.1).

$$\frac{1}{p_r} > \frac{\log\left(1 + \frac{\log(p_r)}{\log(m)}\right)}{\log(\log(m))} > \frac{\frac{\log(p_r)}{\log(n)}}{\log(\log(m))} = \frac{\log(p_r)}{\log(n)\log(\log(m))}\ ,$$

como n>m

$$\frac{1}{p_r} > \frac{\log(p_r)}{\log(n)\log(\log(m))} > \frac{\log(p_r)}{\log(n)\log(\log(n))}$$

$$\frac{1}{p_r} > \frac{\log(p_r)}{\log(n)\log(\log(n))} \Longleftrightarrow \log(n)\log(\log(n)) > \log(p_r)p_r\ ,$$

si consideramos $\log(n)$=a queda $a\log(a)$>$\log(p_r)p_r$.

Veamos que la función es creciente:

$$f(x) = x\log(x)$$

$$f'(x) = \log(x) + 1\ .$$

$f'(x)$ es estrictamente creciente a partir de $x{=}e^{-1}$. Con esto resulta entonces

$$a\log(a) > \log(p_r)p_r \iff a > p_r \ .$$

Es decir entonces que $\log(n){>}p_r$. □

Teorema 4.7 *Existen infinitos CA que no son XA.*

Demostración: Por el **Teorema 4.5** sabemos que existen infinitos números CA tal que $\log(n){<}p$. Sin embargo, acabamos de ver con el teorema anterior que todos los XA cumplen que $p{<}\log(n)$. Por lo tanto, todos aquellos números CA que cumplen que $\log(n){<}p$, no cumplen con ser XA. □

En la **Tabla 1** del apéndice se pueden ver los primeros 20 números XA, cuáles de ellos son CA y la comparación del primo más grande p contra $\log(n)$. También, en esta tabla se puede ver la factorización de los SA a través de la notación #. Esta notación se conoce como primorial, el cual es una manera de mostrar la productoria de todos los primos a partir del número que figura delante (una suerte de factorial pero utilizando solo los números primos).

Actualmente, utilizando la lista de números SA (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014), tomando $C{=}SA_{1,000,000}$ ($C{\in}SA$), tenemos las siguientes referencias de los conjuntos:

$$\#\{n \in XA : n < C\} = 24875 \tag{4.2}$$

$$\#\{n \in CA : n < C\} = 21187 \tag{4.3}$$

$$\#\{n \in CA \cap XA : n < C\} = 20468 \tag{4.4}$$

$$\#\{n \in XA \setminus CA : n < C\} = 4407 \tag{4.5}$$

$$\#\{n \in CA \setminus XA : n < C\} = 719 \tag{4.6}$$

Tener cuidado de no confundir la notación del cardinal de estos conjuntos con la notación de primorial mencionada anteriormente

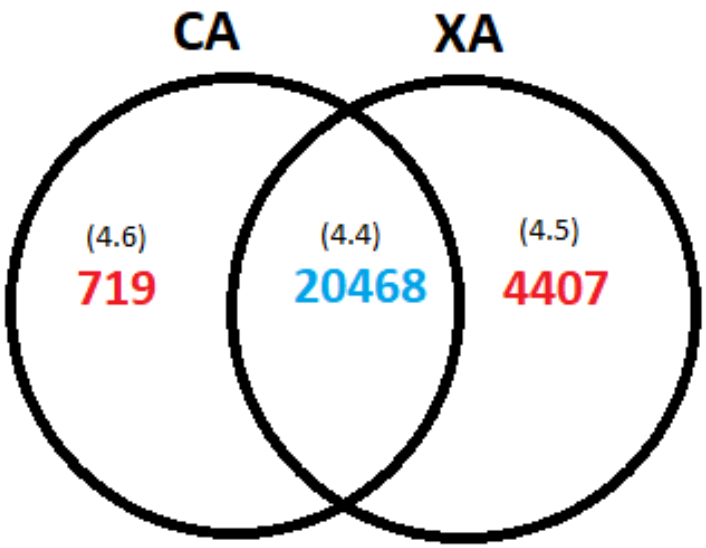


Figura 4.4: Gráfico de los Conjuntos para $SA_{1,000,000}$. La gran mayoría de los CA son XA

.

Estos valores son una referencia para poder visualizar cómo están distribuidos los distintos números. En la imagen se puede ver con claridad los datos mencionados. Hasta el $SA_{1,000,000}$, la gran mayoría de los números CA son también XA. Por otro lado, no se ve una distinción, como un patrón, entre la distribución de ambos conjuntos que nos dé una idea del comportamiento si tomamos una SA mayor.

En base a estos resultados estudiados, no se puede sacar una conclusión para el análisis profundo de las distintas equivalencias. Hasta el $SA_{1,000,000}$ se han encontrado más números XA que CA, lo cual no dice mucho si tenemos en cuenta lo que se probó respecto a que los números CA son infinitos pero los XA aún no se puede asegurar si también lo son o no. Vimos que los CA pueden considerarse de alguna manera "máximos" por el **Teorema 4.3**. Todo está por debajo de ellos. Pero, los XA también son máximos en sucesión por ser los máximos relativos de $G(n)$.

Finalmente, no contamos con demostraciones suficientes como para establecer una afirmación concreta entre estos dos conjuntos. Más allá de discutir cuál sería el *máximo*, lo relevante aquí es señalar cuál de los dos podría considerarse como candidato más sólido para cuestionar la validez de la hipótesis de Riemann.

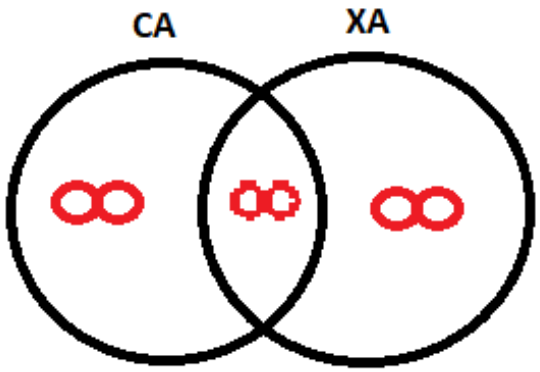


Figura 4.5: Situación 1: Hipótesis de Riemann verdadera, entonces los conjuntos CA y XA son infinitos.

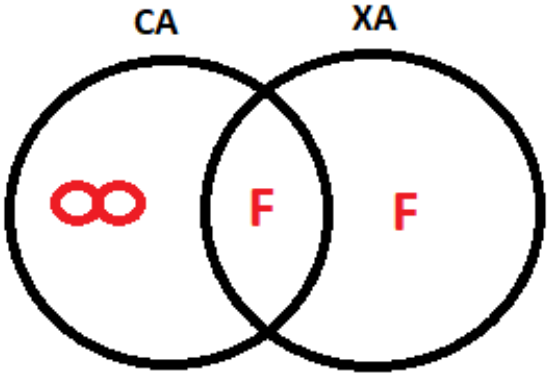


Figura 4.6: Situación 2: Hipótesis de Riemann falsa, entonces aunque el conjunto CA es infinito, los XA no lo son.

En estos esquemas podemos ver gráficamente cómo quedaría la relación entre ambos conjuntos. Independientemente de $\#XA$, los conjuntos tienen características similares, pero ninguno está incluido dentro del otro.

En el primer caso, ambos conjuntos son infinitos y, por lo tanto, se puede decir que habría infinitos XA que son CA.

En el siguiente caso, se muestra a los XA como un conjunto finito, con lo cual habría una cantidad finita de elementos que son tanto CA como XA.

Por lo tanto, volviendo a las equivalencias vistas en el capítulo 3, la primera figura 4.5 muestra el caso donde la hipótesis de Riemann es verdadera y la 4.6 cuando la hipótesis no se cumple.

Capítulo 5

Conclusión

Hemos visto las características de los distintos conjuntos de números abundantes para comparar sus diferencias y poder obtener mayor comprensión sobre la hipótesis de Riemann. A lo largo del trabajo se tomó como principal punto la relación de la hipótesis con la desigualdad de Robin, lo que llevó al estudio de la función $G(n) = \dfrac{\sigma(n)}{n\log(\log(n))}$, la cual, según los resultados conocidos, podría encontrarse acotada superiormente por e^{γ}.

Se estudió al conjunto de los CA como referente para llegar a conocer más sobre los números XA, quienes son los principales actores en este enigma por su conexión directa con la desigualdad. Dicha conexión sirve para demostrar si se puede cumplir o no, ya que, como vimos en el capítulo 3, si se encuentra un contraejemplo para la desigualdad entonces el primero es XA. También estudiamos la importancia de determinar si el conjunto de los XA es infinito o no, para ver en detalle, como un nuevo enfoque, la equivalencia entre este conjunto y la hipótesis de Riemann. De esta forma, se analizó si dicho resultado puede darnos nuevas ventajas para el desarrollo de lo que venimos planteando.

Aquí es cuando se traen los números CA para ver las similitudes de ambos conjuntos y, teniendo en cuenta que se ha podido probar que es infinito, ver si es posible encontrar, de una manera, que nos muestre el mismo comportamiento para los XA.

El poder comparar estos dos conjuntos permitió llegar a una posibilidad de analizar la in-

finidad del conjunto XA. Quisimos ver si entre ambos conjuntos había una relación de inclusión. Sin embargo, por lo que se detalló en el capítulo 4, no cumplen las mismas propiedades y solo se logró ver que, parte del comportamiento de los CA no se refleja de la misma manera en los XA. Gracias a los estudios de (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014), sabemos que hay infinitos CA que son XA, pero como hasta el momento no se ha podido probar si este último conjunto es infinito, entonces no podemos asegurar su recíproco. Entonces, ambos conjuntos resultaron tener una relación donde comparten elementos, pero que no termina de ser suficiente para establecer una equivalencia entre ellos.

Finalmente, el querer aprender más acerca de la hipótesis de Riemann y la desigualdad de Robin nos llevó al estudio de estos conjuntos, que nos permitió comprender mejor las distintas propiedades y equivalencias entre los mismos. El análisis realizado ha permitido identificar patrones, contrastes y puntos de contacto entre los diferentes conjuntos de números abundantes, contribuyendo así a la comprensión del marco aritmético que rodea a uno de los problemas más importantes de la matemática moderna. Este trabajo, que funciona como recopilatorio de los estudios realizados por Broughan (Broughan, 2017), Nazardonyavi y Yakubovich (Nazardonyavi & Yakubovich, 2014), Robin (Robin, 1984) y demás autores mencionados a lo largo del documento, se plantea como una base para futuras investigaciones más profundas que, eventualmente, puedan ofrecer un avance y más respuestas para esclarecer uno de los enigmas más persistentes de la matemática.

Apéndice

A.1. Tablas de referencia

	n	Tipo	$G(n)$	$p(n)$	$\log(n)$	k_2
1	$s_{20} = (7\#)(3\#)2^3 = 10080$		1,75581	7	9,21831	5
2	$s_{356} = (113\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^3$	CA	1,75718	113	126,444	8
3	$s_{368} = (127\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^3$	CA	1,75737	127	136,163	8
4	$s_{380} = (131\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^3$	CA	1,75764	131	136,163	8
5	$s_{394} = (137\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^3$	CA	1,75778	137	141,083	8
6	$s_{408} = (139\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^3$	CA	1,75821	139	146,018	8
7	$s_{409} = (139\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,75826	139	146,711	9
8	$s_{438} = (151\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^3$		1,75831	151	156,039	8
9	$s_{440} = (151\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,75849	151	156,732	9
10	$s_{444} = (151\#)(13\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,75860	151	158,678	9
11	$s_{455} = (157\#)(13\#)(5\#)(3\#)^2 2^4$		1,75864	157	161,788	9
12	$s_{458} = (157\#)(13\#)(7\#)(3\#)^2 2^3$		1,75866	157	163,041	8
13	$s_{459} = (157\#)(13\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,75892	157	163,734	9
14	$s_{476} = (163\#)(13\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,75914	163	168,828	9
15	$s_{486} = (163\#)(17\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$		1,75918	163	171,661	9
16	$s_{493} = (167\#)(13\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,75943	167	173,946	9
17	$s_{502} = (167\#)(17\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,75966	167	176,779	9
18	$s_{519} = (173\#)(17\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,76006	173	181,933	9
19	$s_{537} = (179\#)(17\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,76038	179	187,120	9
20	$s_{555} = (181\#)(17\#)(7\#)(3\#)^2 2^4$	CA	1,76089	181	192,318	9

Cuadro 1: Primeros 20 Números XA.
La notación de # representa la productoria de todos los primos anteriores a n. Por ejemplo, $7\# = 7.5.3.2$.

n	$G(n)$	$G(n) - e^{\gamma}$
1	-	-
2	-4,092625159	-5,873697579
4	5,357674361	3,576601941
6	3,429366567	1,648294147
12	2,563440314	0,782367894
24	2,162126621	0,381054201
36	1,980481187	0,199408767
48	1,908540572	0,127468152
60	1,986369749	0,205297329
120	1,915700702	0,134628282
180	1,841393394	0,060320974
240	1,822219894	0,041147474
360	1,833470838	0,052398418
720	1,782629653	0,001557233
840	1,797811594	0,016739174
1260	1,763709634	-0,017362786
1680	1,766957029	-0,014115391
2520	1,804610891	0,023538471
5040	1,790973367	0,009900947
10080	1,755814339	-0,025258081
15120	1,738558674	-0,042513746
25200	1,712482036	-0,068590384
27720	1,742536724	-0,038535696
55440	1,751246515	-0,029825905
110880	1,73484901	-0,04622341
166320	1,726928743	-0,054143677
277200	1,711243756	-0,069828664
332640	1,716096975	-0,064975445
554400	1,702593136	-0,078479284
665280	1,694346908	-0,086725512
720720	1,733065356	-0,048007064

Cuadro 2: Listado de números SA. Se muestran los valores de $G(n)$ con respecto a e^{γ}.

Bibliografía

Alaoglu, L., & Erdös, P. (1944). On highly composite and similar numbers. *Trans. Am. Math. Soc.*, *56*, 448-469.

Apéry, R. (1979). Irrationalité de $\zeta(2) et (3)$. *Astérisque*, *61*, 11-13.

Arfken, G. (1970). *Mathematical methods for physicists*. Academic Press.

Broughan, K. (2017). *Equivalents of the Riemann Hypothesis Volume One: Arithmetic Equivalents*. Cambridge University Press.

Edwards, H. M. (1974). *Riemann's zeta function*. Academic press.

Grönwall, T. H. (1913). Some asymptotic expressions in the theory of numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *14*, 113-122.

Haible, B., & Papanikolaou, T. (1998). Fast multiprecision evaluation of series of rational numbers. *Algorithmic Number Theory. Lecture Notes in Computer Science*, *1423*, 338-350.

Laatsch, R. (1986). Measuring the abundancy of integers. *Math. Mag.*, *59*(2), 84-92.

Lagarias, J. C. (2002). An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis. *Amer. Math. Monthly*, *109*, 534-543.

Nazardonyavi, S., & Yakubovich, S. B. (2014). Extremely Abundant Numbers and the Riemann Hypothesis. *J. Integer Seq.*, *17*(2), 14-2.

Platt, D., & Trudgian, T. (2021). The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$. *Bulletin of the London Mathematical Society*, *53*(3), 792-797.

Rivoal, T. (2000). La fonction zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I*, *331*(4), 267-270.

Robin, G. (1984). Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann. *J. Math. Pures Appl.*, *63*, 187-213.

Zudilin, W. (2001). One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ *is irrational*. *Russ. Math. Surv.*, *56*(4).