



Universidad Abierta Interamericana

Facultad de tecnología informática

Seminario – Taller de Integración II

Trabajo final

Intuición Visual y Razonamiento en Matemáticas

Salazar, Franco Federico

Profesorado Universitario de Matemática

Directora:

Inés Casetta

Índice

Introducción	2
Desarrollo	4
1. Pensamiento matemático avanzado	4
2. Visualización Matemática	5
3. Análisis de métodos analíticos y del registro visual	6
3.1. Primer estudio: Integrales.....	6
3.2. Segundo estudio: construcción de campana	11
4. Reflexiones en términos de la autora.....	17
Propuesta didáctica	18
Conclusiones.....	27
Bibliografía	29
Anexo complementario.....	31

Introducción

El avance en el estudio de la visualización en matemática, a través de una cantidad considerable de investigaciones, indica que una de las posibles causas de este hecho es el surgimiento de la tecnología, su utilización como recurso didáctico en la enseñanza y en la comprensión de diversos conceptos matemáticos.

La amplia y vertiginosa evolución tecnológica genera un gran impacto en la vida de las personas, atraviesa distintos ámbitos. En la educación matemática incluye posibilidades innovadoras en las maneras de enseñar, aprender y hacer matemática. Además, tras el inicio de la pandemia en el año 2020 se puso de manifiesto la necesidad de capacitación para los docentes no solo a nivel tecnológico, sino especialmente en base al concepto que encierra la siguiente expresión: “generar procesos de enseñanza y de aprendizaje en la virtualidad”.

La tecnología se ha transformado en un recurso al que el docente puede y debe recurrir, tanto para implementarla en clases presenciales, como en entornos virtuales de enseñanza. En base a estas ideas hemos seleccionado el artículo de Inés Gómez-Chacón que se publicó en el año 2014 y lleva por título *Intuición visual y razonamiento en matemáticas*. En él la autora avanza en la línea del pensamiento matemático avanzado y su abordaje se centra especialmente en dos aspectos: la visualización matemática y las relaciones entre los procesos de razonamiento e intuición, busca en remarcar la relevancia de la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como también “generar propuestas superadoras”.

En este artículo, Gómez-Chacón explicita la concepción teórica que adopta respecto de la intuición visual y el razonamiento en matemáticas, presenta dos tipos de investigaciones a su cargo junto con otros investigadores. Una de ellas está referida a la comprensión visual y concepto de integral en la enseñanza universitaria; y otra, relativa al aprendizaje matemático en contextos tecnológicos. Por último, aporta una serie de materiales e interpretaciones, en el marco de un Seminario de Ideas y Visualizaciones Matemáticas (Corrales & Gómez-Chacón, 2011) vinculados a la Cátedra de Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid.

Este trabajo, que tiene como eje el artículo mencionado, se estructura de la siguiente manera:

En primer lugar, aportaremos conceptos de la línea de la educación matemática conocida como Pensamiento Matemático Avanzado y la relación que existe entre los procesos de intuición y razonamiento.

En segundo lugar, realizaremos un análisis, sin pretensión de exhaustividad, de las distintas conceptualizaciones de diferentes autores, respecto de la visualización matemática.

En tercer lugar, abordaremos las investigaciones expuestas por Gómez-Chacón en el artículo de referencia y agregaremos un análisis de los métodos analíticos y del registro visual a los que apelan los alumnos al momento de resolver los problemas a los que se enfrentan.

En cuarto lugar, analizaremos las conclusiones a las que arriba Gómez-Chacón sobre las investigaciones realizadas, abordando las cuatro fases fundamentales que el docente presenta al

alumno para llegar a la conceptualización matemática que se propone, a través de la resolución de problemas.

Seguidamente desarrollaremos un ejemplo de una propuesta didáctica (que no se encuentra en el artículo analizado) que, a través de un problema, que intenta mostrar como la visualización matemática permite al alumno recurrir al registro visual, utilizando un software tecnológico y cómo esta herramienta puede ayudar al alumno a lograr una resolución exitosa.

Para finalizar, presentaremos nuestras conclusiones desde la mirada de estudiante avanzado a las puertas de ser profesor universitario de Matemática.

Desarrollo

1. Pensamiento matemático avanzado

En el artículo eje de este trabajo Gómez-Chacón hace referencia a la existencia en estas últimas décadas de diversos estudios que han puesto en evidencia las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando quieren ingresar a instituciones universitarias. Argumenta que uno de los motivos de esta problemática lo constituye el mayor nivel de formalismo y abstracción que presentan las materias de niveles educativos superiores respecto de la educación secundaria.

A continuación, nos centraremos en explicitar y desarrollar algunos núcleos conceptuales referidos al marco teórico del pensamiento matemático avanzado.

La línea de la educación matemática conocida como Pensamiento Matemático Avanzado, desarrollada por Tall y Dreyfus, está basada en dos disciplinas: la psicología y la matemática, y se apoya en los aportes de la psicología cognitiva, elaborada por Piaget y Bruner. En el escrito *Mathematics Thinking and Learning at Post-Secondary Level*, se estudian las condiciones a las que se enfrenta un individuo para pasar del pensamiento matemático elemental al avanzado. Por lo general, el primero se refiere al pensamiento que se pone en acción en el aprendizaje de los contenidos matemáticos propios de la escuela media. En cambio, cuando se desarrollan contenidos de nivel universitario se pone en juego el pensamiento matemático avanzado.

Dreyfus (1990), menciona que el pensamiento matemático, está caracterizado por diversos procesos; el análisis, la conjetura, la definición, la formalización, la demostración, la generalización y la síntesis. Entiende que si bien, a estos procesos se los vincula más con las matemáticas avanzadas, pueden y deben comenzar a desarrollarse a partir de niveles educativos elementales. Dreyfus (2002) sostuvo que *“no hay una clara distinción entre muchos de los procesos de enseñanza elemental y matemática avanzada, aunque las matemáticas avanzadas se centran más en las abstracciones de la definición y la deducción”*.

En esta misma línea, Tall (1992) expresa que, pasar del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado implica una transición que requiere una reconstrucción significativa. La misma se caracteriza por hechos trascendentes como pasar de describir a definir, pasar de convencerse a sí mismo a convencer a un amigo, pasar de convencer a un amigo a convencer a un enemigo. En otras palabras, pasar de convencer a demostrar.

En la investigación realizada por Peña, Cruz y Sanchez Rodriguez (2019), se puede encontrar un ejemplo en el que se evidencian las formas avanzadas del pensamiento matemático. Se puede observar en la investigación cuando los estudiantes buscan la solución de $\frac{5}{0}$. Algunos pueden realizar una interpretación incorrecta de la operación, e indican que el resultado es 0. Pero quienes consiguen entender correctamente la operación, explican que no pueden dar una solución ya que no existe un número que multiplicado por 0 sea 5. Esta contestación refleja que los alumnos entienden la expresión $\frac{5}{0}$, no sólo como una operación (proceso), sino como un número (concepto).

2. Visualización Matemática

El concepto de visualización matemática fue analizado por diversos autores. En su artículo, Gómez Chacón adopta la definición de Arcavi:

Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión. (Arcavi, 2003, p217).

En este sentido, se afirma que la visualización cumple con cuatro roles que son de vital importancia para los estudiantes:

1. *Actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos.*
2. *Resolver el conflicto entre soluciones correctas simbólicas de intuiciones incorrectas.*
3. *Reorganizar ciertas características de los conceptos, muchas de las cuales pueden ser obviadas por las soluciones formales.*
4. *Usar heurísticamente las imágenes para la resolución de problemas y para transitar entre pensamiento analítico y geométrico.*

Para estudiar el concepto de visualización, consideramos dos investigaciones que se mencionan en el artículo base del presente trabajo, que tuvieron lugar en el nivel universitario. La primera aborda la comprensión conceptual y visual de una integral; y la segunda, está vinculada al aprendizaje de contenidos matemáticos en un contexto tecnológico. Para ambas investigaciones se incluyen también diversas propuestas pedagógicas.

Al estudiar estas investigaciones, Gómez-Chacón se plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo puede mejorarse la comprensión de la integral (y por tanto disminuir las dificultades y errores de este concepto) desde el punto de vista de los estudios sobre visualización?

Para dar respuesta a este interrogante, la autora analiza algunos puntos claves, a fin de poder elaborar una propuesta didáctica de la integral en la que se tengan en cuenta los procesos de visualización. Para lograr este objetivo se identificaron errores y dificultades relacionadas con la comprensión visual de la integral, destacando los siguientes aspectos:

- Errores y dificultades cometidos en el registro analítico que podrían evitarse con la coordinación del registro visual.
- Errores y dificultades con el manejo del registro visual que han impedido o dificultado la resolución con éxito del problema.

Para analizar y lograr datos sobre esta problemática, como parte de la investigación, entrega a los alumnos diferentes ejercicios, en los que deben calcular distintas integrales que incluyen varios conceptos sobre la función a integrar. Los temas son diversos, entre otros, valor absoluto, función impar, estudio de funciones, simetría, límites. El principal interés del trabajo de campo que se realiza es poder identificar errores y dificultades relacionados con la comprensión visual del concepto de la integral y su registro analítico. Debido a esto, será importante que los alumnos no sólo sepan realizar los cálculos de las integrales, sino que además encuentren en una representación visual el respaldo que necesitan para justificar los cálculos que están haciendo, y, que lo realizado, sea lo correcto.

3. Análisis de métodos analíticos y del registro visual

3.1. Primer estudio: Integrales

El primer estudio del artículo se centra en el concepto de integral para analizar la visualización y su incidencia en la elaboración de conceptos. Dicha investigación fue realizada con una población de estudiantes del primer año de la carrera de Licenciatura de Matemática, en la Universidad Complutense de Madrid (Souto y Gómez-Chacón, 2011). El principal objetivo fue incidir en la mejora de la enseñanza del análisis matemático, haciendo hincapié en el proceso de visualización.

La autora remite a investigaciones previas, en ellas se manifiesta que, en los primeros años de la universidad, los estudiantes tienen un manejo mecánico y operativo del concepto. Además, se hace notoria la falta de relación entre los conceptos de integral y área por parte de los estudiantes. Por este motivo, resulta importante prestar atención a la coordinación entre el registro visual y analítico, para poder lograr una mejor interpretación del concepto de integral definida (Mundy, 1987; Gonzalez - Martín y Camacho, 2005). Estas investigaciones habilitan a la autora del artículo en análisis, a incorporar las teorías cognitivas de registros de representación y las de visualización.

Actividades propuestas en el primer estudio

Contexto

El trabajo se realizó en el marco de un curso de Análisis de variables reales, con un grupo de primer año de 29 estudiantes de los cuales 15 son mujeres y 14 hombres. En este curso se introduce la definición formal del concepto de integral. Se consideró parte del contexto, por el paso por la educación secundaria que los alumnos tuvieran el conocimiento de reglas básicas para la integración mediante el uso de primitivas y su relación con el cálculo de áreas bajo curvas.

Metodología

Para la recolección de datos, se utilizaron como instrumentos un cuestionario con problemas y entrevistas semiestructuradas. El cuestionario tuvo 10 problemas de análisis matemático, algunos de los cuales fueron tomados de otros estudios, por ejemplo, de Mundy, (1987) citado en Eisenberg y Dreyfus, (1991). La mayoría de ellos, además de tener un planteo algebraico, daban la posibilidad

de realizar una interpretación visual (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Además, fueron seleccionados por la posibilidad de analizar el desempeño de los estudiantes en lo que respecta a la coordinación de registros y, en particular, al uso del registro gráfico.

En el análisis de datos, se utilizaron redes sistémicas para el cuestionario y transcripciones para las entrevistas. Las redes sistémicas permiten observar simultáneamente todas las respuestas de los estudiantes a los problemas y posibilitan analizar de manera más organizada los siguientes elementos: estrategias y tipos de representación utilizados por cada alumno, frecuencia de uso y dificultades de cada registro y concepciones de los estudiantes.

Análisis de resultados

Se describen los resultados de algunos de los problemas dados en el cuestionario, los cuales se relacionan con el tema Integrales. En este caso, resulta interesante analizar los diferentes tipos de razonamientos que tuvieron los alumnos a la hora de intentar resolver los problemas.

Primer ejercicio

¿Qué está mal en el siguiente cálculo de la integral?

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{-1}^1 = \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1}^1 = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

En primer lugar, resulta muy importante el método y el registro que eligen los alumnos para intentar resolver el ejercicio. Esta decisión está directamente relacionada con la concepción utilizada para el concepto de integral. Todos los estudiantes que respondieron correctamente estaban enfocados en la función o contemplaron la interpretación de la integral como el área bajo una curva. Esto llevó a dos estudiantes al uso del registro gráfico. Sin embargo, la mayoría de ellos, 22 alumnos para ser precisos, interpretaron a la integral como un proceso. Esto quiere decir, que basaron su registro algebraico en cálculos de primitivas y Regla de Barrow. Debido a esto, no pudieron responder correctamente la pregunta. Además, varios de ellos cometieron algunos errores, como usar una primitiva diferente, errores de cálculo o intercambiar los signos al aplicar la Regla de Barrow.

En segundo lugar, se hizo notorio que el tipo de representación inicial elegido para la resolución no determina el éxito. Por ejemplo, hubo un estudiante que se basó en hacer cálculo de primitivas, pero logró responder correctamente. Esto sucedió porque realizó una combinación flexible del cálculo, con otro argumento sobre el dominio de una función. Además, al analizar las respuestas se hizo notorio que la coordinación de registros permite a los alumnos lograr una mayor comprensión del problema. Sin embargo, es muy posible cometer errores si la combinación de ambos registros no está acompañada por una mayor reflexión. El principal error que tuvieron los alumnos fue empezar a resolver de manera mecánica sin reflexionar sobre el tipo de función. Al tratarse de una función racional habrá una restricción del dominio, en este caso, 0 no pertenece al dominio de la función. Por este motivo, se menciona que resulta de vital importancia el uso y la coordinación de los diferentes tipos de representaciones y registros sumado a la comprensión del problema.

Segundo ejercicio

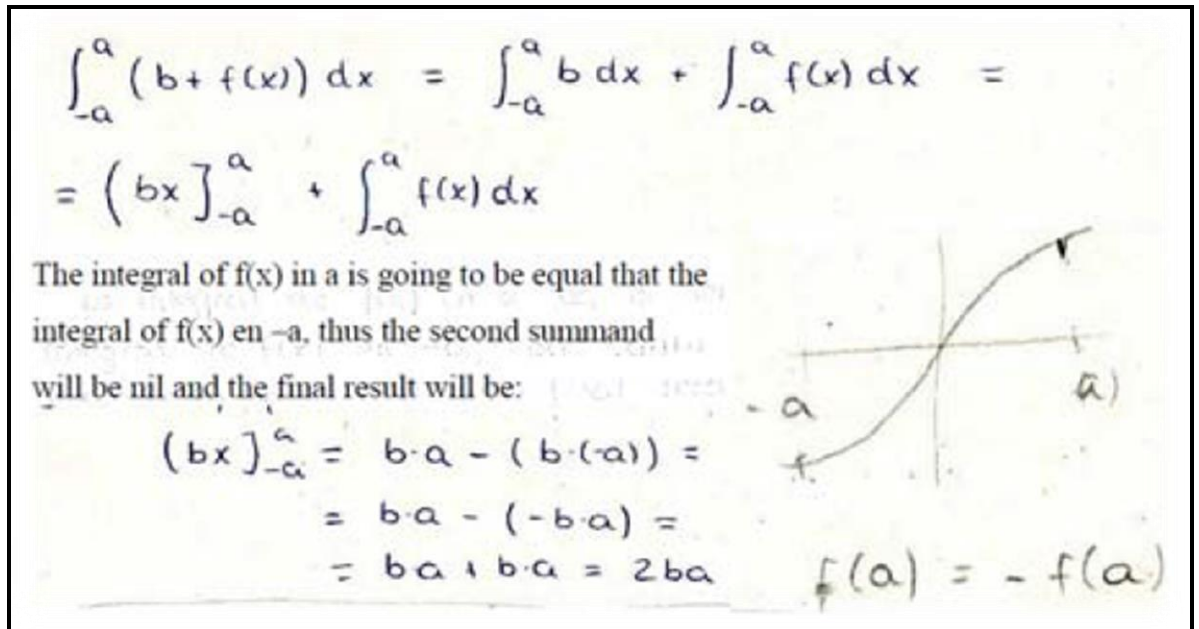
Si f es una función impar en $[-a, a]$ calcula:

$$\int_{-a}^a (b + f(x)) dx$$

A esta actividad la respondieron veinte estudiantes, de los cuales solo ocho recurrieron al registro gráfico.

Primera forma de resolución

El primer tipo de resolución (Figura 1) es el que apareció con mayor frecuencia entre los alumnos. En ella utilizaron imágenes para recordar la definición de funciones impares y sus propiedades. Por lo tanto, se considera que la imagen es innecesaria. Por este motivo, se tomó el método de resolución empleado como “no visual”. En el ejemplo mostrado (Figura 1), el trabajo realizado va acompañado de una imagen que el alumno interpretó dando una definición incorrecta de funciones impares. Aun así, esto no afectó el razonamiento algebraico, por lo que se consideró válido.



$$\int_{-a}^a (b + f(x)) dx = \int_{-a}^a b dx + \int_{-a}^a f(x) dx =$$

$$= (bx) \Big|_{-a}^a + \int_{-a}^a f(x) dx$$

The integral of $f(x)$ in a is going to be equal that the integral of $f(x)$ en $-a$, thus the second summand will be nil and the final result will be:

$$(bx) \Big|_{-a}^a = b \cdot a - (b \cdot (-a)) =$$

$$= b \cdot a - (-b \cdot a) =$$

$$= ba + b \cdot a = 2ba$$

$f(a) = -f(a)$

Figura 1: Método no visual

Al considerar, en esta forma de resolución, los roles de la visualización planteados en el punto 2, vemos que este tipo de resolución solo cumple con el primer rol: *actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos*.

Utiliza el gráfico de soporte para confirmar el procedimiento, pero este es totalmente analítico.

En las otras dos resoluciones las imágenes fueron primordiales para la resolución del problema.

Segunda forma de resolución

La segunda resolución (Figura 2) fue dada por dos estudiantes. Se la ha denominado método mixto, porque necesita de un primer paso en el registro algebraico, aplicando propiedades, descompone la integral en dos integrales para luego sumar sus resultados. En un segundo paso trabaja con dos representaciones gráficas, una para cada integral. Esta conversión les permitió a los alumnos obtener el valor de las integrales sin realizar operaciones en el registro algebraico.

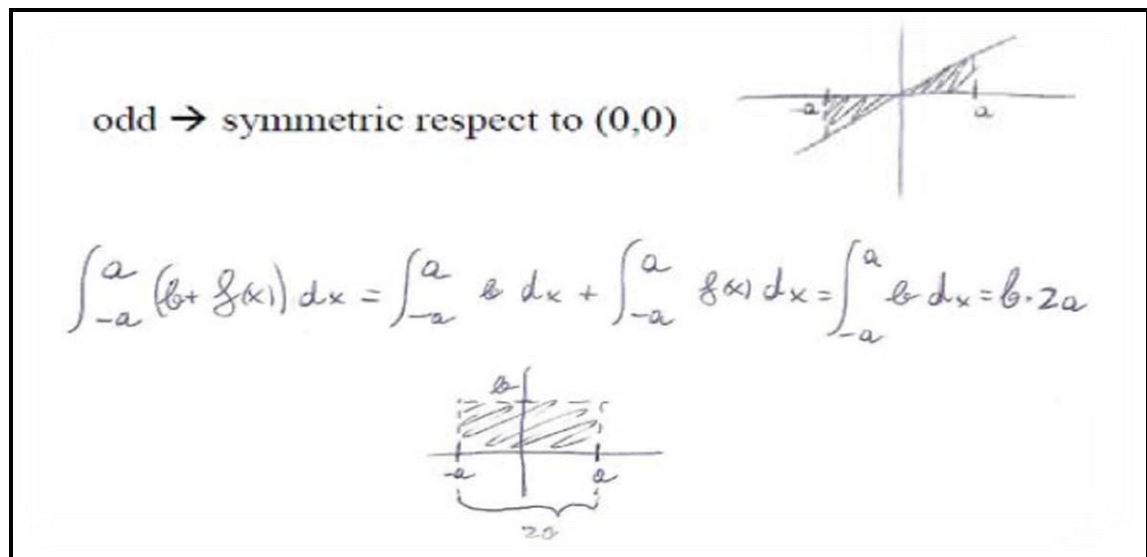


Figura 2: Método mixto

Al analizar, en este caso los roles de la visualización planteados en el punto 2, vemos que este tipo de resolución es el más completo, ya que cumple con los siguientes roles: *actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos, reorganizar ciertas características de los conceptos, muchas de las cuales pueden ser obviadas por las soluciones formales y usar heurísticamente las imágenes para la resolución de problemas y para transitar entre pensamiento analítico y geométrico.*

Efectivamente comienza resolviendo de manera analítica, aplicando propiedad aditiva para separar las integrales, luego recurre al registro gráfico para analizar las dos funciones, y con este recurso retoma el registro analítico para obtener la solución.

Tercera forma de resolución

La tercera resolución (Figura 3) es considerada totalmente visual, pues al inicio incluye solo una conversión al registro gráfico, en la que se desarrolla el argumento principal. En esta respuesta se consideran en simultáneo más conceptos y relaciones que en los métodos mencionados anteriormente. Se trabaja la interpretación visual de la integral como área y las funciones impares como aquellas simétricas alrededor del punto (0,0). Además, se reconoce que agregar una cantidad

constante a una función significa una traslación de su gráfica a lo largo del eje de ordenadas. Se finaliza haciendo algún tratamiento de imagen de ese tipo de sectores de corte y pegado, teniendo en cuenta sus signos. Este tipo de resolución posee una dificultad cognitiva que es propia del registro visual, lo que Zimmerman y Cunningham consideran una de las causas por las cuales la visualización puede generar rechazo. Por último, se da una respuesta analítica que sigue un proceso lineal en el que, luego de algunas operaciones, se llega a la solución de la integral es igual a $2ab$.

Si consideramos los roles de la visualización planteados en el punto 2, entendemos que en esta resolución se manifiesta el siguiente rol: *Usar heurísticamente las imágenes para la resolución de problemas y para transitar entre pensamiento analítico y geométrico.*

Notemos que al establecer las áreas bajo la curva identifica figuras geométricas que puede manipular para hallar el área. Está enlazando el concepto analítico de integral definida con las figuras geométricas y así habilita una heurística en la que las imágenes de las figuras geométricas le permiten avanzar en la resolución del problema.

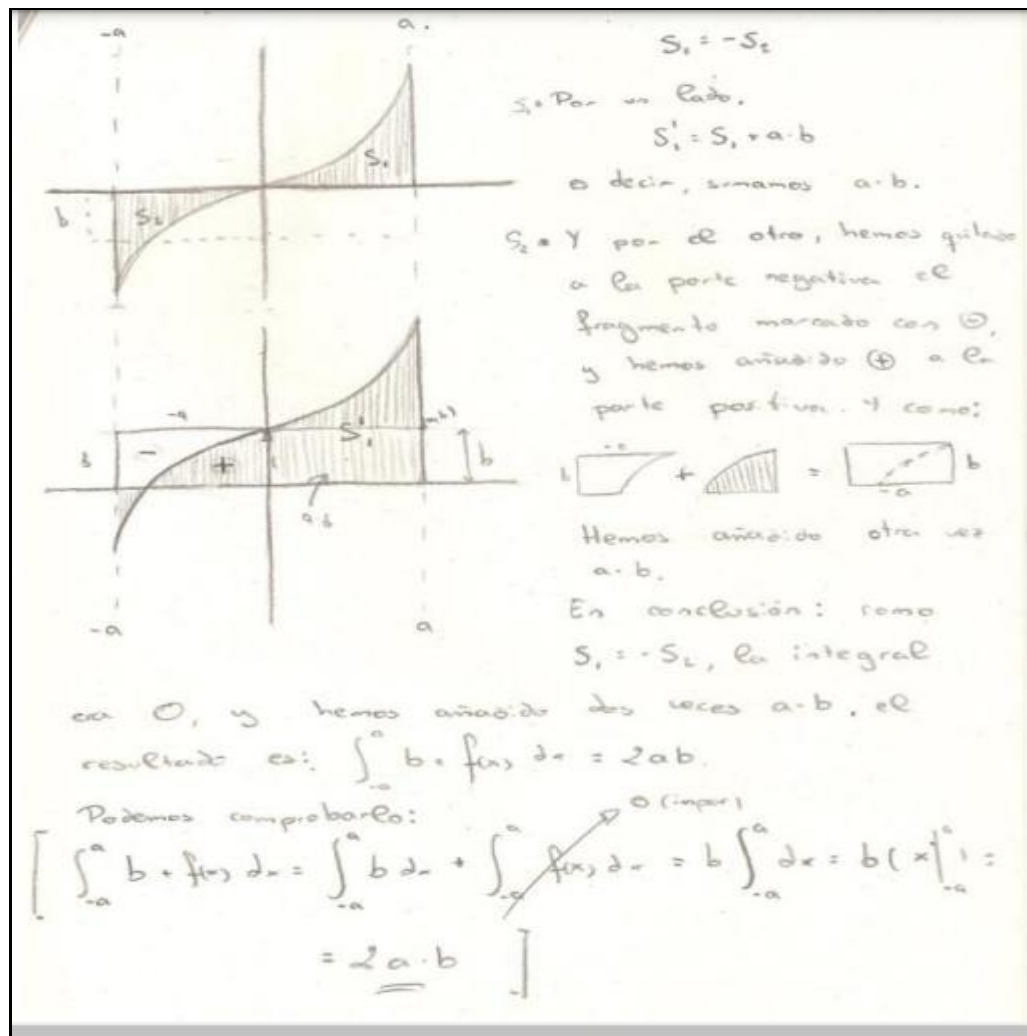


Figura 3: Método visual

Conclusiones sobre las resoluciones

Al observar los diferentes métodos que utilizaron los alumnos y sus resultados, la autora concluye, que la combinación de argumentos visuales y no visuales a la hora de enseñar parece ser más propicia para lograr un aprendizaje más significativo en los estudiantes, ya que aporta distintos mecanismos que facilitan la comprensión.

Los resultados mostraron que, en el primer ejercicio, el 97% de los alumnos resolvió la actividad, pero solo el 28% lo hizo de manera correcta. Mientras que, en el segundo ejercicio, el porcentaje de alumnos que resolvieron la actividad bajó a 72%, pero también fue el 28% quienes lo hicieron de manera correcta. Se observó que fue muy bajo el uso de representaciones visuales en la primera actividad por parte de los alumnos (14%). En el segundo problema, el porcentaje de alumnos que utilizaron representaciones visuales coincide con el de alumnos que respondieron correctamente.

De este modo, Gómez-Chacón amplía su conclusión aclarando que, para optimizar y mejorar el aprendizaje y comprensión de conceptos, se deben relacionar los registros visuales y los analíticos. En este punto se pregunta: ¿qué rechazo o preferencia por el razonamiento visual se produce en contextos computacionales? ¿Cómo la tecnología media en el pensamiento matemático e interactúa con las estructuras matemáticas? ¿Cómo se producen las transiciones entre génesis figural – semiótica, instrumental y discursiva en el trabajo geométrico?

Al estudiar distintas investigaciones elaboradas sobre el tema, es posible observar que una de las dificultades que tienen los docentes al implementar representaciones visuales en el momento de enseñar, es el rechazo o la no valoración que les genera a los alumnos. Por ejemplo, en el ejercicio 1 del estudio analizado, se hizo notorio que son muy pocos los alumnos que recurren al registro visual para intentar resolver problemas.

Sin embargo, al realizar estudios referidos a aprendizaje matemático, se contradice con lo mencionado anteriormente, ya que los alumnos consideran que el razonamiento y las representaciones visuales tienen un papel fundamental cuando deben resolver problemas matemáticos (Gómez-Chacón, 2012, 2014).

Al consultar con los alumnos sobre sus creencias relacionadas con el uso de software de geometría dinámica, como un recurso que facilite la comprensión y la visualización de los conceptos, se obtuvieron resultados similares. La mayoría de los alumnos responden que les resulta útil y expresan que les genera confianza, que les permite aumentar la rapidez de sus razonamientos y lograr un mayor potencial para desarrollar su intuición y visión espacial.

3.2. Segundo estudio: construcción de campana

Este estudio se centra en el aprendizaje de contenidos matemáticos en un contexto tecnológico, en el que se da una actividad a estudiantes avanzados del profesorado de matemática.

En esta sección se pregunta cuál es la postura que tienen los alumnos frente a la integración de las tecnologías en el aprendizaje: si se las utiliza para lograr un razonamiento visual o no, y qué tanto influyen estas en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Los alumnos tienen una preferencia por obtener un razonamiento visual en un contexto tecnológico, el problema en cuestión es averiguar si se impulsa realmente el trabajo matemático y si favorece a la circulación o relación entre los registros visuales y analíticos.

En su trabajo, mediante experimentos de enseñanza de geometría, Gómez Chacón trata de explorar las siguientes cuestiones: ¿cómo se articulan las tres tipologías de génesis (visual, instrumental y discursiva) necesarias para la construcción de pensamiento geométrico en la integración de software de sistemas dinámicos en el trabajo geométrico? ¿Cómo interviene la utilización de los sistemas de geometría dinámica, en el paso de la geometría natural a la geometría axiomática formal, particularmente en los procesos de visualización e intuición geométrica y cómo influye el uso de este software?

La autora toma como marco teórico el enfoque instrumental (Artigue, 2002) y los espacios de trabajos geométricos (Kuzniak, 2011) que han demostrado que los alumnos no tienen dominio del ciclo de razonamiento y la necesidad de profundizar la visualización icónica frente a la no icónica.

Kuzniak (2011) define espacios de trabajo geométrico a un entorno organizado que permite que las personas resuelvan problemas geométricos. Estos individuos pueden ser, según el caso, un experto (el matemático profesional) o un estudiante. Según este posicionamiento, los problemas no forman parte del espacio de trabajo, pero son la razón de ser y también el activador. Son la razón de ser porque estos entornos deben constituirse en un espacio para afrontarlos y solucionarlos. Resultan un activador porque permitirán la estructuración, tanto institucional como personal del espacio de trabajo geométrico tal como lo vemos.

Gómez Chacón (2014) menciona que, para dominar todo el ciclo de razonamiento, los estudiantes deben utilizar al mismo tiempo las técnicas aplicadas en tres génesis: figurativa, instrumental y discursiva. Además, se debe mostrar un grado de flexibilidad cognitiva en el uso de diferentes facetas del trabajo geométrico.

Para comprender el planteo de Gómez Chacón incluimos aquí las definiciones de cada génesis

- Génesis figurativa: es el proceso semiótico asociado con el pensamiento visual y la transición de una perspectiva sintáctica a una semántica en objetos geométricos. Informa a la geometría dónde las figuras son los soportes visuales favorecidos por el trabajo geométrico. Y, además, proporciona a los objetos tangibles su estado de operación de objetos geométricos (Gómez Chacón, Kuzniak, 2013). Los mismos autores sostienen que Duval (2005) cita dos niveles de operaciones relevantes para este proceso. El primero es icónico, los objetos se identifican o representan mediante la semejanza con un objeto (real) o por comparación con algún tipo de forma que sirva de modelo. Es decir, una figura particular sirve de modelo y otras figuras se reconocen según su grado de parecido con este modelo. Los estudiantes observan por su percepción. El segundo, la visualización no icónica implica un acercamiento más directo al objeto de estudio y supera “lo que se ve” recurriendo a propiedades y teoremas. La visualización no icónica facilita la comprensión del problema, de ahí la pertinencia de activarla durante el trabajo geométrico.

- Génesis instrumental: es el proceso que transforma los artefactos en herramientas dentro del proceso de construcción. Este concepto es profundizado por Gómez Chacón y Kuzniak (2013) cuando aseguran que las computadoras han revolucionado por completo la cuestión del papel de los instrumentos en las matemáticas, al facilitar su uso y ofrecer la posibilidad de plantear pruebas dinámicas. Basado en el trabajo de Rabardel (1995) sobre ergonomía, Artigue (2002) enfatiza la necesidad de una génesis instrumental con dos direcciones principales que puedan insertarse en nuestro marco. Por un lado, la transición ascendente, desde los artefactos hasta la construcción de configuraciones geométricas, se llama instrumentación y describe la manipulación y el dominio de las herramientas de dibujo por parte de los usuarios. Por otro lado, el proceso descendente, desde la configuración hasta la elección adecuada y el uso correcto de un instrumento, está relacionado con los procedimientos de construcción geométrica y se llama instrumentalización. En este segundo proceso, el conocimiento geométrico se involucra y se desarrolla.

Aportamos aquí un análisis sencillo sobre la idea de artefacto, instrumento y los procesos de instrumentalización e instrumentación. Para ello establecemos el concepto de *artefacto* como objeto susceptible de uso, *los esquemas de utilización* que dan cuenta de un pensamiento organizado y estructurado y el *sujeto* que puede ser por ejemplo el estudiante.

Cuando el sujeto usa el artefacto pone en acción algún esquema de uso, el primero se ve modificado por las habilidades del alumno para usarlo y se constituye en instrumento.

Así la instrumentalización se produce cuando el conocimiento del estudiante, sus esquemas de uso, guían la forma en que la herramienta es usada.

La instrumentación es el proceso que corresponde al conocimiento del sujeto, sus esquemas de uso y el reconocimiento de las restricciones y potencialidades que tiene el artefacto transformado en instrumento.

Consideremos como artefacto Geogebra, se trata de un entorno susceptible de uso, cuando el alumno trabaja en él, por ejemplo, para construir un cuadrado, va creando su esquema de utilización va probando con los comandos. Construye el cuadrado en la vista gráfica sobre el plano cartesiano y luego lo mueve, observa que se deforma, se produjo la instrumentalización guiando la forma de usar la herramienta en este caso incorrecta. Si incorpora en el uso del instrumento la definición de cuadrado y sus propiedades va creando otros esquemas de uso y guía la forma de usar la herramienta en este caso correcta.

Si en el proceso el estudiante con sus esquemas de uso reconoce las restricciones de Geogebra y sus potencialidades, por ejemplo, que no puede construir un cuadrado de diagonal $\sqrt{2}$ trazando el segmento con la medida irracional, pero si puede construir un triángulo rectángulo isósceles de lado 1 y usar las propiedades del cuadrado para completar la figura. Logra así un proceso instrumentación.

- génesis discursiva de la prueba, las propiedades utilizadas dentro del razonamiento matemático tienen sentido. El propósito de esta génesis es entablar un proceso de validación bidireccional: un discurso de prueba deductivo respaldado por propiedades

estructuradas en el marco de referencia o, por el contrario, la identificación de propiedades y definiciones que se incluirán en el marco de referencia, después de tratamientos instrumentales o visuales.

Es importante destacar que las diferentes génesis no funcionan por separado, se necesitan, se potencian, para dar al trabajo geométrico un significado que el presente estudio pretende resaltar.

Los autores establecen la idea de paradigma geométrico. Describen el abordaje de las personas cuando resuelven problemas geométricos, sus formulaciones y la forma de comunicar sus soluciones. En este sentido, analizan que los individuos necesitan compartir un conjunto común de creencias, técnicas, prácticas, etcétera. Utilizan el concepto de paradigma como el conjunto compartido de creencias (Kuhn, 1966). Luego para estudiar la geometría que se enseña en los colegios, se han distinguido tres paradigmas geométricos, etiquetados como Geometría I, II, III.

La Geometría I, geometría natural, tiene el mundo real como fuente de validación. Sus afirmaciones son argumentadas en experimentos e inducciones. Las pruebas pueden fundamentarse en dibujos realizados con regla, compás, transportador, entre otros. y las observaciones sobre ellos. El desarrollo de esta geometría estuvo principalmente motivado por problemas prácticos.

La Geometría II, geometría axiomática natural, se referencia en la geometría euclidiana básica, que se basa en un modelo que se aproxima a la realidad. Una vez que se establecen los axiomas, solo las pruebas desarrolladas dentro del sistema de axiomas son válidas.

La Geometría III, geometría axiomática formal, el sistema de axiomas aporta a la deducción lógica. Cada propiedad se deduce en base a los axiomas formales y a los teoremas demostrados dentro de la estructura, el proceso deductivo está desprendido de la evidencia perceptiva. se ocupa más de problemas lógicos y tiende a contener axiomas intuitivos sin ninguna referencia a evidencia perceptiva.

La enseñanza debe considerar entre sus objetivos la visualización y la producción de enunciados, ambas son condiciones para aprender a aprender en geometría. En ese sentido, cabe precisar que toda tarea que se plantee en la actividad geométrica está relacionada con la forma de ver y reconoce dos formas de visualizar, según sea el tipo de operación que se realice con las figuras y la manera como se movilizan sus propiedades: una visualización icónica y otra no-icónica (Duval, 2005).

Es por este motivo que resulta importante que el alumno pueda relacionar las construcciones geométricas que realiza en la Geometría I, con los axiomas y propiedades característicos de la geometría euclidiana, propios de la Geometría II.

Retomando el artículo de referencia, el trabajo de investigación que estamos analizando, plantea como objetivo mostrar el ciclo de razonamiento utilizado por los alumnos para resolver diversos problemas. Para demostrar la incompletitud del ciclo de razonamiento de los alumnos se analizan los resultados de la propuesta.

En este estudio la población estaba compuesta por 98 futuros maestros, divididos en cuatro grupos y se analizó el trabajo geométrico que realizan futuros docentes en un ámbito tecnológico, utilizando Geogebra.

La metodología de esta investigación utilizada es de tipo cualitativa, en la que se observa cómo se forman y analizan las producciones de los alumnos.

Actividad propuesta

Agrandar la siguiente campana (Figura 4) de tal manera que $A'H'$ mida dos veces AB . Elaborar un procedimiento para la resolución del problema planteado. Algunas pistas que pueden ayudarlo a dibujar la campana son las siguientes:

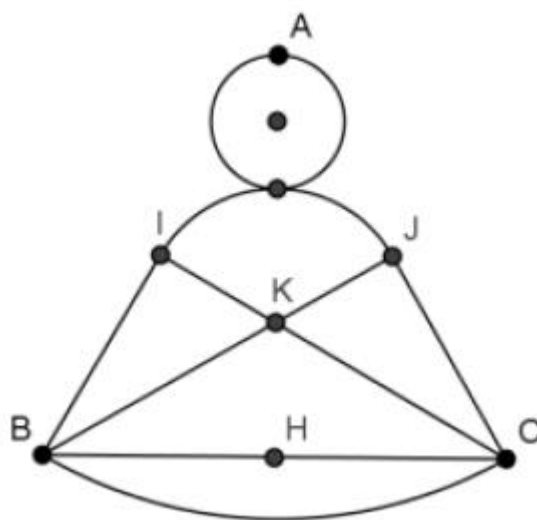


Figura 4

1. Observe que A está en la línea recta BI y en la línea recta CJ.
2. H es el punto medio de BC.
3. Los ángulos IBC y JCB miden 60° .
4. Los ángulos BIC y CJB son ángulos rectos.
5. BC pertenece a una circunferencia de un círculo cuyo centro es A.

De los 98 alumnos, 81 pudieron resolver el problema de la campana, mientras que 17 no fueron capaces de encontrar la solución. Se trata de un problema en el que se destaca la estructura y la conexión entre Geometría I y II. En principio la propuesta fue para el entorno papel y lápiz, luego la construcción de la segunda campana fue realizada en el entorno dinámico Geogebra. Sobre un total de 98 alumnos, 81 pudieron resolverlo, mientras que el resto no pudo hallar la solución.

Análisis de los resultados

Retomando el trabajo de Gómez Chacón y Kuzniak (2013), se señala que la campana inicial fue entregada a los alumnos dibujada en papel y lápiz. Se les pidió a los estudiantes que intenten dibujar la misma campana. Luego, se les pidió que dibujaran la campana más grande en la misma pantalla que la anterior. Al incluir el uso de un software, los alumnos pudieron ver la dependencia entre los elementos de la figura. Esto cambia la naturaleza de la tarea, el tipo de espacio para el trabajo geométrico, y el nivel matemático y tecnológico. La actividad se llevó a cabo en dos sesiones. En la primera sesión, a los estudiantes se les dio el problema y se les pidió que describieran sus resoluciones, es decir, los pasos que siguieron, dificultades que encontraban, estrategias y emociones que les surgían.

Los alumnos en la primera parte de su actividad, se centraron en la construcción de la campana inicial. La segunda sesión se utilizó para trabajar en la campana ampliada y discutir enfoques comunes del proceso y las dificultades que surgieron. De este modo hubo un abordaje desde lo cognitivo y de lo metacognitivo.

El análisis de datos y resultados se centró en clasificar los métodos de construcción de los 30 estudiantes del primer grupo. Para la campana inicial se identificaron tres clases de respuestas diferentes entre estos estudiantes. Los alumnos pensaron la construcción utilizando:

- Regla y compás
- Propiedades de ángulos
- Polígono regular

Por otro lado, para la construcción de la ampliación de la campana se identificaron cuatro métodos basados en:

- Teorema de Thales
- Teorema de Pitágoras
- Solución mediante ángulos
- Homotecia

Posteriormente se amplió el análisis, con la clasificación inicial agregando un conjunto de variables relacionadas con los métodos y dificultades en el trabajo geométrico: uso de propiedades; tipologías de las soluciones para la campana inicial y ampliada; problemas de aprendizaje en la tarea, emociones y dificultades con el software; y dificultades en el control global de los diferentes genes del trabajo geométrico.

Se estableció una relación entre las dos tareas para determinar el papel desempeñado por el trabajo geométrico en la génesis de la actividad. Asimismo, se identificaron dos espacios principales para el trabajo geométrico en función de los datos. Un primer espacio de trabajo geométrico se rige principalmente por un razonamiento discursivo, mientras que el segundo, posee una visión instrumental sobre las actividades de geometría.

En el primer trabajo geométrico analizado se trata de una génesis discursiva, ya que los estudiantes realizan una articulación entre el componente teórico y el proceso de construcción. Está determinado por un trabajo visual analítico sobre la figura, sin darle importancia a las herramientas de dibujo. Se relaciona con la génesis figurativa, identifica sub-figuras y les reconoce propiedades. Como la producción se basa en propiedades, este tipo de trabajo hace referencia a la Geometría II.

El segundo trabajo muestra en su desarrollo una génesis instrumental, ya que se guía por las herramientas de construcción otorgadas por el software tecnológico, que el alumno en su manipulación va creando formas de uso del entorno. Se articula con la génesis figural porque la figura se descompone visualmente para posibilitar el uso de herramientas de dibujo, y la génesis figurativa en el dibujo se guía por las habilidades instrumentales de los estudiantes.

La mitad de los alumnos en este trabajo han construido la campana base y su ampliación utilizando propiedades de ángulos. Se ha observado que se usaron las propiedades de simetría y de invariancia de ángulos, y que se guían tanto por la percepción y la visualización de la figura, como por la utilidad de los instrumentos usados. Por esta razón, se mantuvieron siempre sobre el mismo plano. Este tipo de trabajo hace referencia a la Geometría.

4. Reflexiones en términos de la autora

A partir de sus investigaciones, reflexiona sobre las dificultades que tienen los docentes en el aula, y surgen los siguientes interrogantes: ¿qué conocimientos requiere un matemático para enseñar a visualizar? ¿Cómo plasmar el conocimiento obtenido en la investigación matemática en las clases? ¿Cómo transmitir el sentido y los fundamentos de la visualización a los alumnos?

En este sentido, sostiene que en la actividad del matemático se pueden observar distintas fases que serán importantes que las tenga presente el docente: el descubrimiento, la explicación, justificación y aplicación. El contexto del descubrimiento se encuentra asociado a la exploración y a los hallazgos para lograr la concepción de conceptos matemáticos, que servirán para las resoluciones de problemas. En tanto, que la explicación puede involucrar imágenes, diagramas o diferentes tipos de representaciones, que pueden ser visuales como mentales. Y, por su parte, la justificación está basada en la forma en que se fundamenta, defiende o se presenta una solución matemática.

Estas fases permiten favorecer el trabajo de los matemáticos, en palabras de Thurston (1995): “Como seres humanos que hacen avanzar la comprensión humana de las matemáticas”.

Luego de estas observaciones, Gómez-Chacón finaliza mencionando la descripción que hace Miguel de Guzmán (1996) sobre visualización:

Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa (no es la visualización psicológica). Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas del campo. [...] Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en

cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan y constituye lo que denominamos visualización en matemáticas. (p,15)

Propuesta didáctica

En este apartado se propone y desarrolla una propuesta didáctica en la que se combinará el cálculo analítico de una integral definida, con el cálculo del área bajo la curva utilizando una representación visual; para finalizar, se pedirá la explicación de la relación correspondiente a los dos registros que se utilizarán para resolver el problema.

La actividad es la siguiente:

- 1) Calcular la integral definida de la función $f(x) = x^2 + 3$ en el intervalo $[-2; 2]$.
- 2) Calcular el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo mencionado anteriormente utilizando la representación visual del gráfico, sin recurrir al cálculo analítico de la integral. (Sugerencia: utilizar alguna figura geométrica para cubrir la región de integración).
- 3) Explicar qué conclusión se puede establecer luego de realizar los ejercicios anteriores.

Solución

1) Para calcular la integral de $f(x)$ entre los valores $x = -2$ y $x = 2$, debo utilizar la Regla de Barrow.

La Regla de Barrow dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

Por lo tanto, para la función $f(x) = x^2 + 3$ entre $x = -2$ y $x = 2$, resulta:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 x^2 + 3 \, dx &= \\ \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-2}^2 &= \\ \frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2 - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 3 \cdot (-2) \right) &= \\ \frac{8}{3} + 6 - \left(\frac{-8}{3} - 6 \right) &= \\ \frac{8}{3} + 6 + \frac{8}{3} + 6 &= \\ \frac{52}{3} &= 17, \hat{3}\end{aligned}$$

2) El ejercicio nos pide hallar el área bajo la curva entre los valores $x = -2$ y $x = 2$. En este caso, vamos a utilizar el entorno Geogebra para hallar dicha área.

El primer paso consistirá en graficar la función $f(x) = x^2 + 3$. Resulta el siguiente gráfico:

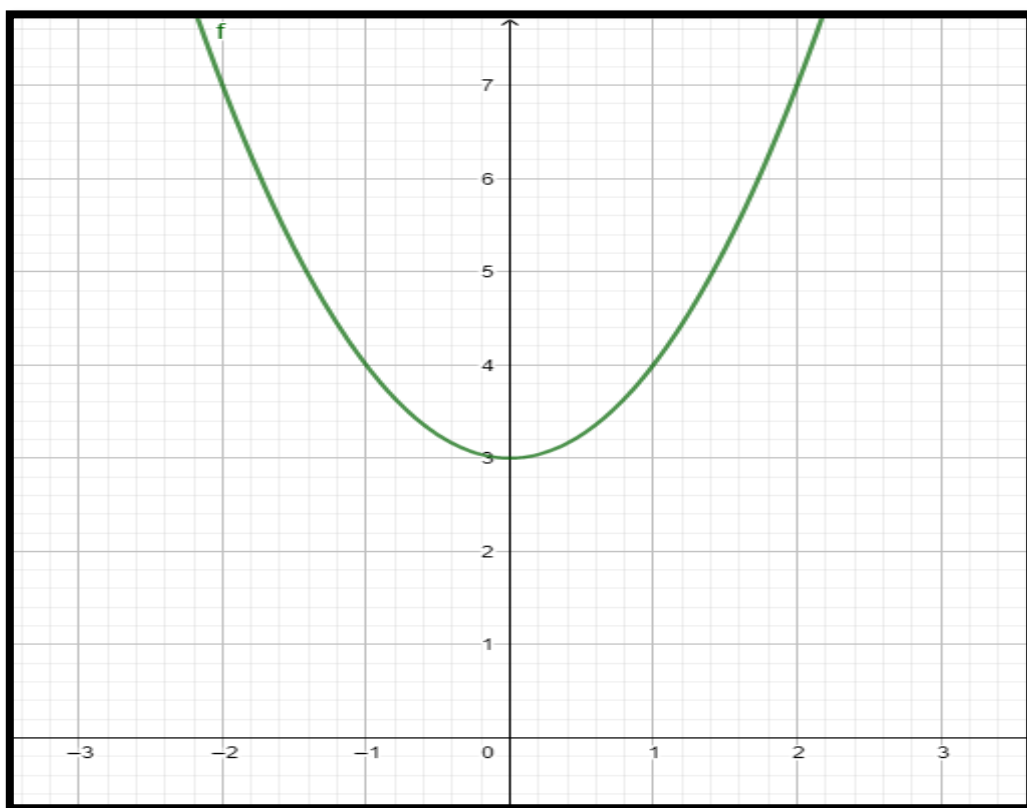
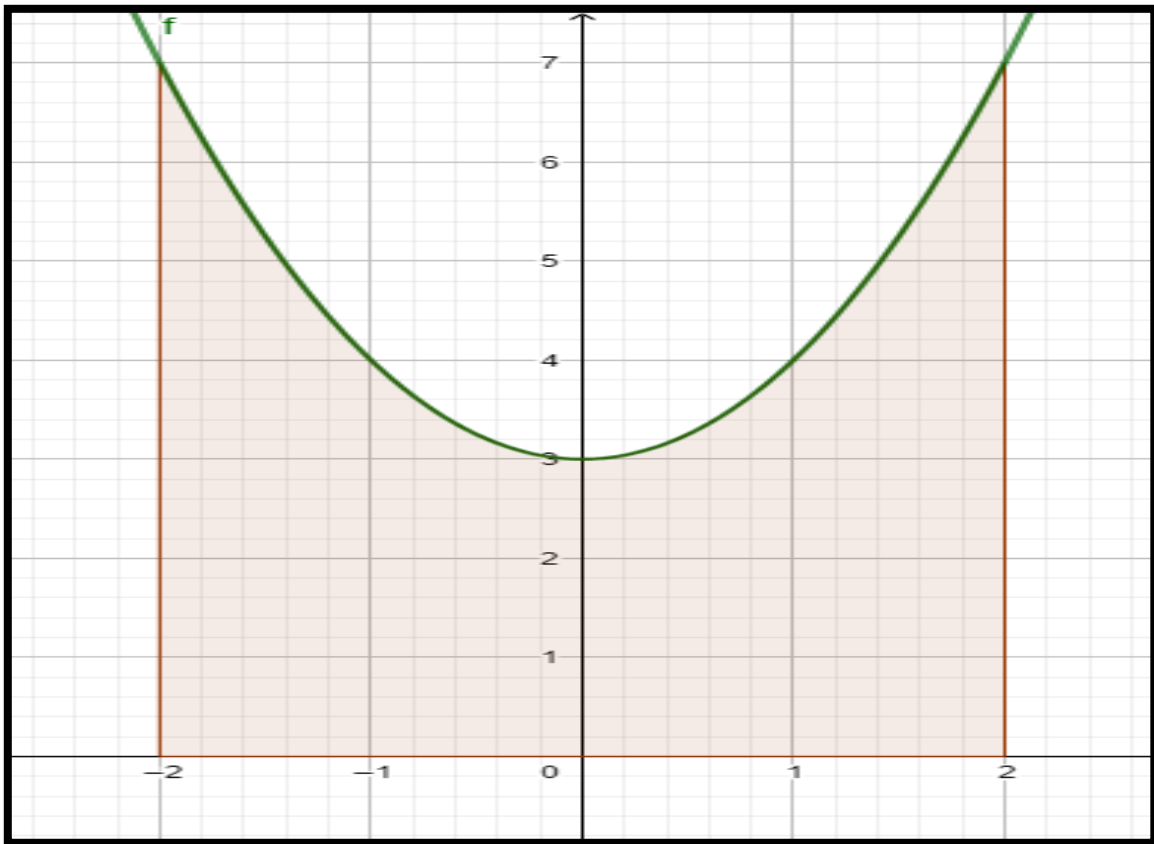


Figura 5

Como debemos hallar el área que se encuentre entre el eje de abscisas y la función, entre los valores $x = -2$ y $x = 2$, lo marcamos en el gráfico (Figura 6):

*Figura 6*

Lo que se pretende con este ejercicio es encontrar el área sin recurrir al cálculo analítico de la integral. Para eso, podemos usar figuras geométricas que serán insertadas en dicha área. Como el rectángulo resulta la figura más conveniente, debido a su forma y la expresión de la fórmula para calcular su área tan conocida por los estudiantes, construiremos rectángulos con el objetivo de cubrir toda el área señalada.

A continuación, veremos que sucede a medida que dividimos el área bajo la curva en rectángulos e iremos aumentando el número de rectángulos contruidos. Compararemos el resultado de la integral calculada en el ejercicio 1 con la suma de las áreas de los rectángulos que se irán construyendo. Debemos recordar que obtuvimos que el valor de la integral de $f(x)$ entre $x = -2$ y $x = 2$ es de 17,333....

- Si construyo un rectángulo, donde la base es 4 y la altura 3, entonces resulta un área de 12 (Figura 7):

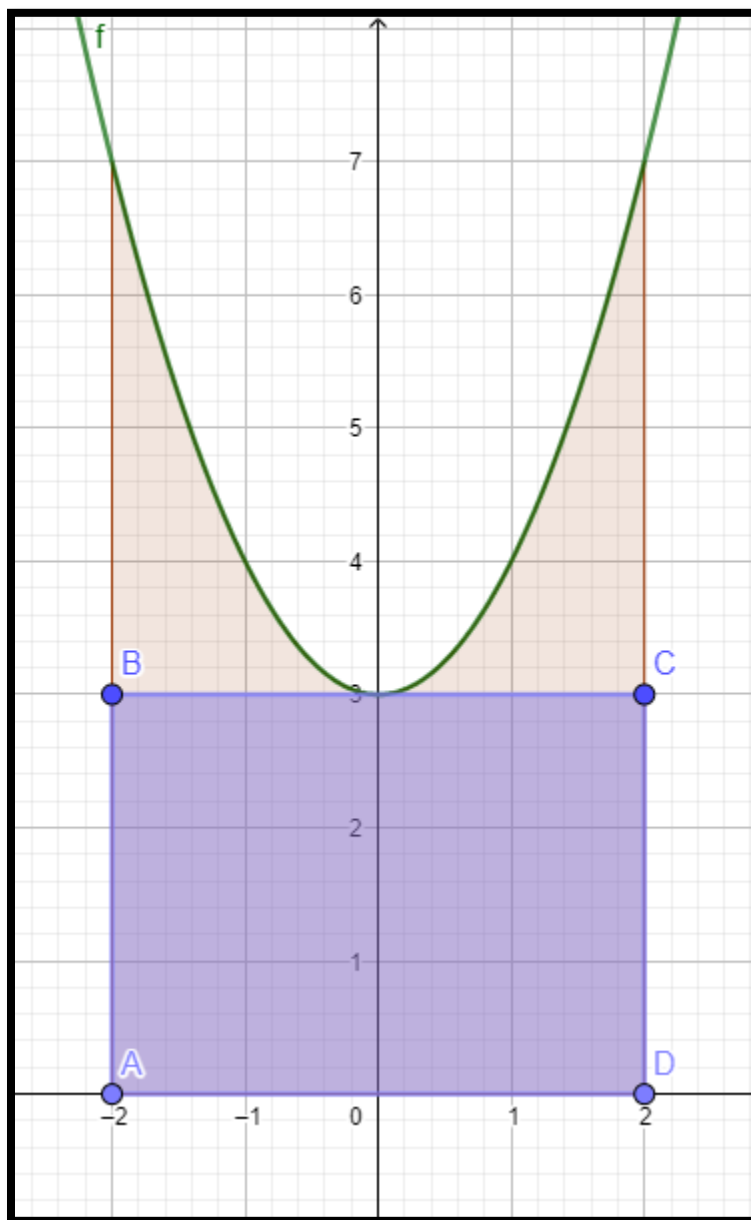


Figura 7

- Si construyo 4 rectángulos, donde dos tienen como área 4 (base 1 y altura 4) y otros dos tienen como área 3 (base 1 y altura 3), al sumarlos obtenemos un área de 14 (Figura 8):

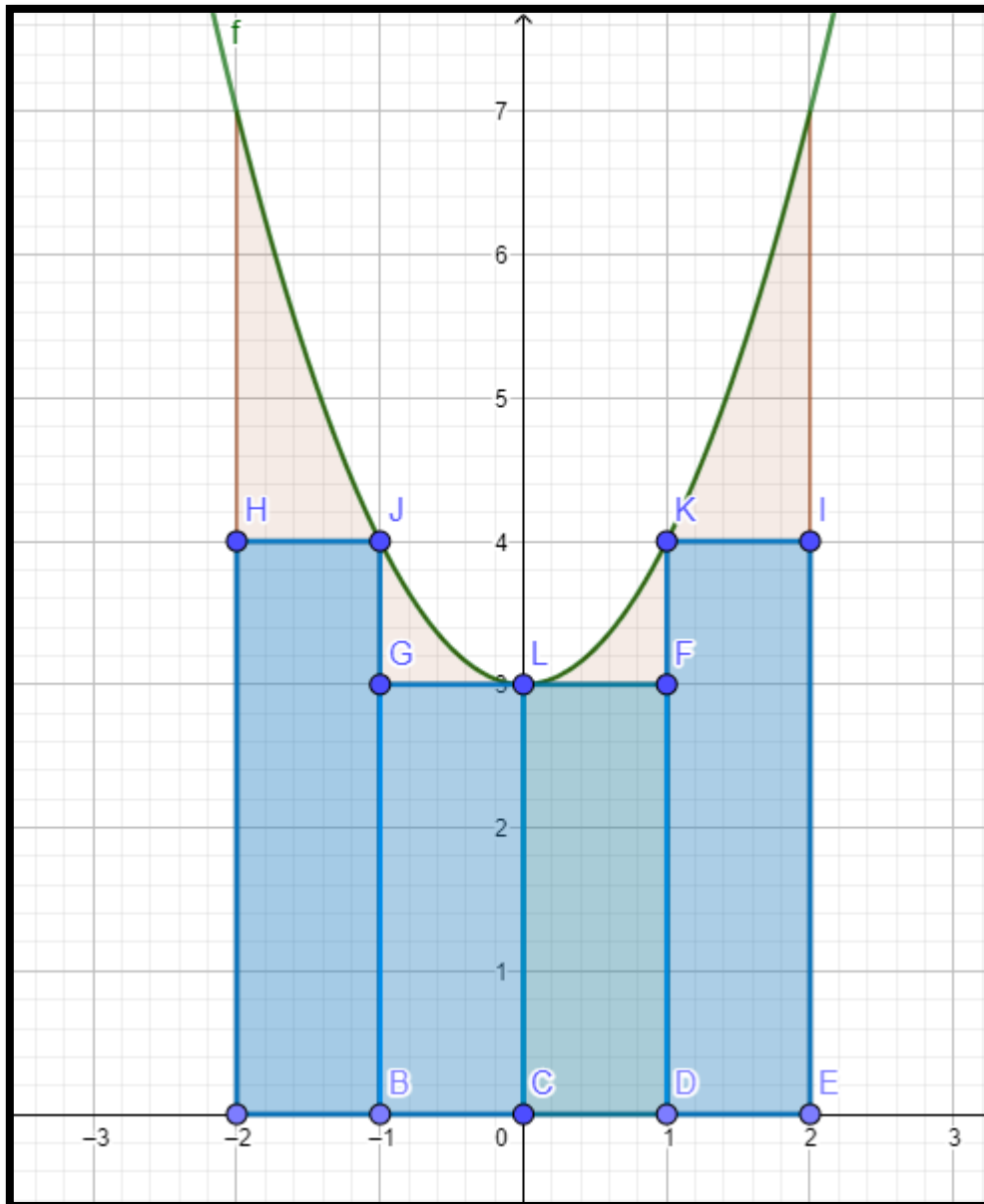


Figura 8

De esta manera puedo seguir aumentando el número de rectángulos para cubrir el área bajo la curva.

Para ahorrarnos el tiempo de ir construyendo cada vez más rectángulos bajo la curva, podríamos utilizar el entorno Geogebra que posee un comando que nos será de utilidad. Se trata de la herramienta “suma inferior”. Lo que hace este comando es, utilizando un deslizador, construir una cantidad n (variable del deslizador) de rectángulos en un intervalo debajo de una función. Para ser más precisos, para utilizar el comando debemos escribir en la entrada de Geogebra lo siguiente:

`SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)`

El deslizador, que llamaremos “ n ”, representará la cantidad de rectángulos que construiremos bajo la curva. En este caso, al crear el deslizador le indicamos que tenga un valor mínimo de 1 y un valor máximo de 100 (es posible crear más rectángulos), siendo “ n ” un número entero. De esta manera, el comando podrá construir entre 1 a 100 rectángulos bajo la curva y sumará las áreas.

Entonces, en la sección “entrada” insertaremos el comando de la siguiente manera:

“*Suma Inferior* ($f(x)$, $-2, 2, n$)”

Una vez insertado el comando, nos devuelve lo siguiente:

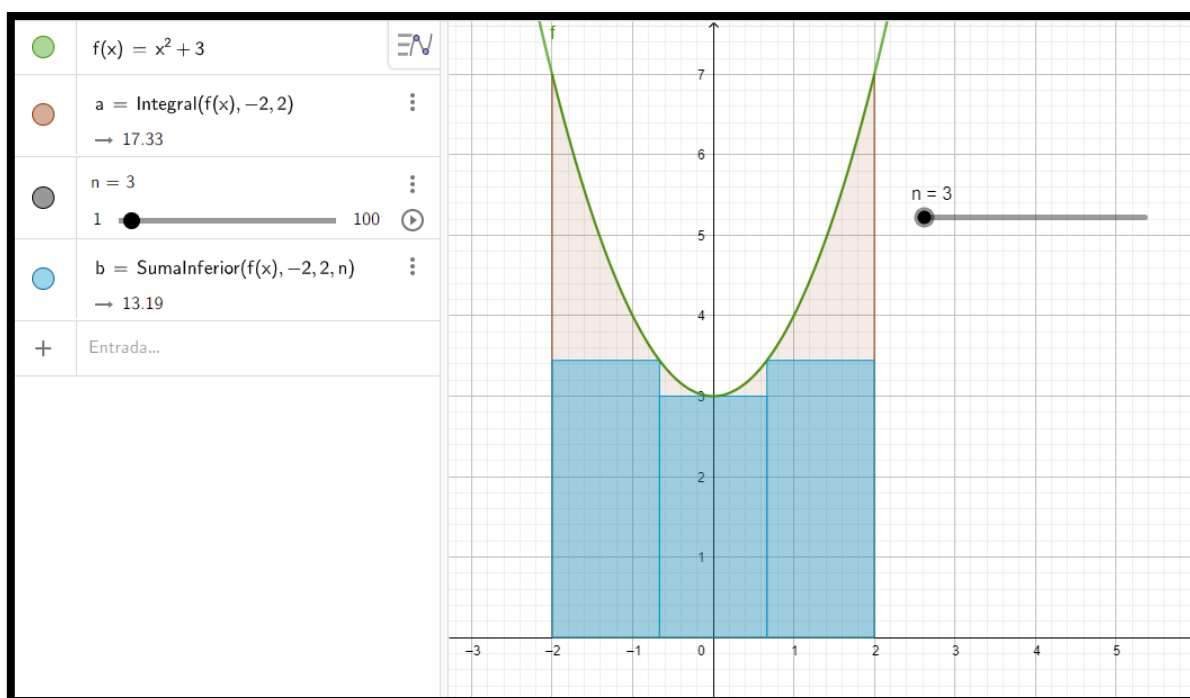


Figura 9

Primero veamos la vista algebraica en la figura 9. En ella, podemos observar las diferentes entradas realizadas. La primera corresponde al gráfico de la parábola $f(x) = x^2 + 3$. En la segunda entrada tenemos el cálculo de la integral entre los valores $x = -2$ y $x = 2$, la cual da un resultado de 17,33 (cálculo realizado en el ejercicio 1). En la tercera entrada se ha creado el deslizador n . Y en la cuarta entrada se ha insertado el comando “Suma Inferior”, donde debajo nos indica la suma de las áreas de cada rectángulo construido.

En esta imagen, el deslizador n tiene un valor de 3. Esto quiere decir que se han creado 3 rectángulos debajo la curva. Y según el comando “Suma Inferior”, la suma de las tres áreas nos da un valor de 13,19.

Si movemos el deslizador, de tal manera que n sea igual a 20, estaremos construyendo 20 rectángulos, y la suma de sus áreas será de 16,56 (Figura 10):

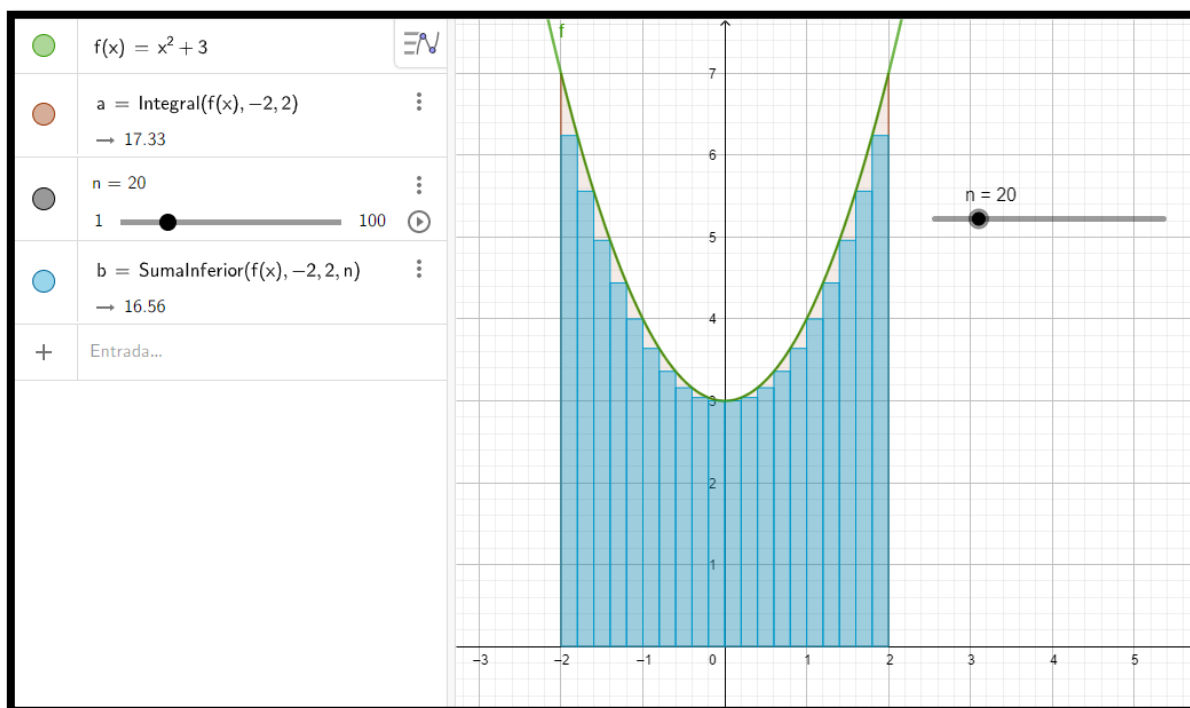


Figura 10

Si volvemos a aumentar el valor del deslizador, de tal manera que n sea igual a 75, se construirá 75 rectángulos debajo de la parábola, y la suma de sus áreas será de 17,12 (Figura 11):

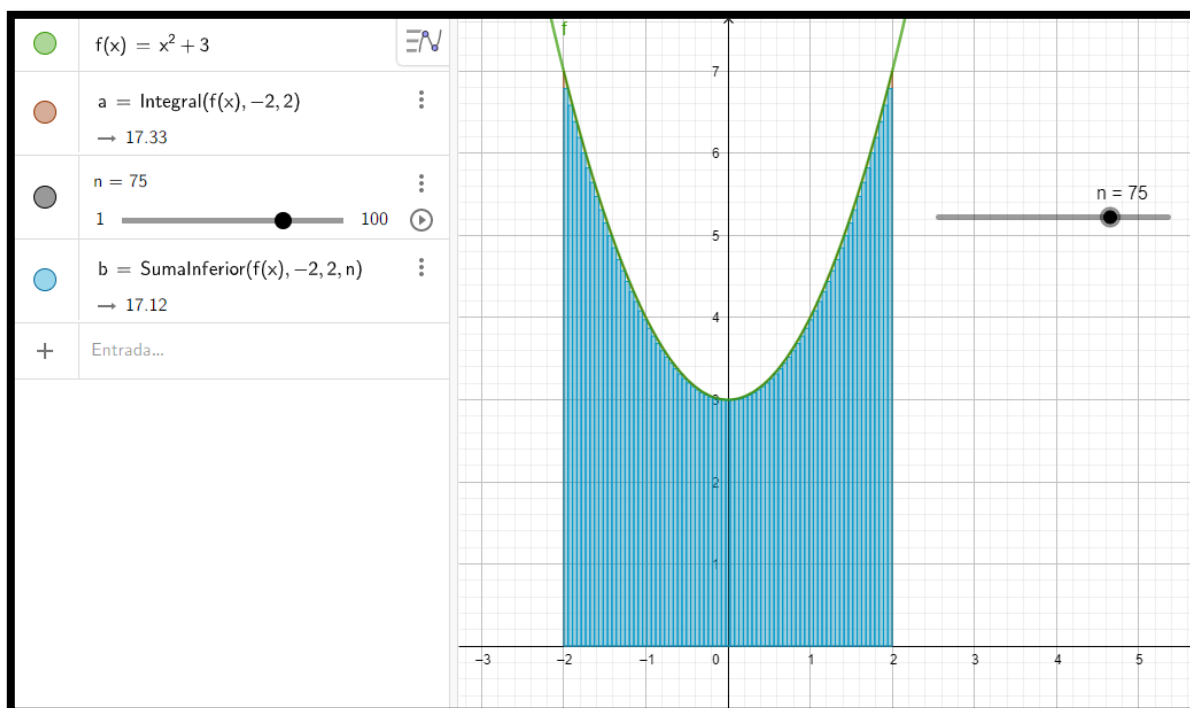


Figura 11

Y, si, por último, aumentamos el deslizador, de tal manera que n sea igual a 100, construiríamos 100 rectángulos debajo de la parábola, y su área sería de 17,17 (Figura 12):

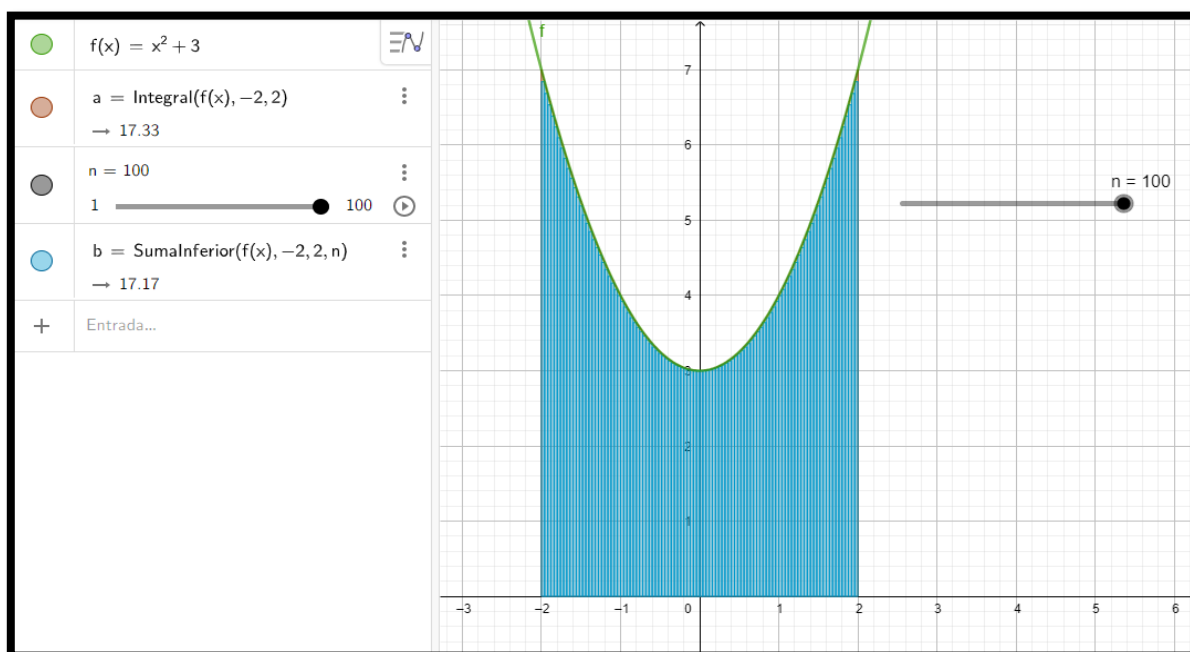


Figura 12

En este caso, el deslizador que hemos creado alcanza un máximo de 100 rectángulos, pero es posible construir una cantidad mayor. Se puede observar que a medida que vamos aumentando la cantidad de rectángulos bajo la curva, irá aumentando el valor de la suma de sus áreas, y además se irá acercando cada vez más al valor de $17, \hat{3}$ (el valor de la integral calculada analíticamente en el ejercicio 1) pero nunca lo va a superar.

3) El procedimiento realizado se denomina “Suma de Riemann”, que consiste en una aproximación del valor de una integral mediante una sumatoria. En este caso por defecto

Para realizar la sumatoria debemos dividir la región de la integral construyendo figuras geométricas sobre ella. En este caso, elegimos construir rectángulos. Juntas formarán una región que se aproximará a la región de la integral que se pretende calcular.

Decimos que se trata de una aproximación, ya que la región rellena por las figuras construidas no será, en general, igual a la región de la integral, sino que le faltará relleno para ser idéntica a dicha área. Debido a esto, se puede reducir el error al dividir la región en cada vez más figuras. Cuando mayor sea la cantidad de figuras en que se haya dividido la región, más próximo al valor de la integral nos vamos a encontrar.

Luego de resolver la actividad anterior, podemos observar que si quisiéramos realizar la suma de Riemann de manera analítica puede resultar una tarea muy extensa. Esto es porque calcular cada una de las integrales, dependiendo del número de rectángulos construidos, es una tarea muy repetitiva y que nos consume mucho tiempo. Es por este motivo que un software tecnológico, en este caso Geogebra, puede resultarnos de mucha ayuda. Esta aplicación nos permitirá calcular las distintas integrales, mientras visualizamos como se va formando el área bajo la curva a medida que construimos los rectángulos. De esta manera, logramos llegar al resultado aproximado de la integral, teniendo la representación gráfica como herramienta de soporte y verificación de que el resultado obtenido es correcto.

Conclusiones

Luego de realizar este recorrido, tanto al analizar las investigaciones como por los aportes tomados de los autores, podemos concluir en que resulta de suma importancia el alentar a los alumnos a recurrir a la combinación de los distintos registros, el analítico y el visual, para lograr una mayor comprensión de los conceptos matemáticos.

Siguiendo las ideas de Arcavi consideramos que es de vital importancia que los estudiantes deben superar el cálculo mecánico para lograr una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, y en ese sentido es conveniente la utilización de diferentes representaciones. Esto significa, la incorporación de imágenes, diagramas, gráficos, entre otros, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Pero en estos procesos concretos, surgen diferentes miradas y algunas contradicciones. Por un lado, un alto porcentaje de los alumnos considera que el razonamiento visual es indispensable para la resolución de problemas. Por otro lado, diversos estudios plantean que a los docentes les resulta dificultoso trabajar en sus clases utilizando registros visuales. Esto se explica, en parte, a que los alumnos poseen un manejo limitado de este tipo de registro.

Una aproximación a pensar estas barreras, es delinear la idea de que tanto a los docentes como a los alumnos les genera desde rechazo hasta un genuino interés, pasando por distintos matices, la implementación de estos recursos. En el extremo del rechazo a los docentes les supone una reelaboración sobre la forma en que planifican sus clases y las gestionan. En el caso de los alumnos, se manifiesta en correlación con las concepciones del docente y con su propia trayectoria escolar en el que el registro visual no ha sido desplegado en las clases y por ello no tienen cierto entrenamiento para su observación y análisis.

A pesar de las dificultades señaladas, esta situación podría mejorarse con la implementación de herramientas tecnológicas, que facilitan el uso de los recursos visuales, en especial la utilización de entornos y softwares que habilitan naturalmente la visualización. Un ejemplo de esto se observa, en los estudios analizados en este trabajo, en los que se Geogebra, para visualizar el área bajo la curva para el cálculo de la integral definida o para la construcción de la campana. Estas herramientas pueden ser muy útiles para la comprensión de los distintos conceptos y la resolución de actividades. Además, su uso aporta a la justificación de la resolución analítica.

Asimismo, los docentes en el extremo opuesto al rechazo incluyen la tecnología en sus clases y afirman que su implementación produce no solo una mejora en el razonamiento, sino que también logra que los estudiantes generen experiencias positivas en y hacia la materia.

Para finalizar el presente trabajo, consideramos que resulta muy importante que los docentes se capaciten de manera constante en la aplicación de las nuevas tecnologías, en un proceso en que la clave es el desarrollo matemático con los recursos más potentes. En ese sentido, se tiende a planificar, diseñar material didáctico y gestionar las clases de modo que el alumno logre razonamientos intuitivos y deductivos dentro de un rico trabajo matemático. El aprendizaje así pensado tiende a ser significativo y produce las experiencias positivas que mencionamos en párrafos

anteriores. Para alentar a los docentes en este camino, la autora que analizamos se propuso a través de su artículo brindar recursos y principios que los motive en ese proceso, esperamos haber sido fieles a su idea tanto en la interpretación como en la búsqueda de ampliación y profundización de conceptos.

Bibliografía

- Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*, *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-24.
- Artigue, M., C. Batanero y P. Kent (2007), "Mathematics thinking and learning at post-secondary level", En F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Greenwich, Connecticut, Information Age Publishing, pp. 1011-1049.
- Corrales Rodrigáñez, C. y Gómez-Chacón, I.M. (2011). *Ideas y Visualizaciones Matemáticas*. Publicaciones. Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Matemáticas, UCM.
- Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking*. In P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematical and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge: Cambridge University Press.
- Dreyfus, T. (2002). *Advanced mathematical thinking processes*. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Springer Netherlands.
- Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*. Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10, 5-53. Francia: IR
- Duval, R., *Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*, en *Proceedings of PME*, 1999.
- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmernann, W. y Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes n. 19, 25-37. Washington, D.C
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel
- Gómez-Chacón, I. M^a (2012). *Visualización matemática: intuición y razonamiento*. En Castrillón, M; Garrido M. I.; Jaramillo, J.A.; Martínez, A.; Rojo, J., *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés* (pp. 201-219.) Universidad Complutense de Madrid. Madrid.
- Gómez-Chacón, I. (2014). *Intuición Visual y Razonamiento en Matemáticas*. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), *Congreso: Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*". (pp. 57-70). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.
- Gómez-Chacón, I. M^a y Kuzniak, A. (2013). Geometric Work Spaces: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment, *International Journal of Science and Mathematics Education*.
- González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de Matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las ciencias*, 23 (1), 81-96.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999), Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics*, **40/3**, 283–312.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Mundy, J. (1987). Analysis of Errors of First Year Calculus Students, En Theory, Research and Practice in Mathematics Education, Bell, A., Low, B. y Kilpatrick, J. (Eds.), *Proceedings ICME 5*, 170-172 .

Peña, G., Cruz, M., Sanchez Rodriguez, C, (2019). Contraste entre el dominio del conocimiento matemático escolar y el pensamiento matemático avanzado en un grupo de alumnos con aptitudes sobresalientes.

Presmeg, N., *Research on visualization in learning and teaching mathematics*, en Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future, A. Gutierrez, P. Boero (eds), 2006.

Tall, D. (1992). Student's Difficulties in Calculus. Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Quebec, August 1992. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.

Tall, D. (1992). *The transition to advanced mathematical thinking functions, limits, infinity, and proof*. En Grouws, D. (ED.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 495-511. Reston, Va: National Council Of Teachers of Mathematics, Inc.

Tall, D. (2002). Advanced Mathematical Thinking (7aed.). Enlinea: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D., Vinner, S., *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12 (1981), 151-169.

Zimmerman, W., Cunningham, S., *What is Mathematical Visualisation? en visualisation in Teaching and Learning Mathematics*, en W.Zimmerman, S. Cunningham, (eds), 1991, pp. 1-9.

Anexo complementario

Resolución de los ejercicios

Consigna 1

Disponemos de un triángulo equilátero inscrito en un círculo y de otro circunscrito al mismo círculo, como se muestra en la figura (ver Figura 13). Hallar la proporción entre las áreas de los triángulos.

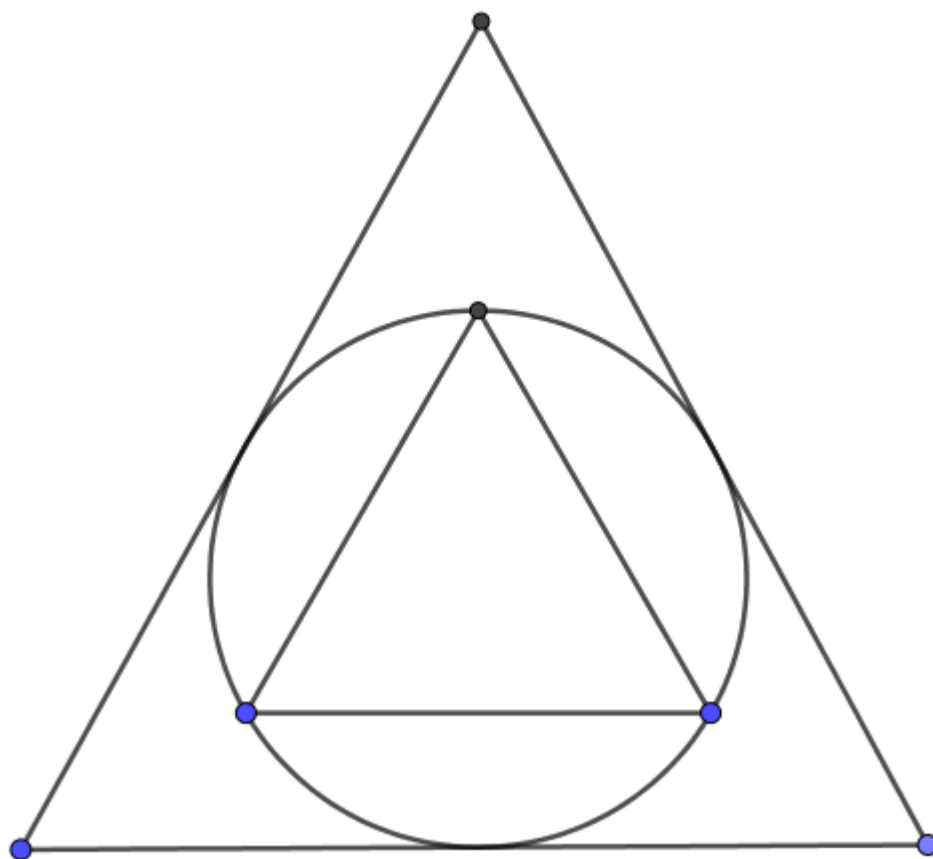


Figura 13

Solución

El gráfico a simple vista no nos permite hallar la proporción entre las áreas de los triángulos, a menos no cómo está planteado de esta forma inicial.

La idea de esta consigna es encontrar un medio para visualizar de modo más sencillo la solución, de manera que nos permita ver si existe alguna proporción entre los triángulos.

Cómo se trata de un triángulo equilátero, habrá un único triángulo posible. Sin embargo, como el triángulo está circunscrito, el triángulo puede ser rotado obteniendo infinitos triángulos congruentes al dado. Luego, para lograr una visualización óptima de la proporción que hay entre los triángulos, se podría rotar el triángulo 180° , resulta lo siguiente (figura 14):

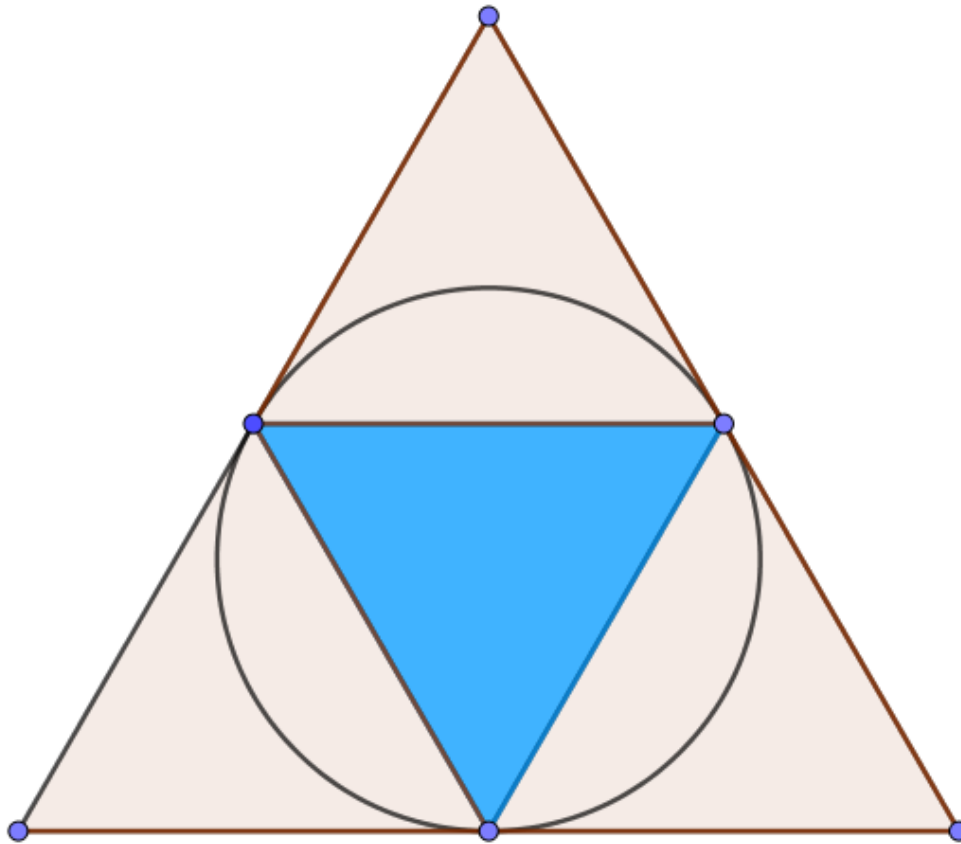


Figura 14

De esta manera se ve claramente que el área del triángulo pequeño es la cuarta parte del triángulo más grande.

Consigna 2

¿Qué está mal en el siguiente cálculo de la integral?

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_{-1}^1 = \frac{-1}{x} \Big|_{-1}^1 = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = 2$$

Solución

El error más común que suelen tener la mayoría de los alumnos es comenzar a resolver analíticamente la integral, sin tener en cuenta las características que definen a esta función $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Calcular una integral sirve para sacar el área bajo de la curva. Este análisis conduce a la siguiente pregunta ¿Se puede calcular el área entre -1 y 1?

Para responder esta pregunta resulta conveniente realizar el gráfico de la función.

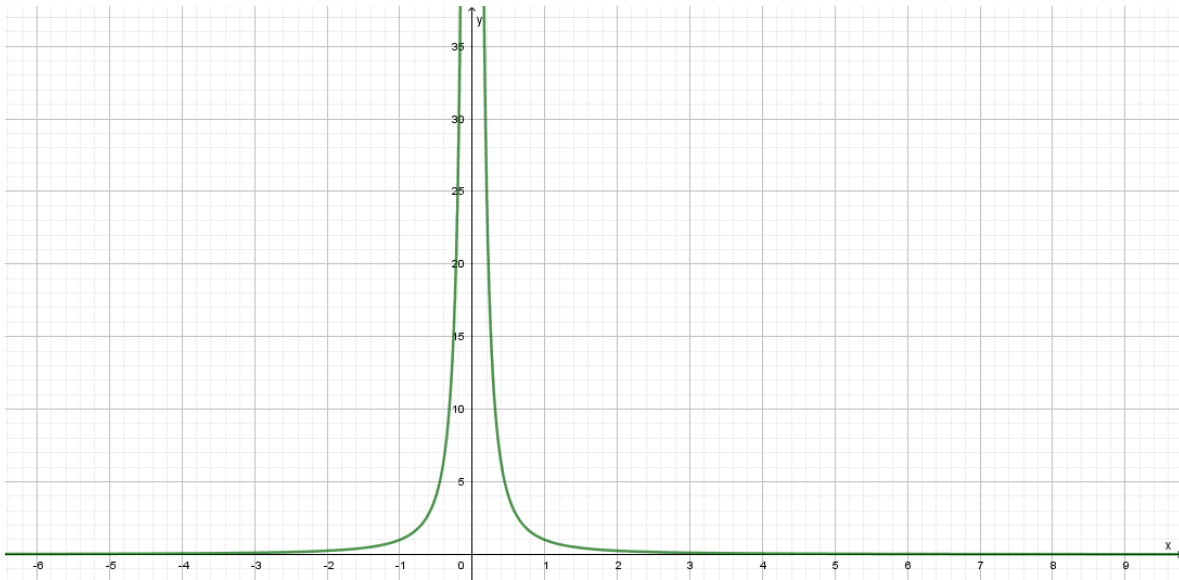


Figura 15

Para realizar el estudio de una función, es necesario determinar su dominio. En este caso, habrá que determinar si existe una restricción sobre el conjunto de los números reales para que efectivamente sea una función.

Como la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ está expresada en forma de fracción, el denominador debe ser distinto de 0, ya que no es posible dividir un número por 0. Por eso se hace el siguiente planteo:

$$x^2 \neq 0$$

Como $x^2 \neq 0$, para definir la función es necesario saber que valores efectivamente anulan el denominador, luego la pregunta es ¿existen números reales tal que $x^2 = 0$?

La resolución de la ecuación es:

$$|x| = \sqrt{0}$$

Luego

$$x = 0 \text{ ó } -x = 0$$

Finalmente

$x = 0$ Anula en denominador

Obtuvimos el dominio de la función $Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Si analizamos la función en su registro gráfico (ver Figura 15) se puede notar que tanto cuando los valores de x se acercan a 0 por derecha y por izquierda, la imagen de la función se observa como una curva creciente. tanto por derecha como por izquierda.

Se debe recordar que para que exista el límite de una función en un punto, los valores de los límites laterales deben coincidir y ése será el valor del límite en ese punto. Por lo tanto, según el gráfico de la función (ver Figura 15), resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Sin embargo, hablar de límite de una función en un punto hace referencia a analizar el comportamiento de una función en un entorno del punto, y no lo que pasa en ese punto en particular. Por ejemplo, en el ejercicio que se está resolviendo se puede ver que cuándo los valores del entorno son más próximos a 0, sus imágenes serán cada vez mayores. Pero ¿Qué pasa en $x = 0$? Anteriormente se mencionó que 0 no pertenece al dominio de la función, o sea que $f(0)$ no está definido. Por eso se distinguen las diferencias entre calcular el límite cuando x tiende a 0 y calcular $f(0)$. Por este motivo, se hará el cálculo considerando que se trata de una función por partes,

Se establecen dos intervalos: el primero -1 al 0, y el segundo 0 al 1.

En el registro gráfico resulta lo siguiente (figura 16):

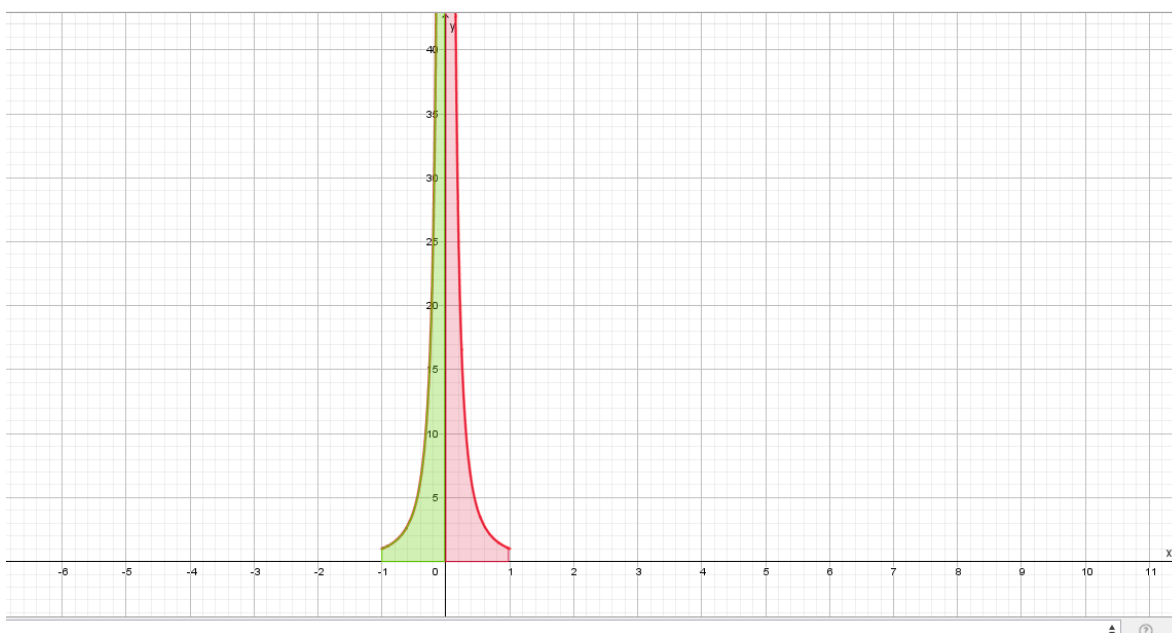


Figura 16

Para calcular la integral analíticamente, es necesario utilizar la siguiente propiedad:

Propiedad 1:

Si el integrando f es discontinuo en $x = c$ sobre el intervalo $[a, b]$ entonces la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ es definida como:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx$$

Como 0 no pertenece al dominio, hay que tener cuidado de no incluirlo en el cálculo. Para esto se calcula la integral utilizando el límite para el valor 0.

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-1}^b \frac{1}{x^2} dx + \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx &= \\ \lim_{b \rightarrow 0^-} \left. -\frac{1}{x} \right|_{-1}^b + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left. -\frac{1}{x} \right|_a^1 &= \\ \lim_{b \rightarrow 0^-} \left[1 - \left(-\frac{1}{b} \right) \right] + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-1 - \left(-\frac{1}{a} \right) \right] &= 1 - \infty - 1 + \infty = \infty \end{aligned}$$

Cómo el resultado da infinito, entonces **diverge**.

Consigna 3

Calcula $\int_{-3}^3 |x + 2| dx$

Solución

Resulta conveniente realizar el gráfico de la función $f(x) = |x + 2|$ antes de intentar resolver de manera analítica, para **visualizar** lo que sucede. El gráfico de la función es el siguiente:

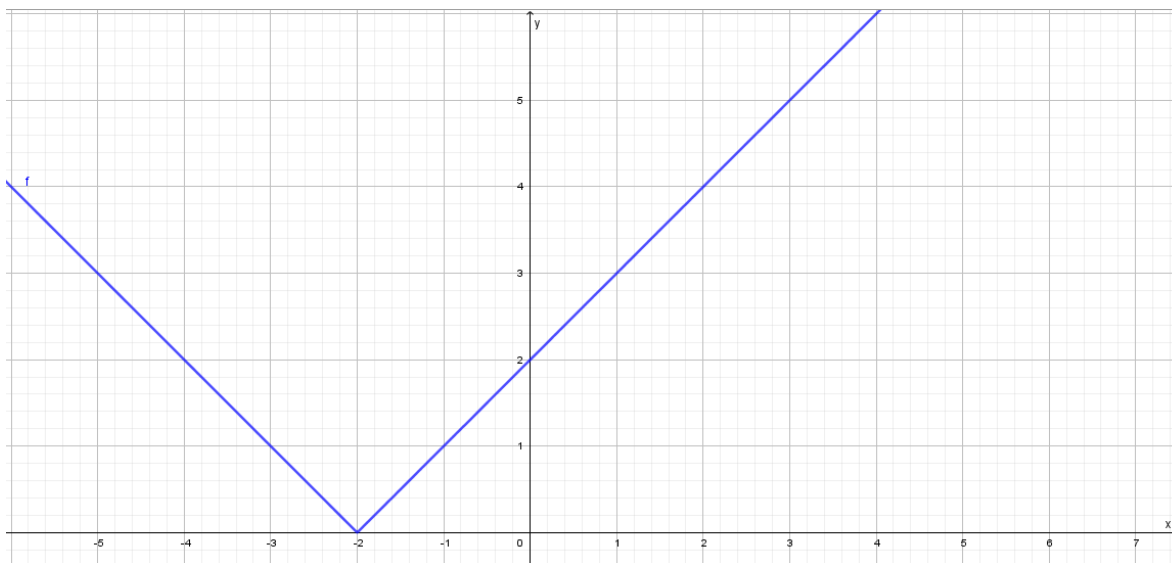


Figura 17

Observando la figura 17, se puede calcular la integral analíticamente separando en dos partes (calcular una integral desde -3 a -2, y la otra que sea desde -2 a 3). En la figura 18 se muestra cómo resultaría la separación de las integrales que se deberán sumar.

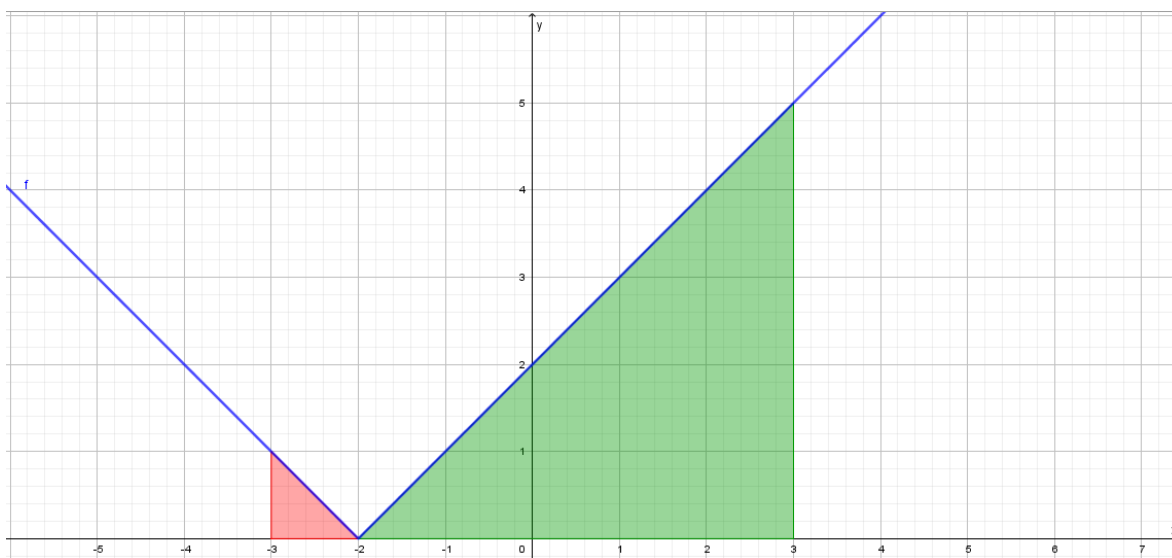


Figura 18

Sin embargo, al ser una función módulo, debemos tener en cuenta lo siguiente:

Definición 1

La definición de módulo dice que:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, al tener en cuenta la definición de módulo, el cálculo resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 |x+2| dx &= \int_{-3}^{-2} -x-2 dx + \int_{-2}^3 x+2 dx = \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^3 = \\ &= \left[-\frac{(-2)^2}{2} - 2 \cdot (-2) - \left(-\frac{(-3)^2}{2} - 2 \cdot (-3) \right) \right] + \left[\frac{3^2}{2} + 2 \cdot 3 - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) \right) \right] = \\ &= \left[-2 + 4 - \left(-\frac{9}{2} + 6 \right) \right] + \left[\frac{9}{2} + 6 - (2 - 4) \right] = \\ &= \left(2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{21}{2} + 2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{25}{2} = \frac{26}{2} = 13 \end{aligned}$$

Consigna 4

Si f es una función impar en $[-a, a]$, calcula $\int_{-a}^a (b + (f(x))) dx$

Solución

Para la resolución de este ejercicio primero resultará conveniente mencionar el concepto de función impar.

Definición 2

Una función $f: A \rightarrow B$ es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$.

Algunos ejemplos de funciones que sean impares pueden ser:

1) La función $f(x) = x^3$, ya que

$$f(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f(x)$$

Y su gráfica es

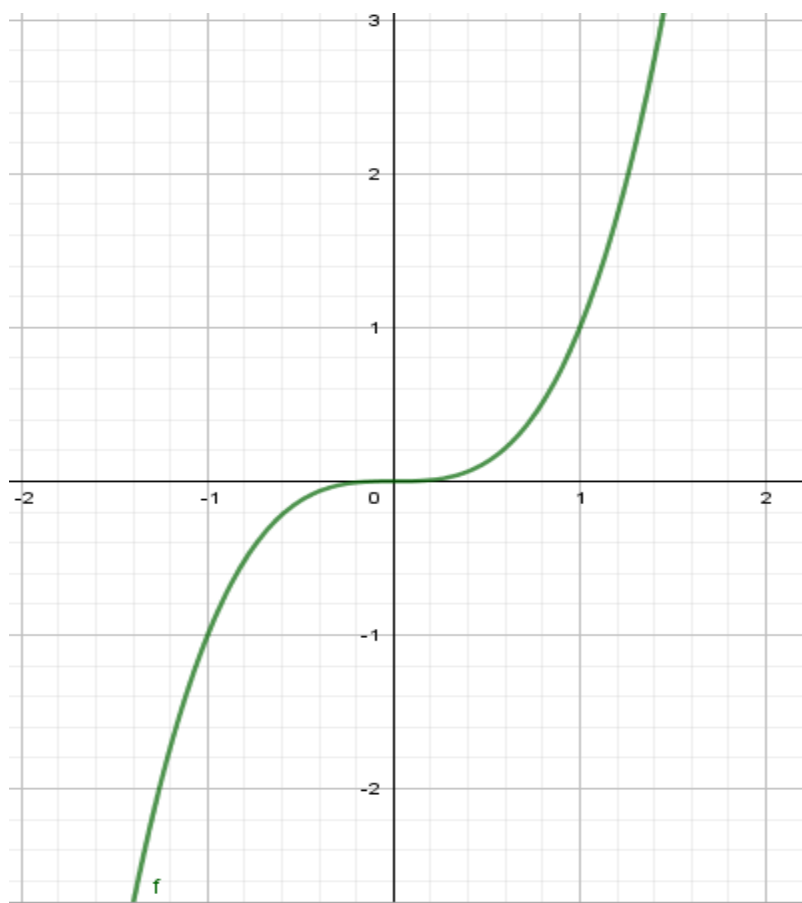


Figura 19

2) La función $f(x) = \text{sen}(x)$, ya que

$$f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x) = -f(x)$$

Y su gráfica es

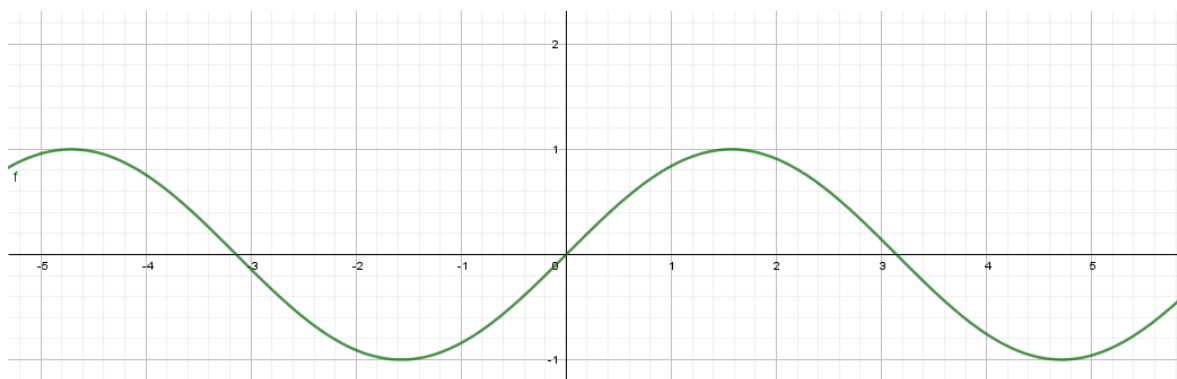


Figura 20

Nótese que la gráfica de una función impar presenta simetría rotacional (rotación de 180 grados)

En segundo lugar, es necesario mencionar es la definición de integral definida.

Definición 3

La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. Esta integral se representa por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Donde

a es el límite inferior del intervalo de integración y b es límite superior de dicho intervalo.

Si la función F es una función primitiva de f en el intervalo $[a, b]$, al aplicar la regla de Barrow se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

El enunciado nos ubica en la necesidad de analizar las características de la integral definida de una función impar en un intervalo simétrico respecto del centro de coordenadas.

Si se toma como ejemplo la función $f(x) = x^3$ (Ver figura 19), y se resalta algún intervalo simétrico (en este caso entre -1 y 1), resulta:

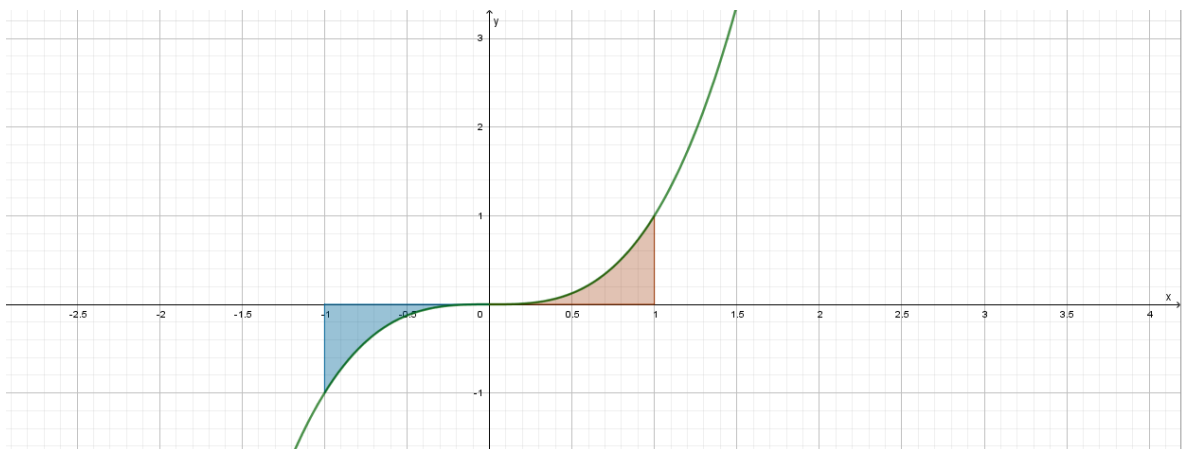


Figura 21

Se puede notar la simetría que hay en el gráfico de la función. Esto mismo se podrá ver en el gráfico de cualquier función impar en un intervalo simétrico.

Mirando el gráfico, se puede notar que la función es simétrica respecto al origen de coordenadas y define dos recintos de signos opuestos e igual área a ambos lados del origen. La suma de las áreas es nula.

Por este motivo, se puede enunciar esta observación como propiedad:

Propiedad 2

- Si la función es impar, la integral definida en un intervalo simétrico respecto al origen es nula:

$$\text{Si } f(x) \text{ es impar, } \int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$$

Volviendo al enunciado del ejercicio, se tiene la integral en un intervalo simétrico de una constante “b” sumando a una función impar. Al tener una suma dentro de una integral, se puede utilizar la siguiente propiedad:

Propiedad 3

- Para dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Por lo tanto, aplicando la propiedad 3, se las puede separar sumando dos integrales, quedando lo siguiente:

$$\int_{-a}^a (b + (f(x))) dx = \int_{-a}^a b dx + \int_{-a}^a f(x) dx =$$

Como el enunciado menciona que f es una función impar en un intervalo simétrico, entonces según la propiedad mencionada anteriormente se deduce que la integral de una función impar en un intervalo simétrico es 0. Por la propiedad 2, resulta:

$$\int_{-a}^a b dx + 0 =$$

De esta manera, queda una integral más sencilla de resolver. Cómo resulta la integral de una constante b , su primitiva será bx , entonces:

$$\int_{-a}^a b dx = [bx]_{-a}^a$$

Por regla de Barrow, resulta:

$$[bx]_{-a}^a = ab - (-ab) = ab + ab = 2ab$$

Consigna 5

Agranda la siguiente campana (ver figura 22) de tal manera que $A2H2$ mida el doble que AB

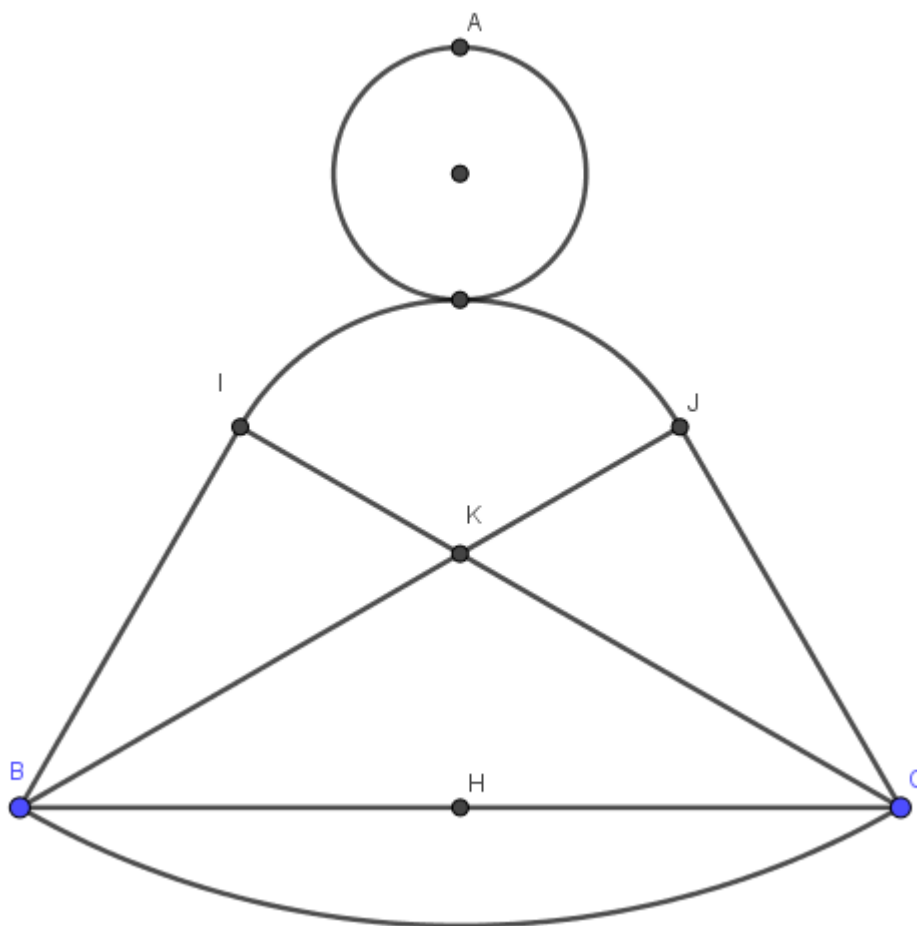


Figura 22

Escribe un protocolo de resolución del problema detallado. Algunas pistas que te pueden ayudar a dibujar la campana son:

1. Observa que A está sobre la recta BI y sobre la recta CJ.
2. H es el punto medio de BC.
3. Los ángulos IBC y JCB miden 60°
4. Los ángulos BIC y CJB son ángulos rectos.
5. BC pertenece a una circunferencia de centro A.

Solución

Para realizar la construcción de la campana que se muestra en la figura 22, se puede comenzar graficando un triángulo equilátero, de manera tal de que sus ángulos sean de 60° . Para hacer esto, ubicamos dos puntos en el plano, que llamaremos B y C, y formamos un segmento entre dichos

puntos. Luego, construimos dos circunferencias: una con centro B y un radio que mida lo mismo que el segmento BC, y otra con centro en C y radio también BC. Resulta lo siguiente (figura 23):

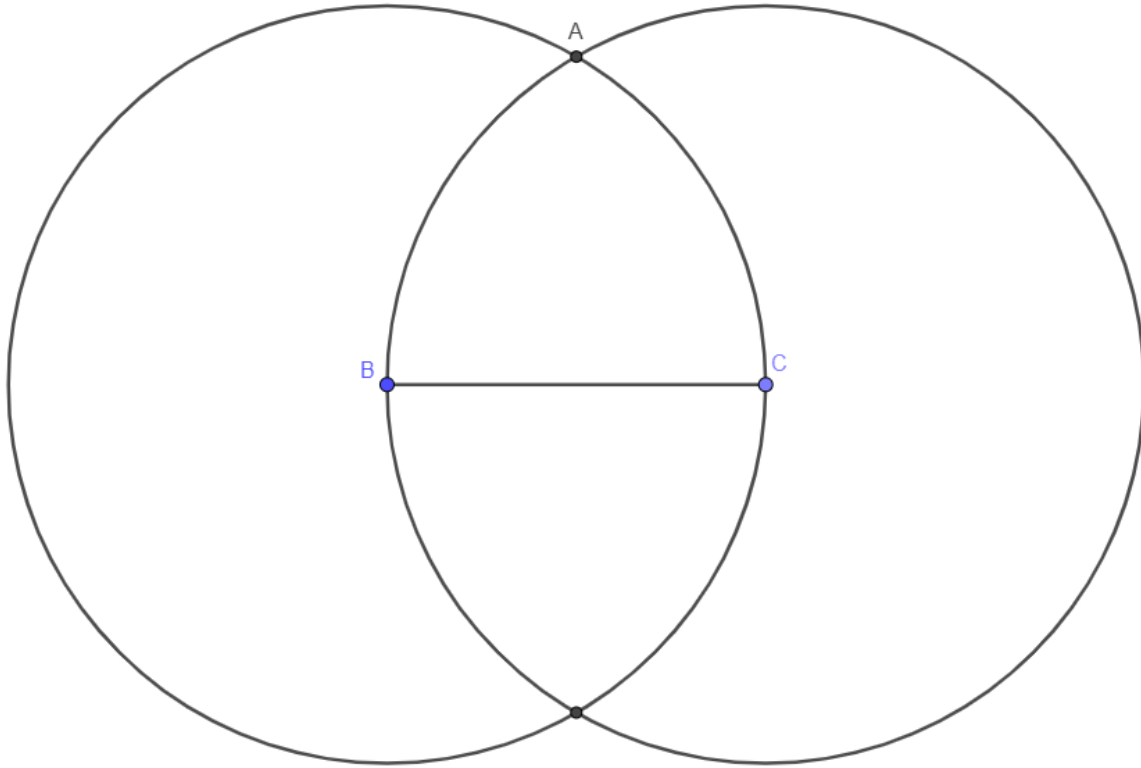


Figura 23

Observamos que las circunferencias se intersectan en dos puntos. Tomaremos solo una de esas intersecciones y la llamaremos A. Luego, podemos trazar dos rectas: una que pase por los puntos A y B, y otra que pase por A y C. De esta manera, queda construido el triángulo ABC (con un estilo punteado, ya que este triángulo no forma parte de la campana) y borramos las con circunferencias dibujadas anteriormente (ver figura 24).

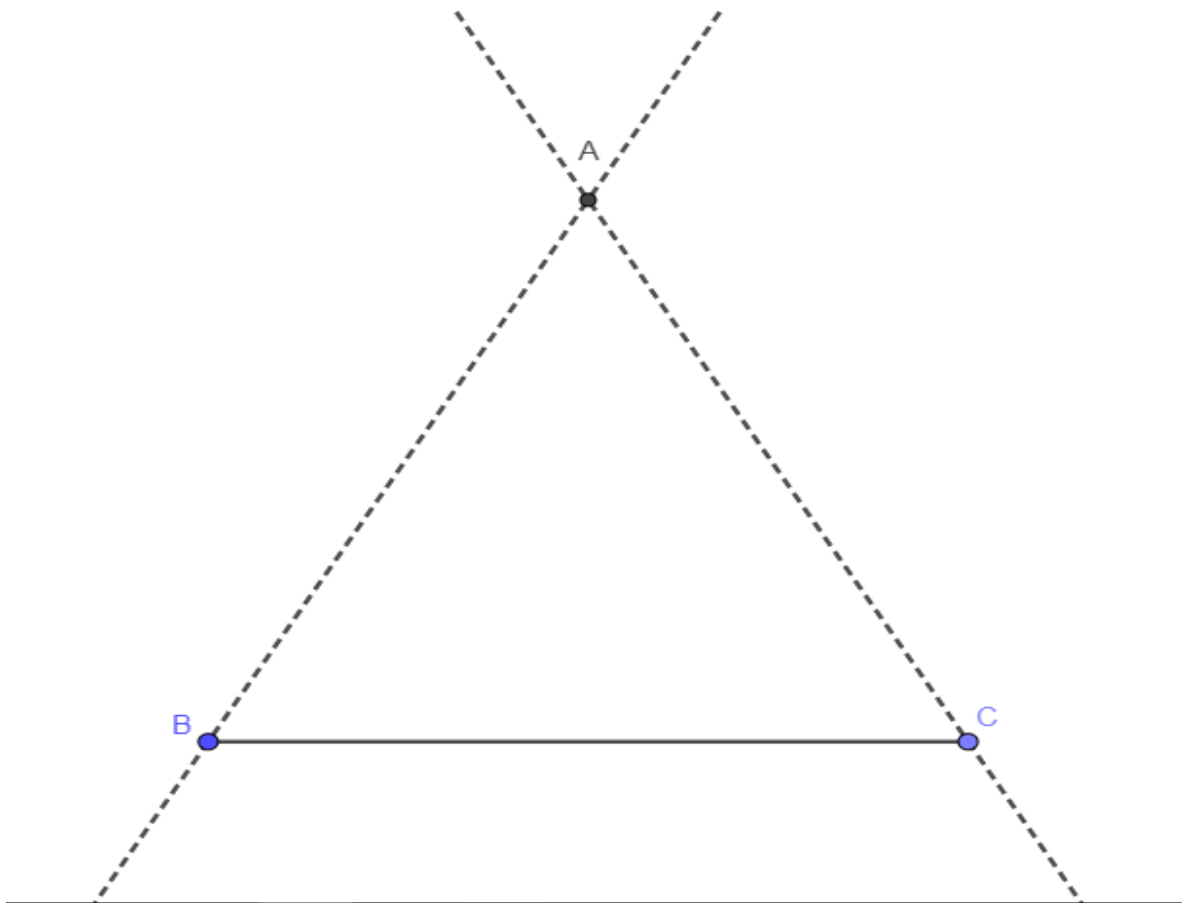


Figura 24

El punto A será el centro de un arco de circunferencia que pase por los puntos B y C. Además, el segmento BC posee un punto medio que llamaremos como H:

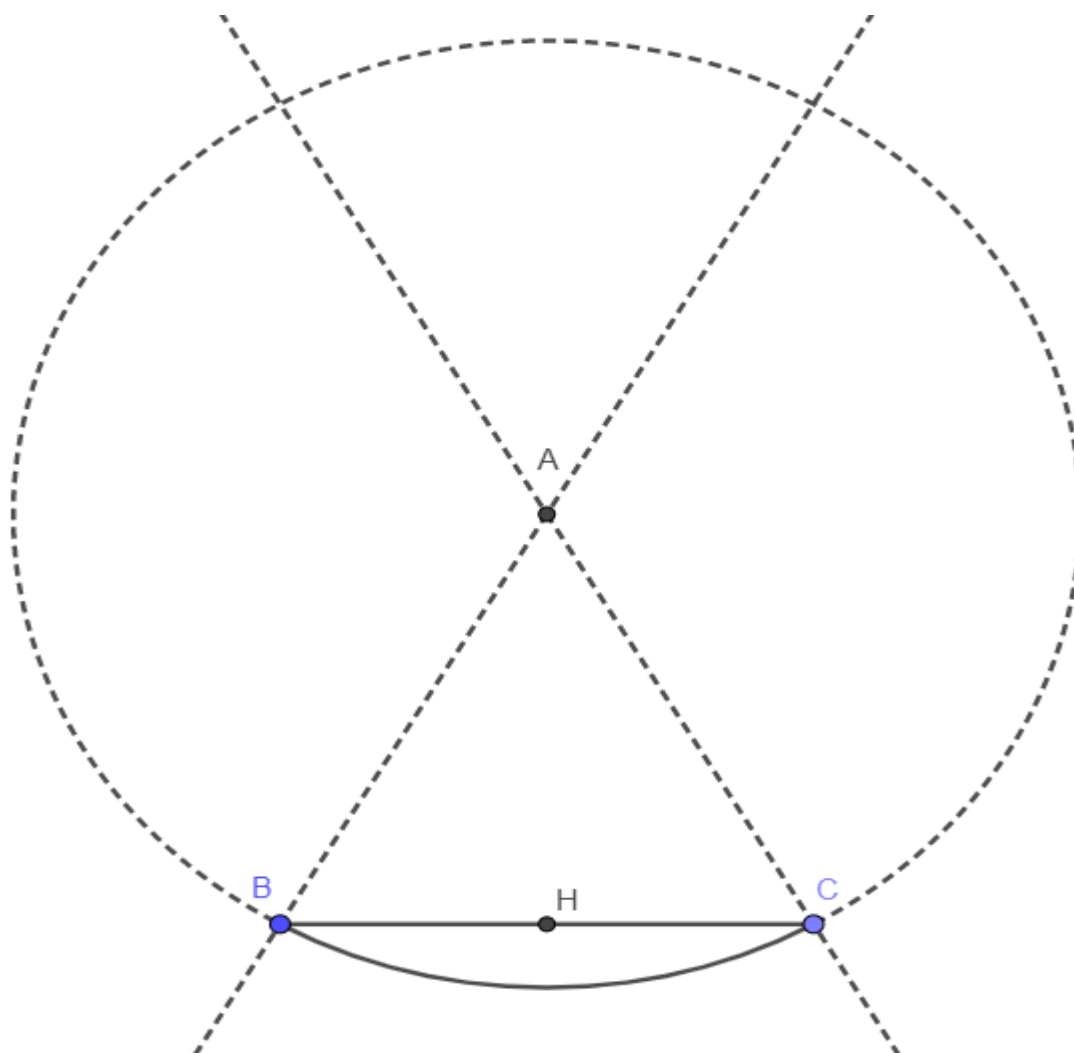


Figura 25

Para encontrar los puntos I y J, podemos trazar bisectrices en los ángulos ABC y ACB. La intersección entre dichas bisectrices lo llamaremos como el punto K. Además, los puntos I y J quedan determinados por las intersecciones entre las bisectrices y las rectas que pasa por A y B, y la recta que pasa por A y C (ver figura 26).

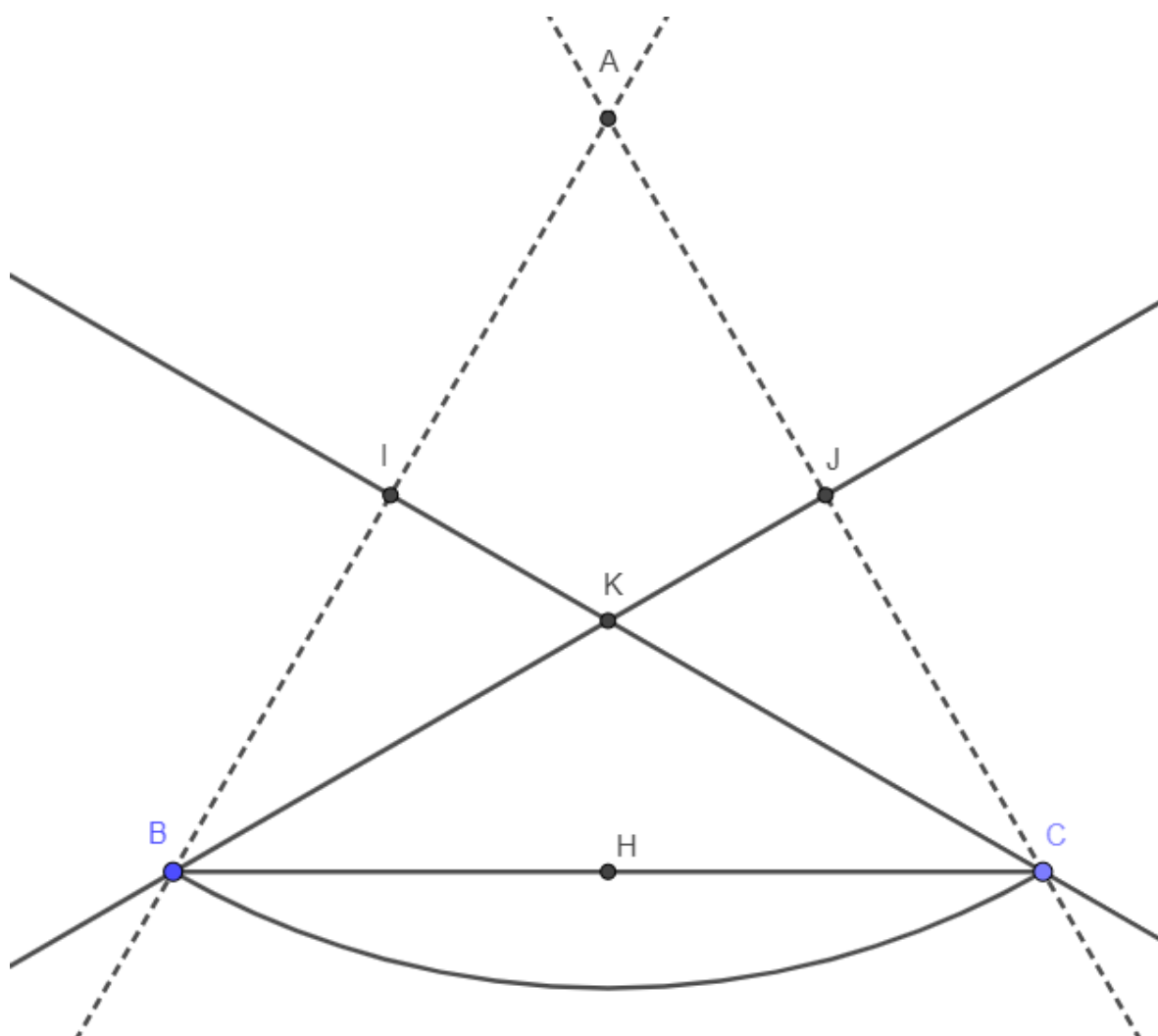


Figura 26

A partir de esto, se traza otro arco de circunferencia con centro en K, que pase por los puntos I y J. Si observamos la figura, vemos que los puntos A, B e I pertenecen a una misma recta, como también los puntos A, C y J pertenecen a otra recta. Por esto, podemos trazar los segmentos BI y CJ (ver figura 27).

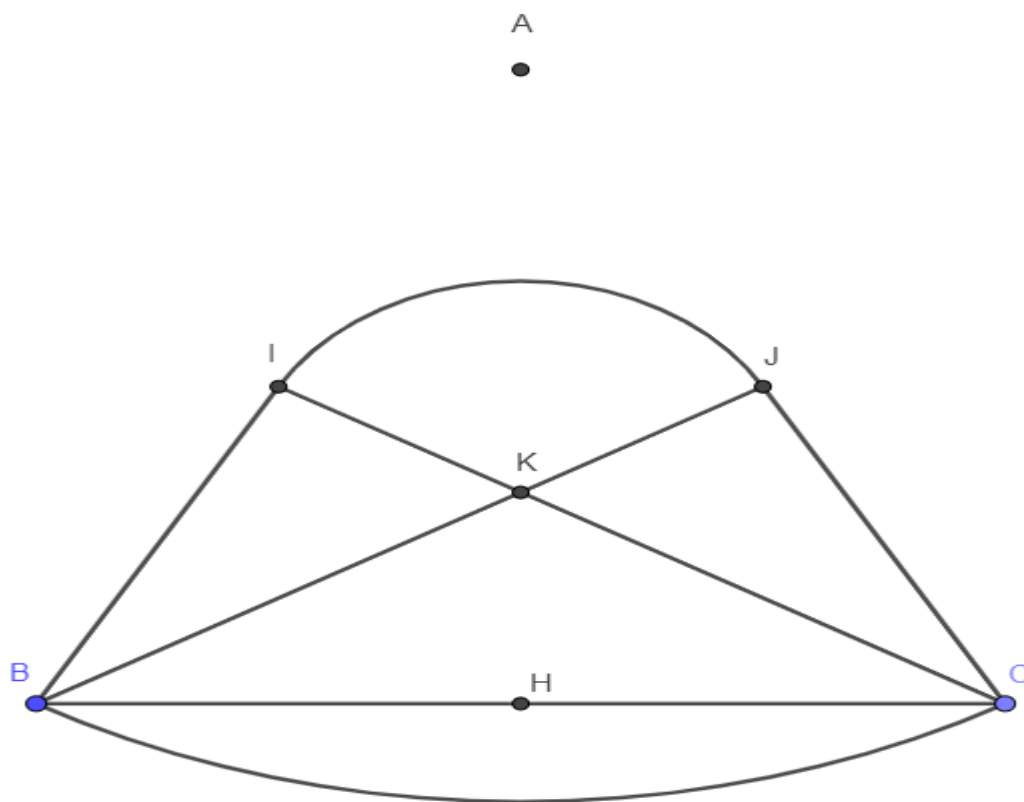


Figura 27

Observemos que los puntos A, K y H se ubican sobre una misma recta (ver figura 28). Si marcamos la intersección de dicha recta con el arco circunferencia dibujada en el último paso, obtenemos el punto E. Entonces en la cima de la campana nos queda otra circunferencia cuyo diámetro está representado por el segmento AE.

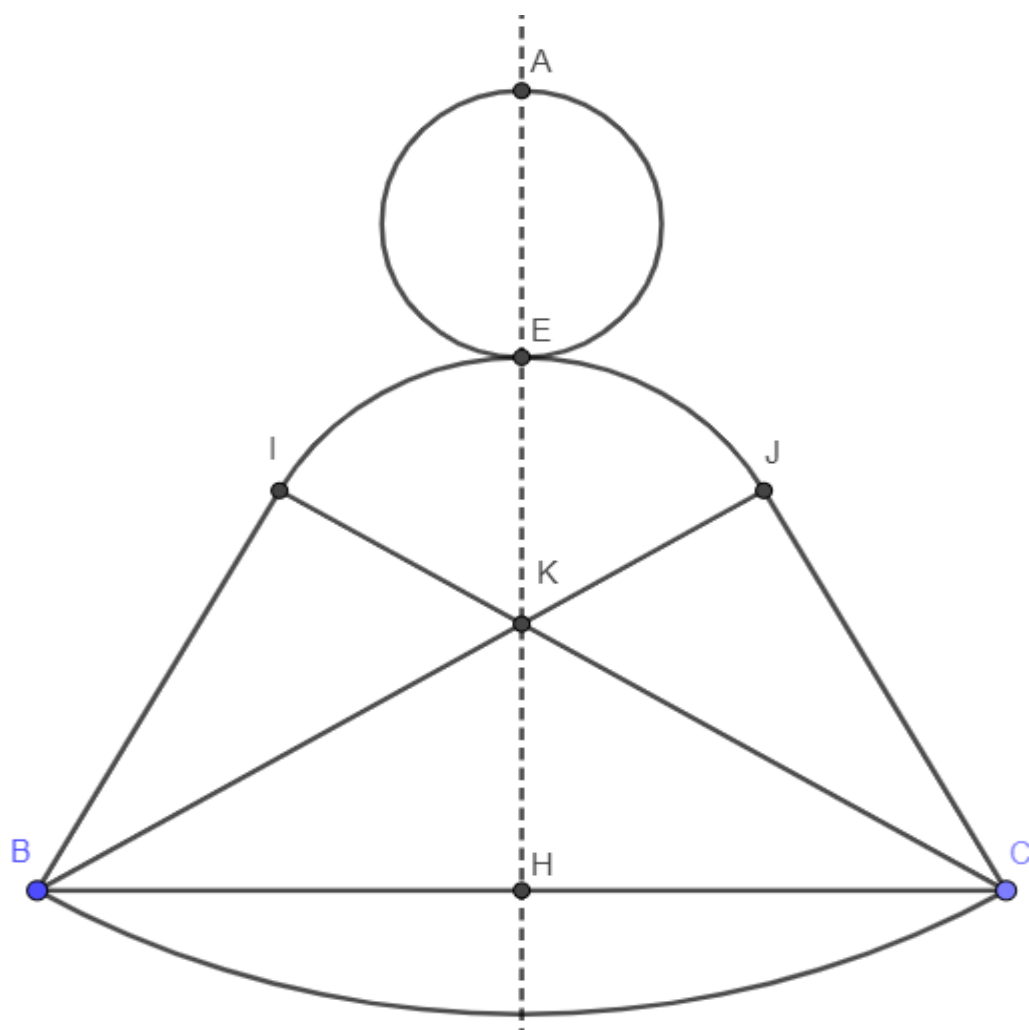


Figura 28

Al retomar el ejercicio, la propuesta es construir una nueva campana, tal que A_2H_2 mida el doble que AB . Para agrandar la campana original se pueden realizar diversos procedimientos. El método que se mostrará a continuación utiliza el teorema de Tales.

Teorema de Tales

Si dos rectas cualesquiera secantes se cortan por dos o más rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra (ver ejemplo figura 29):

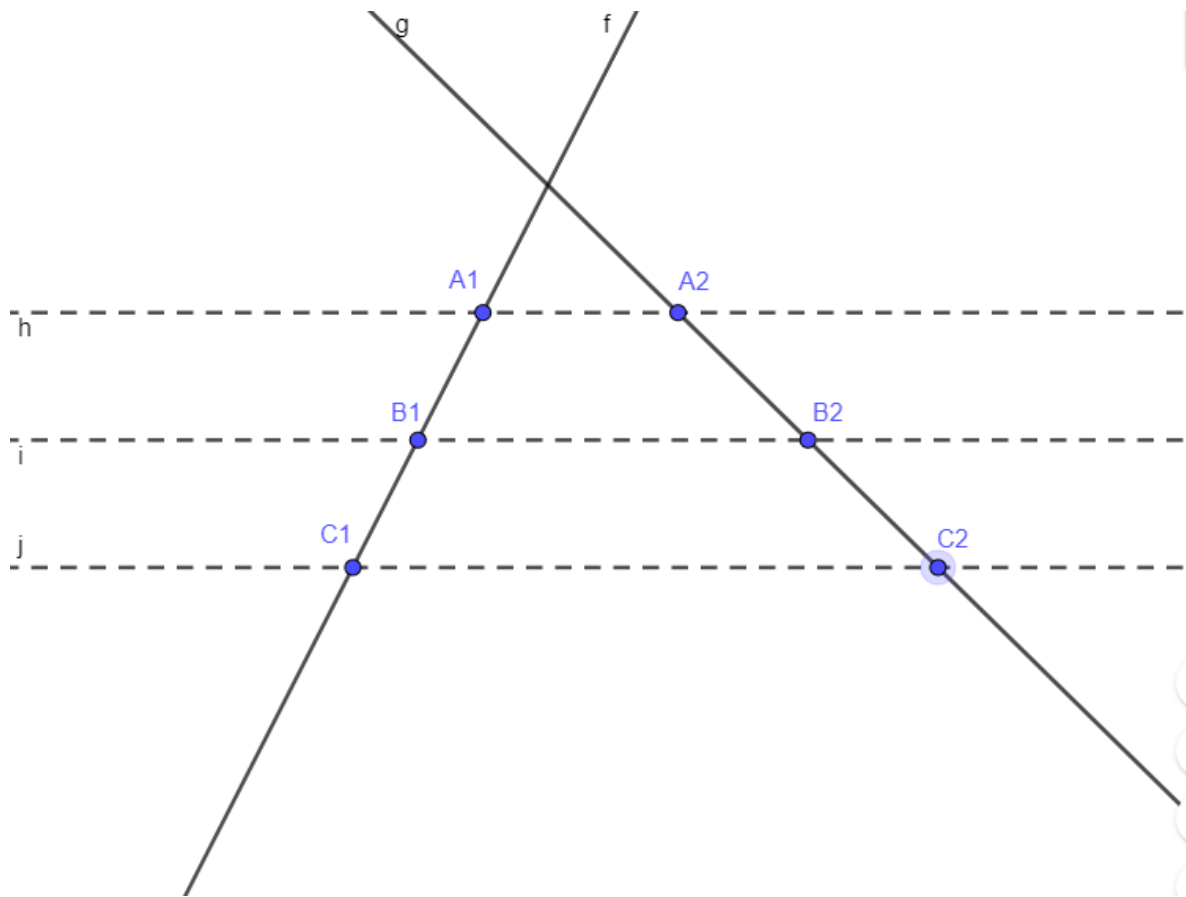


Figura 29

Donde

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$

Como el enunciado nos pide que A_2H_2 tenga el doble de longitud que AB , debemos multiplicar por 2 a AB . En este caso, vamos a construir la nueva campana sobre el punto A (o sea que A será igual que A_2). Las longitudes de los segmentos que se han utilizado para construir la campana inicial son las siguientes:

- $AB = 6 \text{ cm}$
- $AC = 6 \text{ cm}$
- $AI = 3 \text{ cm}$
- $AJ = 3 \text{ cm}$
- $AH = 5,2 \text{ cm}$

Entonces puedo saber que AH_2 (ó AH_2) tendrá una longitud de 12 unidades. Si observamos la figura 30, podemos ubicar el punto H_2 a 12 unidades de distancia con respecto al punto A (ó A_2) siguiendo la recta que pasa por los puntos A y H.

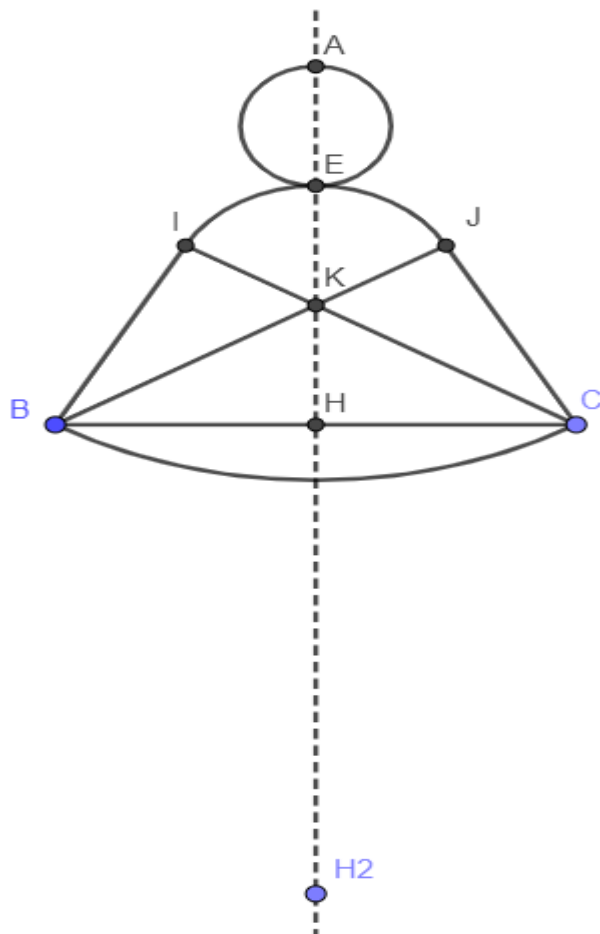


Figura 30

Para aplicar el teorema de Tales debo trazar dos rectas. Una de ellas que pase por los puntos A y B, y la otra recta que pase por los puntos A y C. Además, marco el punto H_2 que estará a una distancia de 12 cm con respecto a A (Figura 12):

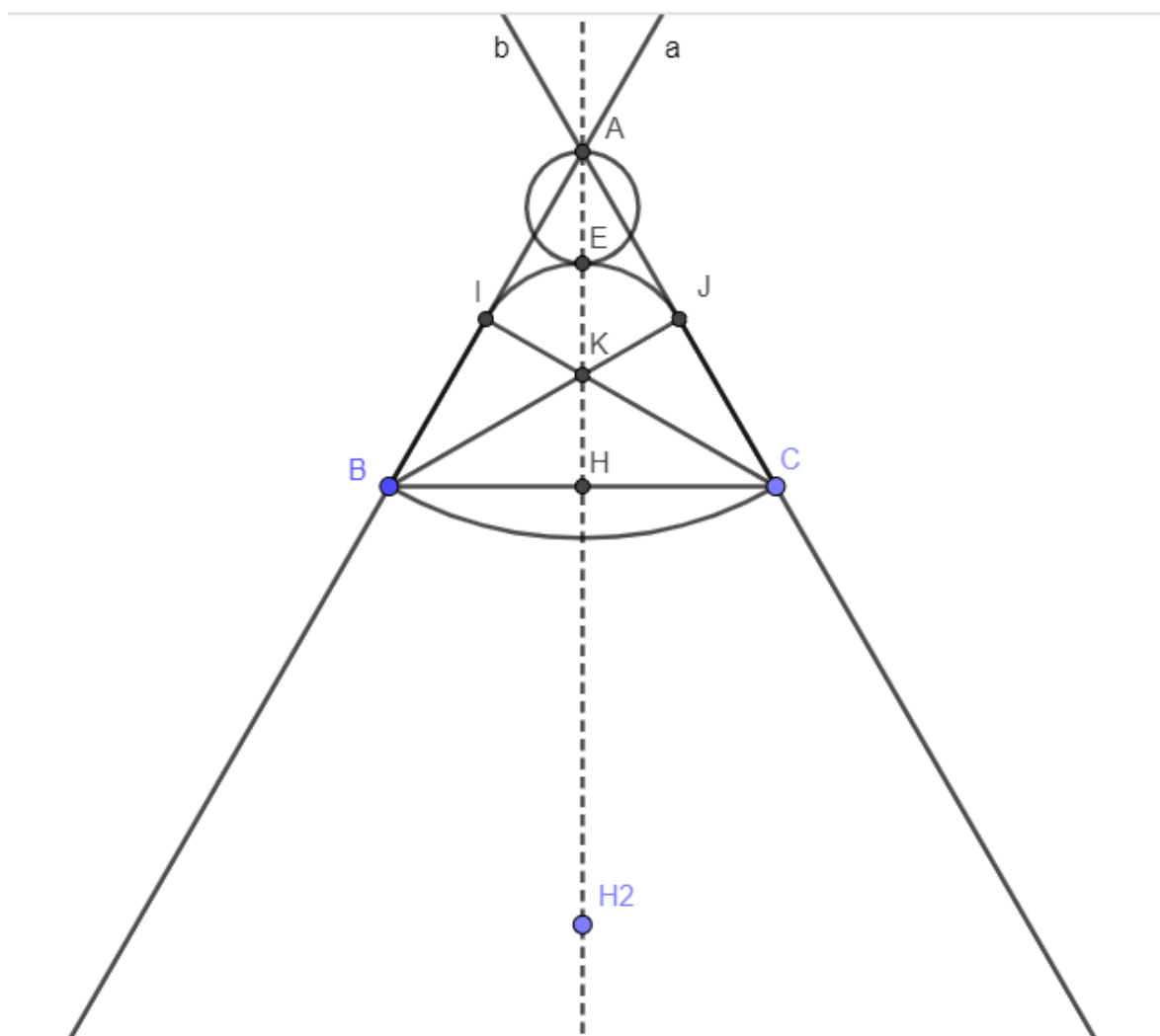


Figura 31

Observar que en la figura 31 ubicamos el punto H_2 . Una vez encontrado dicho punto, para aplicar el teorema de Tales vamos a construir un segmento paralelo a BC que pase por el punto H_2 (ver Figura 32):

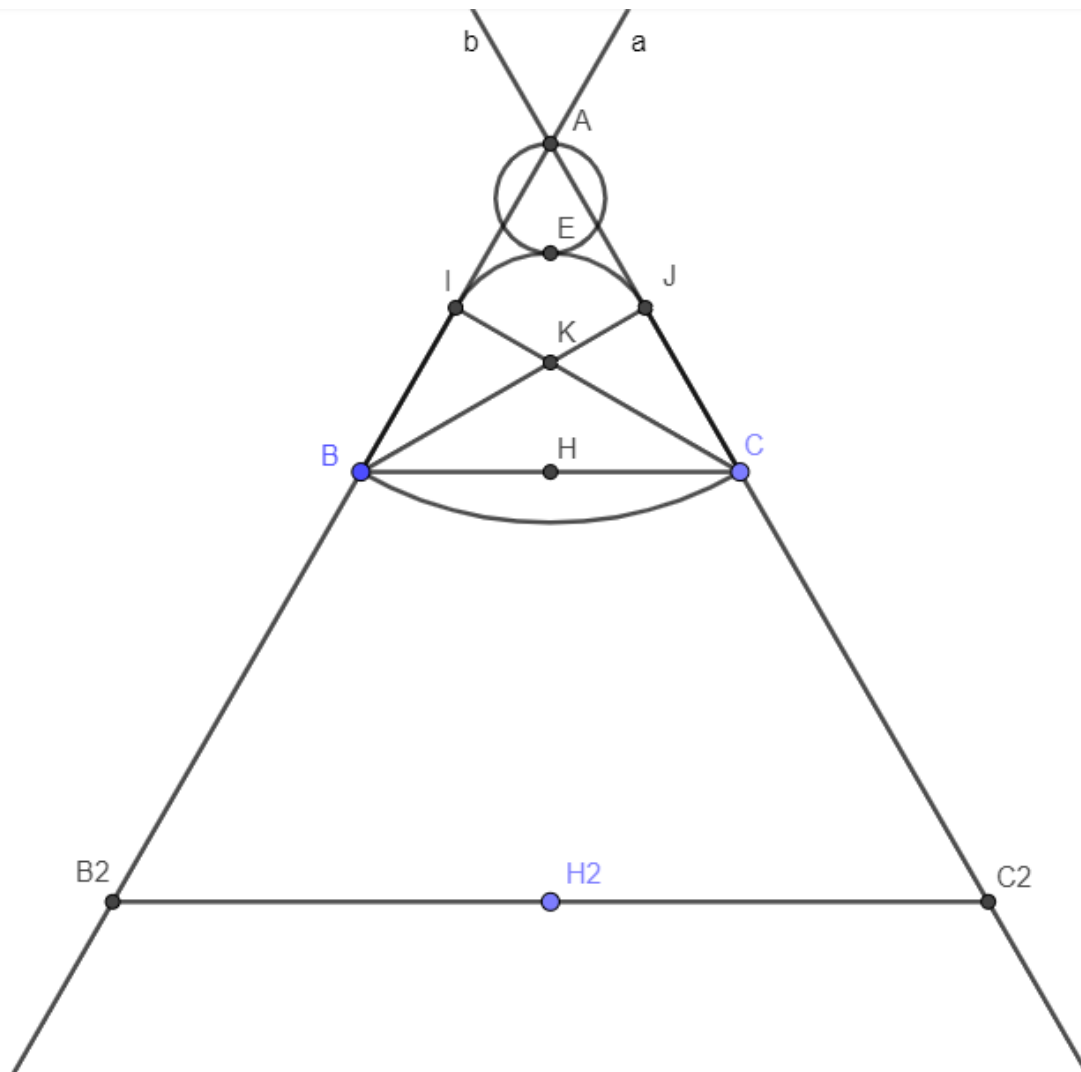


Figura 32

Con estos puntos podemos construir la nueva campana siguiendo los mismos pasos aplicados en la construcción de la campana inicial. También se puede realizar calculando cuanto miden los demás segmentos. Por lo tanto, la campana agrandada será la siguiente (ver figura 33):

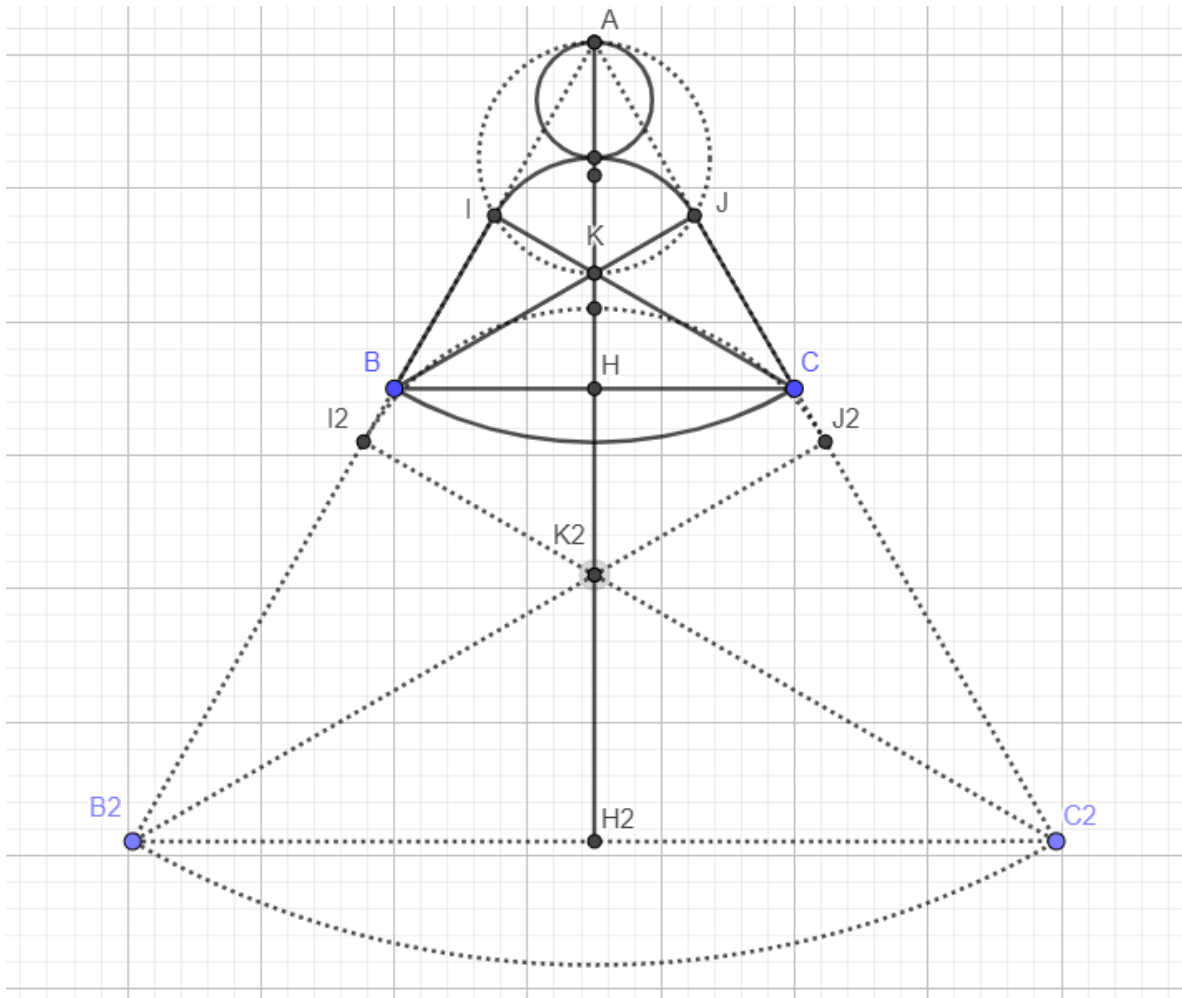


Figura 33

Para diferenciar una figura de la otra, la campana agrandada está trazada con líneas punteadas. De esta manera, se ha construido una nueva campana donde A_2H_2 mide el doble que AB .