

La Entropía de Permutación y su aplicación al Análsis Financiero

Tesis presentada para optar al título de Licenciado en Matemática

Autor: Agustin Ventimiglia

Director de Tesis: Dr. Sergio Liberczuk

Codirector de Tesis: Dr. José Naranjo Torres

Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Diciembre 2019.

Resumen

La Teoría de la Información nos brinda herramientas de gran utilidad para el análisis, la caracterización y la clasificación de procesos estocásticos y en particular, series de tiempo. Entre estas herramientas podemos destacar la medida de entropía como punto de partida inicial, ya que a partir de esta se desprenden una gran cantidad de operadores que brindan la posibilidad de capturar otras particularidades o facetas de las series a analizar. La gran mayoría de estas medidas requieres una función de probabilidad asociada con la serie a estudiar, en esta Tesis se optó por utilizar la función de Bandt y Pompe para el cálculo de la función de probabilidad. Esta función extrae información de la estructura temporal de la serie, capturando principalmente la relación ordinal entre los elementos de la serie, sin ningún tipo de procesamiento o transformación de la misma. A la entropía de esta función se la denomina como Entropía de Permutación.

Se desarrollarán y utilizarán otras herramientas derivadas de la entropía, como por ejemplo la complejidad, para obtener una exploración más exhaustiva y detallada. La gran rapidez y eficiencia en el cómputo de la función de Bandt y Pompe permite el desarrollo de algoritmos complejos que pueden procesar un amplio abanico de medidas para una serie en particular, lo que permite en análisis en tiempo real de ciertos fenómenos, como por ejemplo la evolución de un índice bursátil.

En el Capítulo 1 se desarrollarán definiciones y teoremas básicos pertenecientes al análisis y la Teoría de Probabilidad que se utilizarán posteriormente para el estudio de los operadores pertenecientes a la Teoría de la Información. El Capítulo 2 se basa en el análisis matemático de estos operadores, se introducirán las nociones de entropía, divergencia y complejidad haciendo énfasis en las propiedades, interpretaciones e interrelaciones entre los mismos. En el Capítulo 3 se introduce la metodología de Bandt y Pompe donde se desarrollará la función de probabilidad basada en los patrones ordinales de la serie de tiempo. Luego se procederá a definir la Entropía de Permutación y ciertas mejoras realizadas a lo largo del tiempo al proceso de creación de la función de probabilidad y a la misma la entropía.

En los Capítulos 4 y 5 se aplican los operadores de la Teoría de la Información para series económicas y financieras. El Capítulo 4 analiza series de residuos generadas a partir de diversos modelos de regresiones pertenecientes a modelos de empresas de consumo masivo. Se expondrán las condiciones necesarias para obtener una solución única y a las series de residuos obtenidas se le aplicarán diversos operadores. A los resultados obtenidos se los estudiarán tanto estática como dinámicamente. En el Capítulo 5 se explorará el índice S&P Merval, contrastándolo con otros indicadores como el Riesgo País y el valor del dólar. Se presentará un análisis dinámico de la serie con los operadores de complejidad y entropía, ambos con diversas ventanas temporales utilizando la metodología de Bandt y Pompe para la creación de la función de probabilidad.

Objetivos

Objetivos Generales

El finalidad de la presente Tesis es el estudio y la posterior aplicación de la metodología de la Entropía de Permutación y otros conceptos de la Teoría de la Información a series temporales del ámbito de las finanzas, así como también el desarrollo de criterios y modelos matemáticos para evaluar como estos operadores se relacionan con las series a analizar.

Objetivos Específicos

El primer capítulo tiene como fin introducir ciertas definiciones y teoremas de diversas áreas de la Matemática, que luego serán utilizados posteriormente a lo largo de los siguientes capítulos.

El Capítulo 2 tiene como objeto el desarrollo teórico de todos los conceptos de la Teoría de la Información a utilizar en los capítulos posteriores. Se pretende dar una perspectiva general de diversos conceptos de entropía, complejidad, divergencia etc.

El Capítulo 3 busca desarrollar los conceptos teóricos y prácticos de la metodología de Bandt y Pompe, también se busca poner foco en los desarrollos y mejoras posteriores que a su vez perfeccionan y amplían el concepto original.

El objetivo del Capítulo 4 es utilizar la metodología de Bandt y Pompe para la detección de regularizaciones ocultas en las regresiones, utilizando los residuos de la misma como la serie de tiempo objeto de análisis de complejidad. Se busca también utilizar los operadores de la Teoría de la Información desarrollados para la detección de períodos de turbulencia o cambios abruptos en las series a analizar.

Por último, la finalidad del Capítulo 5 es comparar las medidas de entropía y complejidad en diferentes períodos, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada Dependiente del Tiempo para en análisis de series bursátiles, con la intención de detectar y clasificar posibles instancias de crisis o turbulencias económicas.

Jurado

-
- Dr. Juan Medina
- Dr. Felipe Restrepo

Firma y aclaración del presidente del jurado:

_____

Firma del autor de la Tesis:

_____

Agradecimientos

A mi mama, mi papa y mi hermana por el apoyo incondicional durante toda la carrera.

A mi Director de Tesis, Dr. Sergio Liberczuk por haberme guiado cuando más lo necesitaba.

A mi Codirector de Tesis, el Dr. José Antonio Naranjo Torres por iniciarme en el mundo de la investigación.

A mis profesores de la Universidad UAI por formarme y reforzar mis ganas de estudiar matemáticas.

¡A todos mis amigos!

Índice General

1 Capítulo 1: Preliminares Matemáticas. 14

1.1 Análsis Convexo 14

1.2 Medida 19

1.3 Probabilidades 22

2 Capítulo 2: Entropía, Divergencia y Complejidad. 25

2.1 Entropía de Shannon 25

2.1.1 Contenido de Información 27

2.1.2 Entropía de Rényi 29

2.1.3 Entropía de Tsallis 32

2.2 Entropía Conjunta y Entropía Condicional 33

2.3 Entropías Relativas y Divergencias 36

2.3.1 Divergencias 36

2.3.2 Divergencia de Jensen-Shannon 41

2.3.3 Divergencia de Rényi 43

2.4 Información de Fisher 43

2.4.1 Medida de Información de Fisher 46

2.5 Medidas de Complejidad Estadística 47

3 Capítulo 3: Metodología de Bandt y Pompe. 49

3.1 Entropía de Permutación 49

3.2 Consideraciones prácticas de la Entropía de Permutación. 49

3.2.1 Permutación por Orden Temporal 50

3.2.2 Permutación por Comparación 51

3.3 Consideraciones en el Caso de Igualdades 53

3.4 Entropía de Permutación Ponderada 53

3.5 Entropía a Escalas Múltiples Mejorada 54

3.6 Entropía de Permutación Dependiente del Tiempo 56

4 Capítulo 4: Entropía de Permutación aplicada a Series de Residuos. 57

4.1 Indroducción 57

4.2 Modelos 58

4.2.1 Modelo 1: Regresión Simple 58

4.2.2 Modelo 2: Regresión con Regularización de Tikhonov 61

4.2.3 Modelo 3: Regresión con Regularización l1 . . . 61
4.3 Series y Metodología . . . 62
4.4 Resultados del Análisis Estático de los Residuos. . . . 64
4.4.1 Análisis de la Metodología de Bandt y Pompe . . . 64
4.4.2 Entropía . . . 67
4.4.2.1 Marca 1 . . . 67
4.4.2.2 Marca 2 . . . 69
4.4.3 Medidas de Complejidad . . . 73
4.5 Resultados del Análisis Dinámico de los Residuos . . . 78
4.6 Conclusiones del Capítulo . . . 80

5 Capítulo 5: Entropía de Permutación aplicada a Índices Bursátiles. 81
5.1 Introducción . . . 81
5.2 Metodología . . . 81
5.2.1 Series . . . 81
5.2.2 Entropía y Modelos Estadísticos . . . 83
5.3 Resultados . . . 85
5.3.1 Entropía . . . 85
5.3.1.1 Análisis de Tendencias . . . 87
5.3.1.2 Regresiones . . . 88
5.3.2 Complejidad . . . 89
5.3.2.1 Análisis de Tendencias . . . 91
5.3.2.2 Regresiones . . . 92
5.4 Conclusiones del Capítulo . . . 94

6 Anexo A: Capítulo 4 95
6.1 Códigos en Python para el cómputo de los operadores. . . . 95
6.2 Códigos en Matlab para el cómputo de las regresiones. . . . 99
6.3 Variables utilizadas. . . . 100
6.4 Resultados de las Regresiones. . . . 104

7 Anexo B: Capítulo 5 106
7.1 Series. . . . 106
7.2 Códigos en Python para el cómputo de los operadores. . . . 109
7.3 Códigos en SAS. . . . 111

Índice de Figuras

1 **Información Mutua Condicional**: Representación gráfica de la *Entropía Condicional* y la *Información Mutua Condicional*. 34

2 **Mapeo por orden temporal**: La figura de arriba muestra los valores que toma la serie X_t. Las figuras de abajo muestran el mapeo de los diferentes $X_t^{(d,\tau)}$ para $d = 3$, $\tau = 1$ en orden temporal. 50

3 **Número de Premutaciones**: La siguiente figura muestra la cantidad de veces que se repiten los distintos tipos de permutaciones π temporales para la *dimensión de embedding* $d = 3$. La serie de tiempo fue tomada del trabajo de Bandt y Pompe [1]. 51

4 **Mapeo por Compración**: La figura de arriba muestra los valores que toma la serie X_t. Las figuras de abajo muestran el mapeo de los diferentes X_t^d para $d = 3$ por comparación. 52

5 **Número de Premutaciones**: La siguiente figura muestra la cantidad de veces que se repiten los distintos tipos de permutaciones π para la *dimensión de embedding* $d = 3$. La serie de tiempo fue tomada del trabajo de Bandt y Pompe [1]. 52

6 Residuos de los diferentes modelos para la **Marca 1** 63

7 Residuos de los diferentes modelos para la **Marca 2** 63

8 Funciones de Probabilidad de Masa de los distintos modelos para la **Marca 1.** . . 65

9 Funciones de Probabilidad de Masa de los distintos modelos para la **Marca 2.** . . 66

10 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 1. 67

11 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 2. 68

12 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 1. 68

13 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 2. 69

14 La siguiente figura compara los diversos modelos para cada tipo de medida, las Entropías de Permutación, la Entropía de Rényi con $\alpha = 2$, la Entropía de Tsallis con $q = 0.5$, la Min-Entropy, Información de Fisher y Varianza. Se normaliza por el valor máximo de cada medida. 70

15 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 1. 70

16 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 2. 71

17 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 1. 71

18 **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 2. 71

19 La siguiente figura compara los diversos modelos para cada tipo de medida, las Entropías de Permutación, la Entropía de Rényi con $\alpha = 2$, la Entropía de Tsallis con $q = 0.5$, la Min-Entropy, Información de Fisher y Varianza. Se normaliza por el valor máximo de cada medida. 72

20 **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 1**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=4. 73

21 **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 1**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=5. 74

22 **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 2**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=5. 75

23 **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 2**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=5. 75

24 **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 1**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=4. 76

25 **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 1**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=5. 76

26 **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 2**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=4. 77

27 **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 2**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=5. 77

28 La siguente figura muestra la evolución de la Entropía de Permutación Ponderada y la Complejidad LMC para la **Marca 1**, con una ventana $w = 20$, paso $\Delta = 1$ y *dimensión de embedding.* $d = 4$. 78

29 La siguente figura muestra la evolución de la Entropía de Permutación Ponderada y la la Complejidad LMC para la **Marca 2**, con una ventana $w = 20$, paso $\Delta = 1$ y *dimensión de embedding.* $d = 4$. 79

30 Rendimiento logarítmico del S&P Merval entre 1/2/2017 y 5/28/2019. 82

31 Precio de cierre y variación porcentual del dolar Banco Nación entre 1/2/2017 y el 5/28/2019. 82

32 Indice de Riesgo País desde 1/2/2017 hasta 5/28/2019. 83

33 Comparación entre la Entropía de Permutación Ponderada del S&P Merval con una ventana de 200 días y el cambio porcentual en el precio del dólar. 85

34 Comparación entre la Entropía de Permutación Ponderada del S&P Merval con una ventana de 180 días y el cambio porcentual en el precio del dólar. 86

35 Comparación entre la Entropía de Permutación Ponderada del S&P Merval con una ventana de 90 días y el cambio porcentual en el precio del dólar. 86

36 Comparación entre la Complejidad del S&P Merval con una ventana de 200 días y el cambio porcentual en el precio del dólar. 90

37 Comparación entre la Complejidad del S&P Merval con una ventana de 180 días y el cambio porcentual en el precio del dólar. 90

38 Comparación entre la Complejidad del S&P Merval con una ventana de 90 días y el cambio porcentual en el precio del dolar. 91

39 La siguiente figura muestra el programa 1 de Python, procesando los operadores para la serie de residuos. 95

40 La siguiente figura muestra la primera parte del programa 2 de Python, procesando los operadores para la serie de residuos. 96

41 La siguiente figura muestra la segunda parte del programa 2 de Python, procesando los operadores para la serie de residuos. 97

42 La siguiente figura muestra los cambios al paquete de Python pyentrp, utilizado para procesar los operadores para la serie de residuos. 98

43 La siguiente figura muestra el código de Matlab utilizado para realizar las diferentes regresiones. 99

44 **Variables Marca 1**: La siguiente tabla contiene las variables para la regresión de la **Marca 1.** 100

45 **Variables Marca 1**: La siguiente tabla contiene las variables para la regresión de la **Marca 1.** 101

46 **Resultado Marca 2**: La siguiente tabla compara los distintos resultados obtenidos por los modelos de la **Marca 2.** 102

47 **Variables Marca 2**: La siguiente tabla contiene las variables para la regresión de la **Marca 2.** 103

48 **Resultado Marca 1**: La siguiente tabla compara los distintos resultados obtenidos por los modelos de la **Marca 1.** 104

49 **Resultado Marca 2**: La siguiente tabla compara los distintos resultados obtenidos por los modelos de la **Marca 2.** 105

50 **Serie Dolar**: La siguiente tabla muestra el precio y la variación porcentual del dolar Banco Nación. 106

51 **Serie Riesgo Pais**: La siguiente tabla muestra la serie de Riesgo País. 107

52 **Serie S&P Merval**: La siguiente tabla muestra la serie del S&P Merval. 108

53 La siguiente figura muestra el programa 1 y 2 de Python, donde se leen los archivos originales y se aplican el retorno logarítmico. 109

54 La siguiente figura muestra el programa 3 y 4 de Python donde se realizan los cálculos de los diferentes operadores con los parámetros elegidos. 110

55 La siguiente figura muestra el programa en lenguage SAS utilizado para el cálculo de las correlaciones. 111

56 La siguiente figura muestra el programa en lenguage SAS utilizado para el cálculo de los diferentes modelos. 112

57 La siguiente figura muestra el programa en lenguage SAS utilizado para el cálculo de los diferentes modelos. 113

Introducción

El siglo XX se caracterizó por la aparición y proliferación de diversos medios de comunicación, comenzando con la transmisión de ondas de radio a través del Atlántico por parte de Guillermo Marconi, la invención de la televisión en 1925, las primeras comunicaciones satelitales en 1960 y culminando con la aparición del protocolo internet TCP/IP en 1983. De la mano de estas innovaciones nace la Teoría de la Información que estudia la transferencia, cuantificación y almacenamiento de información entre emisores y receptores, por medio de técnicas físicas, matemáticas y estadísticas.

Claude Shannon publica en 1948 su famoso artículo *"Una teoría matemática de la comunicación"* para la revista Bell System Technical Journal, demostrando como cuantificar con precisión el proceso de comunicación por medio de herramientas matemáticas y estadísticas. Shannon propone una definición precisa de información y describe cuanta información puede ser transmitida entre los diferentes elementos de un sistema.

Shannon propone un sistema de comunicación que parte de una fuente desde la cual se emite una señal, la cual viaja por un canal, pero a lo largo de su viaje puede ser interferida por algún ruido. Luego esta señal sale del canal y llega a un receptor que decodifica la información convirtiéndola en mensaje. El objetivo de Shannon era buscar la forma más eficiente y segura de codificar el mensaje a pesar de la posible presencia de ruidos que dificulten la trasmisión. Logra establecer cual es la máxima compresión posible de la información utilizando el concepto de "entropía" y además muestra cual es la tasa límite de transmisión de información, comúnmente denominada "capacidad del canal".

A partir de los resultados obtenidos por Shannon se establecen los conceptos fundamentales de la Teoría de Información, tales como la entropía, la información mutua y las divergencias, que están formulados matemáticamente como operadores en un espacio de distribuciones de probabilidades permitiéndonos conocer ciertas facetas importantes del comportamiento de variables aleatorias con estas distribuciones.

El presente trabajo propone un estudio inicial de estos operadores por medio del Análisis Matemático y la Teoría de Probabilidades, con el objeto de buscar patrones y características distintivas entre series de tiempo. Posteriormente se buscará establecer ciertos criterios estadísticos y modelos subsigientes que permitan predecir el comportamiento futuro de la serie.

El punto de referencia inicial para la creación de las medidas de entropía y complejidad estará basado mayoritariamente en la función de probabilidad propuesta por Bandt y Pompe [1] asentada en las posibles permutaciones de los elementos de la serie a analizar. A esta función se le aplicaran diversos operadores de la Teoría de la Información con la finalidad de comparar su comportamiento y buscar homogeneidad en los resultados.

En los últimos años la Entropía de Permutación propuesta por Bandt y Pompe se convirtió en una de las herramientas de mayor popularidad y flexibilidad para caracterizar la complejidad de una serie de tiempo. Ellos propusieron una distribución de probabilidad asociada a una serie que tiene en cuenta el orden simbólico de la amplitud relativa de los valores de la serie de tiempo. La idea principal es reemplazar la serie original por una secuencia de estados finitos por medio de un proceso de muestreo, considerando el orden de los patrones. Esto permite encapsular información cuantitativa de la estructura temporal de la serie y calcular la entropía de esa subserie. Esta metodología ha sido ampliamente utilizada en análisis de datos en muchos campos de estudio y en distintas áreas de las ciencias aplicadas y la ingeniería tales como: la ingeniería mecánica, la medicina (detección de episodios de epilepsia, anestesia y cardiología) y las finanzas. Cabe destacar

el bajo costo computacional que esta metodología posee dado que se puede calcular la distribución de probabilidad utilizando algoritmos de ordenación eficientes como el ordenamiento rápido.

1 Capítulo 1: Preliminares Matemáticas.

1.1 Análsis Convexo

El Análisis Convexo es una rama de la Matemática que estudia propiedades de funciones y conjuntos Convexos. Para el presente trabajo utilizaremos nociones de esta rama para obtener algunas cotas para ciertos operadores y garantizar que los mínimos locales sean mínimos globales en algunas de las optimizaciones utilizadas. Las definiciones y parte del posterior desarrollo están basadas en principalmente en [2, 3, 4].

Definición 1.1.1. *Conjunto Afín*

Un conjunto A es Afín si y solo si $\forall x, y \in A$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\theta x + (1-\theta)y \ \in A$$

Definición 1.1.2. *Conjunto Convexo*

Un conjunto C es Convexo si y solo si $\forall x, y \in C$ y $0 \leq \theta \leq 1$ tenemos que:

$$\theta x + (1-\theta)y \ \in C$$

Definición 1.1.3. *Función Afín*

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es Afín si está definida de la siguiente manera:

$$f(x) = Ax + b \quad A \in \mathbb{R}^{m\,x\,n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 1.1.4. *Imagen de Función Afín es Convexa*

Sea C conjunto Convexo, con $\theta \in [0,1]$, $\forall a, b \in C$, $\theta a + (1-\theta)b \in C$.

Sea g Función Afín con $x, y \in g(C)$, $x = g(a)$, $y = g(b)$.

Demostración:

$$g(\theta a + (1-\theta)b) = \theta Aa + (1-\theta)Ab + b = \theta Aa + (1-\theta)Ab + \theta b + (1-\theta)b$$

$$= \theta g(a) + (1-\theta)g(b) = \theta x + (1-\theta)y$$

Definición 1.1.5. *Función Convexa*

Una función $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Convexa si C es Convexo y si $\forall x, y \in C$:

$$f\left(\theta x + (1-\theta)y\right) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

Definición 1.1.6. *Función Estrictamente Convexa*

$f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Estrictamente Convexa si:

$\forall x, y \in C,\ x \neq y,\ \theta \in (0,1)$

$$f\left(\theta x + (1-\theta)y\right) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

Definición 1.1.7. *Función Cóncava*

Una función $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Cóncava si C es Convexo y si $\forall x, y \in C$:

$$f\left(\theta x + (1-\theta)y\right) \geq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

De donde se desprende que f es Cóncava si y solo si $-f$ es Convexa.

Teorema 1.1.8.

Sea f, g Funciones Convexas, h Función Estrictamente Convexa, $a \in R^+$ entonces $a(f+g)$ es Función Convexa, $a(f+h)$ es Estrictamente Convexa.

Demostración:

$$a(f+g)(\theta x + (1-\theta)y) = af(\theta x + (1-\theta)y) + ag(\theta x + (1-\theta)y)$$

$$\leq \theta a f(x) + (1-\theta)af(y) + \theta a g(x) + (1-\theta)ag(y)$$

$$= a\theta(f+g)(x) + a(1-\theta)(f+g)(y)$$

Con $x \neq y,\ \theta \in (0,1)$:

$$a(f+h)(\theta x + (1-\theta)y) = af(\theta x + (1-\theta)y) + ah(\theta x + (1-\theta)y)$$

$$\leq \theta a f(x) + (1-\theta)af(y) + ah(\theta x + (1-\theta)y)$$

$$< \theta a f(x) + a(1-\theta)f(y) + \theta a h(x) + a(1-\theta)h(y)$$

$$= a\theta(f+h)(x) + a(1-\theta)(f+h)(y)$$

Definición 1.1.9. *Matriz Definida Positiva*

Sea M matriz simétrica $\in \mathbb{R}^{nxn}$, $x \in \mathbb{R}^n$, M es Definida Positiva ($\succ$) si:

$$x^T M x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Además es Definida Positiva si todos sus autovalores son positivos. Si se reemplaza el $>$ por un $\geq$ denominamos a la matriz Semidefinida Positiva.

Teorema 1.1.10. *Matriz de Gram Definida Positiva*

Sea A matriz $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $G = A^T A$ matriz de Gram. Si las columnas de A son linealmente independientes entonces $A^T A \succ 0$.

Demostración:

La matriz de Gram es simétrica pues es cuadrada y además:

$$(A^T A)^T = (A^T (A^T)^T) = A^T A$$

Con $x \in R^n$, dado que las columnas de A son linealmente independientes, el núcleo solamente lo conforma el vector 0, entonces:

$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2 \ > 0$$

Si las columnas no son linealmente independientes entonces G es Semidefinida Positiva:

$$\|Ax\|_2^2 \ \geq 0$$

Teorema 1.1.11. *La suma de matriz Definida Positiva y Semidefinida Positiva es Definida Positiva.*

Sea A, B matrices $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ siendo A Definida Positiva y B Semidefinida Positiva. Sea $x \in R^n$, $x \neq 0$ y $\lambda \in R^+$.

Demostración:

Se utilizarán las siguientes propiedades de las matrices (Teorema 1.4.1 [5]).

Utilizando la propiedad asociativa para la multiplicación matricial (a) y la propiedad distributiva por derecha (e).

$$x^T (A + \lambda B) x = x^T (Ax + \lambda Bx)$$

Por la propiedad distributiva por izquierda (d) y la propiedad (m) de multiplicación de escalares por matrices se tiene que:

$$= x^T Ax + \lambda x^T Bx > 0$$

Teorema 1.1.12. *Las matrices Definidas Positivas son invertibles.*

Sea A matriz Definida Positiva $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea λ autovalor de A.

Demostración:

Utilizando el siguiente resultado (Teorema 5.1.6 [5]): A es invertible si y solo si $\lambda = 0$ no es autovalor de A. Por la Definición 1.1, todos los autovalores de A son positivos y por ende A es invertible.

Teorema 1.1.13. *Condiciones de Segundo Orden*

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ si el Hessiano $\nabla^2 f(x) \succ 0$ (Definido Positivo) $\forall\ x \in D$, entonces f es Estrictamente Convexa.

Definición 1.1.14. *Extensión*

Sea f Función Cóncava $f(x) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces se define la Extensión $\hat{f}(x) : \mathbb{R}^n \to R \cup \{\infty\}$ como:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \text{dominio de} f \\ \infty & x \notin \text{dominio de} f \end{cases}$$

Teorema 1.1.15. *Composición de funciones Cóncavas*

Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Función Cóncava, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Función Cóncava con $\hat{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ Extensión creciente. Se define la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = h(g(x))$, entonces f es Cóncava.

Demostración:

Sea $x, y \in dom(f)$, $0 \leq \theta \leq 1 \to\ x, y \in dom(g)$ y $g(x), g(y) \in\ dom(h)$.

Como g es Cóncava:

$$g(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta g(x) + (1-\theta)g(y)$$

Como $g(x), g(y) \in\ dom(h)\ \Rightarrow\ \theta g(x) + (1-\theta)g(y) \in dom(h)\ \Rightarrow\ \hat{h}(\theta g(x) + (1-\theta)g(y)) = r \in \mathbb{R}$

Como $\hat{h}$ es creciente:

$$\hat{h}(g(\theta x + (1-\theta)y)) \geq \hat{h}(\theta g(x) + (1-\theta)g(y)) = r$$

Como $\hat{h}(g(\theta x + (1-\theta)y)) \geq r$ entonces $g(\theta x + (1-\theta)y) \in dom(h) \Rightarrow \theta x + (1-\theta)y \in dom(f)$

Dado que $\hat{h}$ es creciente:

$$h\left(g(\theta x + (1-\theta)y)\right) \geq h\left(\theta g(x) + (1-\theta)g(y)\right)$$

Por la concavidad de h:

$$h\left(\theta g(x) + (1-\theta)g(y)\right) \geq \theta h(g(x)) + (1-\theta)h(g(y))$$

Si además h es estrictamente creciente y g es Estrictamente Cóncava entonces f es Estrictamente Cóncava.

Teorema 1.1.16. *Clasificación de puntos críticos*

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Sea $\hat{x}$ punto interior de D, si el Hessiano $\nabla^2 f(\hat{x}) \succ 0$ (Definido Positivo) y $\nabla f(\hat{x}) = 0$ entonces f tiene un mínimo local en $\hat{x}$.

Teorema 1.1.17. *Desigualdad de Jensen*

Sea X variable aleatoria con media finita, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Función Convexa. Sea $E(X)$ la esperanza de la variable aleatoria X. Entonces:

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Demostración:

Sea g Función Lineal tal que $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ y además $g(E(x)) = f(E(x))$

$$E(f(x)) \geq E(g(x)) = E(mX + b) = mE(X) + b = g(E(x)) = f(E(x))$$

Teorema 1.1.18. *Desigualdad Suma de Logaritmos*

Sea $a_i\ , b_i \in\ \mathbb{R} \geq 0,\ \forall\ i\ \ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = a\ , \sum_{i=1}^{n} b_i = b$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\ log\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \geq a\ log\left(\frac{a}{b}\right)$$

Demostración:

$f(x) = x\ log_k(x)$ es Convexa en $\mathbb{R}^+$, pues $f^{''}(x) = \dfrac{1}{ln(k)\ x} \geq\ 0$ con $k > 1$, $x > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i log\left(\frac{a_i}{b_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i f\left(\frac{a_i}{b_i}\right)\ \wedge\ \ a\ log\left(\frac{a}{b}\right) = b\ f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$\dfrac{b}{b} \sum_{i=1}^{n} b_i f\left(\dfrac{a_i}{b_i}\right) \geq b\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{b_i}{b}\dfrac{a_i}{b_i}\right)$ por la Desigualdad de Jensen (Teorema 1.1.17)

$$= b\ f\left(\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = b\ f\left(\frac{a}{b}\right)$$

1.2 Medida

Si bien gran mayoría de los operadores utilizados en la presente Tesis pueden ser aplicados para Distribuciones Discretas, continuas o mixtas, la generalización de estos para Distribuciones de Probabilidad requiere de ciertos teoremas de la teoría de la medida. Para esta sección fueron utilizados los libros [6, 7, 8, 9].

Definición 1.2.1. *Espacio Métrico*

Un Espacio Métrico es un par ordenado (M, d) donde M es un conjunto y d es una métrica en M, función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que cumpla con :

M1 d(x,y) ≥ 0

M2 d(x,y) $= 0 \iff$ x = y

M3 d(x,y) = d(y,x)

M4 d(x,z) $\leq$ d(x,y) + d(y,z)

Teorema 1.2.2. *Convergencia de Lebesgue*

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones reales o complejas medibles en un espacio de medida (Ω, Σ, μ) que convergen puntualmente a f. Sea $g \in L^1$ función que domina a f es decir que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}$.

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Definición 1.2.3. *Medidas σ-Finitas*

Sea (X, Σ, μ) especio de medida, μ es σ finita si y solo si $\exists$ conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n \in \Sigma$ con $\mu(A_n) < \infty$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.

Definición 1.2.4. *Medida Absolutamente Continua*

Sea (X, Σ) espacio de medida. Si λ , μ son dos medidas en (X, Σ). Una medida μ es Absolutamente Continua con respecto a λ, denotado por $\mu \ll \lambda$, si y solo si $\lambda(A) = 0$ $\forall A \in \Sigma$ implica que $\mu(A) = 0$.

Teorema 1.2.5. *Radon–Nikodym*

Sea (X, Σ) espacio de medida. Si λ , μ son dos medidas σ finitas y además $\lambda \ll \mu$ entonces existe una función medible $f : X \to (0, \infty)$, $f = \dfrac{d\lambda}{d\mu}$ $\forall A \subseteq X$ tal que:

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu$$

Definimos la condición de Lipschitz, en este caso para la derivada de una funcíon.

Definición 1.2.6. *Continuidad de Lipschitz*

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ función diferenciable, la derivada $D(f(x))$ es Lipschitz con ratio L en $V \subset U$ si $\forall x, y \in V$ $|D(f(x)) - D(f(y))| \leq L|x - y|$

Definición 1.2.7. *Pseudométrica*

Sea un (M, d) par ordenado donde M es un conjunto y d es una función d:M$\times M \to \mathbb{R}$ que cumpla con **M1**, **M2** y **M4**, entonces d es una Pseudométrica.

Teorema 1.2.8. *Límite de sucesiones y funciones.*

Sean X, Y espacios métricos, $E \subset X$ y f función $f : E \to Y$ con p punto límite en E. Sea $\{p_n\}$ sucesión en E. Entonces:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \iff \lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \text{ , } \forall \{p_n\} \in E \text{ con } p_n \neq p \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ siendo } \lim_{n \to \infty} p_n = p$$

Demostración: Teorema 4.2 [8].

Teorema 1.2.9. *Regla de Leibnitz*

Sea $f(x, \theta)$ función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en $[a, b] \times [c, d] \subset R^2$.

$$\frac{d}{d\theta}\left(\phi(\theta)\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\theta}\left(f(x, \theta)\right) dx$$

Demostración:

Definimos el siguiente cociente:

$$\frac{\phi(\theta+\frac{1}{n})-\phi(\theta)}{1/n}=\int_a^b n\left(f(x,\theta+\frac{1}{n})-f(x,\theta)\right)dx$$

Si fijamos θ definimos la función $u_n(x)=n\left(f(x,\theta+\frac{1}{n})-f(x,\theta)\right)$.

Utilizando el cambio de variables en el límite $h\to 1/n\ \forall x\in[a,b]$ y procurando tomar un n lo suficientemente grande para que $\theta+\frac{1}{n}\in[c,d]$, por la diferenciabilidad de f y el Teorema 1.2.8 se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)$$

Si fijamos x, por el teorema del valor medio de Lagrange y continuidad de las derivadas parciales en un intervalo se obtiene:

$$\exists z\in(c,d)\ :\ \left|\frac{\delta f}{\delta\theta}(x,z)\right|=\left|\frac{\left(f(x,\theta+\frac{1}{n})-f(x,\theta)\right)}{1/n}\right|$$

$$\leq\sup_{(x,\theta)\in(a,b)\times(c,d)}\left|\frac{\delta f}{\delta\theta}(x,\theta)\right|=M$$

Con esta cota M y la convergencia puntual de $u_n(x)$ estamos en condiciones para utilizar el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

$$\lim_{n\to\infty}\ \frac{\phi(\theta+\frac{1}{n})-\phi(\theta)}{1/n}=\int_a^b\lim_{n\to\infty}u_n(x)\ dx=\int_a^b\frac{\delta}{\delta\theta}f(x,\theta)\ dx$$

Teorema 1.2.10. *Regla General de Leibnitz*

Sea X abierto en en $\mathbb{R}$, Ω espacio de medida. Si $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ cumple con:

1. $f(x, \theta)$ una función integrable Lebesgue con respecto a θ, $\forall x \in X$
2. Para casi todo $\theta \in \Omega$ la derivada $\dfrac{\delta f(x,\theta)}{\delta x}$ existe $\forall x \in X$
3. Existe una función integrable $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\left|\dfrac{\delta f(x,\theta)}{\delta x}\right| \leq g(\theta)$ $\forall x \in X$

   Entonces $\forall x \in X$

$$\frac{d}{dx}\int_{\Omega} f(x,\theta)\ d\theta = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x,\theta)\ d\theta$$

1.3 Probabilidades

En la siguiente sección se enunciarán ciertas definiciones del campo de la estadística y la teoría de la probabilidad. Se utilizarán las definiciones de Funciones de Masa y Funciones de Densidad presentadas en [10].

Definición 1.3.1. *Función de Masa Conjunta*

Sean X, Y variables aleatorias discretas definimos la Función de Masa Conjunta f, $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ como:

$$f(x, y) = P(X = x \ \ y \ \ Y = y)$$

Definición 1.3.2. *Distribución Conjunta para variables aleatorias continuas*

Sean X, Y variables aleatorias continuas (conjuntas), $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es Distribución Conjunta si:

$$F(x, y) = P(X \leq x\ ,\ Y \leq y)$$

Definición 1.3.3. *Función de Densidad Conjunta*

Sean X, Y variables aleatorias continuas (conjuntas) con Función de Densidad Conjunta $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ si:

$$F(x, y) = \int_{v=-\infty}^{y}\int_{u=-\infty}^{x} f(u, v)\ dudv \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.3.4. *Distribución Condicional para variables aleatorias*

Sean X, Y variables aleatorias con Función de Densidad Conjunta f. Definimos la Distribución Condicional de Y dado $X = x$, $F_{Y|X}(.|x)$ como:

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}\, dv \quad \forall x \text{ tal que } f_X(x) > 0$$

Definición 1.3.5. *Función de Densidad Condicional*

La Función de Densidad Condicional $f_{Y|X}$ de $F_{Y|X}$ esta dada por:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Definición 1.3.6. *Mezcla de Variables Aleatorias.*

Sea X variable aleatoria discreta que toma valores en $\{1, 2, .., n\}$, $p(x)$ función de Probabilidad de Masa. Sea $w_i \in \mathbb{R} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Definimos la Mezcla como:

$$m(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i p(i)$$

Definición 1.3.7. *Coeficiente de Correlación de Pearson*

Sea Sea (Ω, Σ, P) espacio de probabilidad con X, Y variables aleatorias reales definidas en el espacio de probabilidades con esperanza finita y varianza positiva. Con sd como desviación standard, definimos la correlación de Pearson como:

$$corr_P(X,Y) = \frac{E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)}{sd(X)sd(X)}$$

Definición 1.3.8. *Coeficiente de Correlación de Spearman*

El Coeficiente de Correlación de Spearman para variables aleatorias discretas indexadas es la Correlación de Pearson de una función de las variables aleatorias denominada clasificación y simbolizada como $Cla()$. El objeto de este coeficiente es medir la relación entre los patrones ordinales de dos series. Si no hay valores repetidos la clasificación asigna a cada valor de la variable aleatoria un número natural de acuerdo a la posición que posee este valor al ordenar la serie original de menor a mayor segun el orden de los números reales. En el caso de existir valores repetidos, se le asigna el valor del promedio de las posiciones al ordenar la serie original de menor a mayor segun el orden de los números reales.

$$corr_S(X,Y) = \frac{E\left((Cla(X) - E(Cla(X)))(Cla(Y) - E(Cla(Y)))\right)}{sd(Cla(X))sd(Cla(Y))}$$

Definición 1.3.9. *Coeficiente de Correlación de Kendall Tau*

El Coeficiente de Correlación de Kendall Tau para variables aleatorias discretas indexadas $Cla(X), Cla(Y)$ con n elementos.

Los pares $(Cla(x_i), Cla(y_i)), (Cla(x_j), Cla(y_j))$ con $i < j$ son concordantes si $Cla(x_i) > Cla(x_j)$ y además $Cla(y_i) > Cla(y_j)$, o bien $Cla(x_i) < Cla(x_j)$ y $Cla(y_i) < Cla(y_j)$.

Son discordantes si $Cla(x_i) > Cla(x_j)$ y además $Cla(y_i) < Cla(y_j)$, o bien $Cla(x_i) < Cla(x_j)$ y $Cla(y_i) > Cla(y_j)$.

Sea C el número de pares concordantes, D el número de pares discordantes, X_0 el número de pares con valores iguales de $Cla(X)$, Y_0 el número de pares con valores iguales de $Cla(Y)$ y X_0, Y_0 el número de pares con valores iguales de ambos $Cla(X)$ y $Cla(Y)$. El Coeficiente de Correlación de Kendall Tau se define como:

$$corr_{k\tau}(X, Y) = \frac{C - D}{\sqrt{(C + D + X_0)(C + D + Y_0)}}$$

2 Capítulo 2: Entropía, Divergencia y Complejidad.

En el presente capítulo se desarrollarán algunos conceptos de la Teoría de la Información con la finalidad de definir ciertos operadores que serán utilizados en capítulos posteriores. Se busca presentar primero una visión general de los tópicos más relevantes a esta Tesis, así como también una serie de resultados que formen un marco teórico. Gran parte del desarrollo está basado en los siguientes libros [11, 12, 13, 14], pero también se incluyen tópicos expuestos en diversos artículos para temas de relevancia histórica o muy actuales.

2.1 Entropía De Shannon

La información como concepto abstracto, es de mucha complejidad para ser abordado con una única definición, por eso en este capítulo se desarrollarán medidas o propiedades cuantitativas de la información que darán una descripción y caracterización mucho más profunda y detallada de este concepto. El primer concepto que se expondrá es el de entropía de una variable aleatoria, para luego abordar una generalización de la misma llamada entropía relativa, esta última permitirá realizar una comparación entre dos Funciones de Probabilidad.

En el marco de la Teoría de la Información, la entropía es una medida de incertidumbre de una variable aleatoria en particular. Otra interpretación muy común es caracterizar la entropía como un operador que mide la cantidad de información que posee una variable aleatoria, es decir que pretende cuantificar cuanta información posee o aporta una observación de la variable aleatoria. Historicamente la Teoría de la Información baso muchos de sus conceptos en desarrollos anteriores del campo de la Mecánica Estadística, en especial la Estadística Termodinámica. En 1978 Willard Gibbs define la entropía [15] como función que caracteriza el macro estado de un sistema termodinámico en base a la distribución de probabilidad de sus micro estados.

Teóricamente esta medidida debería estar alineada con ciertas propiedades básicas y fundamentales de la información.

(a) La información proveniente de eventos independientes es aditiva.

(b) La información es una cantidad no negativa.

(c) Los eventos de probabilidad 1 no aportan información.

Definición 2.1.1. *Entropía de Shannon*

Sea X variable aleatoria discreta con función de Masa de Probabilidad $p(x)$. Sea $b \in R > 1$

$$H(x) = -\sum_{x \epsilon X} p(x)\ log_b[p(x)]$$

La caracterización axiomática de la entropía como medida de información parte del trabajo de Claude Shannon [16] pero múltiples otros desarrollos axiomáticos fueron propuestas por diversos autores [17]. Si bien el presente trabajo no se enfoca en del desarrollo axiomático de este operador, destacaremos los postulados mas utilizados para caracterizar la Entropía de Shannon.

Postulado 2.1.1. *Postulados Entropía de Shannon*

1. $H(p_1, p_2, ..., p_n)$ es una función simétrica de sus variables $\forall n \geq 2$.
2. $H(p, 1-p)$ es una función continua de p para $0 \leq p \leq 1$.
3. $H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$.
4. $H[tp_1, (1-t)p_1, p_2, ..., p_n] = H(p_1, p_2, ..., p_n) + p_1 H(t, 1-t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

De esta definición se desprenden ciertas propiedades y teoremas básicos. Cabe destacar que ciertos desarrollos de la entropía toman alguna de estas propiedades como axiomas.

Propiedades 2.1.1. *Algunas Propiedades de la Entropía*

(a) $H(0) = 0log_b(0) = 0$

(b) $H(x) \geq 0$ *(Positividad de la Entropía)*

Demostración:

$H(x) \geq 0 \ \forall x \ \epsilon \ X \ , \ 0 \leq \ p \ \leq 1 \implies \ log_b(p) \ \leq 0$

(c) $H(x) = E(-log\,(p(x)))$ *(Definición como esperanza matemática)*

(d) $H(X) \leq log_b(n)$ *(Logaritmo como cota superior)*

Demostración:

$H(x) = E(-log_b\,(p(x))) = E[log_b(\frac{1}{p(x)})] \leq log_b[E(\frac{1}{p(x)})] \ = \ log_b[\sum_n \frac{1}{p(x)} \cdot p(x)]$
$= \ log_b(n)$

(e) $H(p_1, ..., p_n) = H(p_{\sigma(1)}, ..., p_{\sigma(n)})$ *(Simetría por permutación σ)*

En el siguiente teorema se analizará los puntos críticos de la entropía en el abierto $(0, 1)$ utilizando los Multiplicadores de Lagrange. La frontera de este conjunto se puede evaluar de manera separada, aunque la cota superior y la concavidad estricta garantizan la unicidad del máximo.

Teorema 2.1.2. *Puntos críticos de la Entropía de Shannon*

Sea f, g funciones, con $p_j \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

$f : (0,1)^n \to R \ : \sum_{j=1}^{n} p_j log(p_j)$

$g : (0,1)^n \to R \ : \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ con $f, \ g \ \ C^1$ en $(0, 1)$.

$$\nabla f = \left(..., log(p_j) + \frac{1}{ln(2)}, ... \right) \quad \nabla g = (..., 1, ...)$$

$$L(p_1, ..., p_n, \lambda) = \left(..., log(p_j) + \frac{1}{ln(2)} - \lambda, ... \right)$$

$$L(p_1,...,p_n,\lambda)=0 \iff log(p_j)=\lambda-\frac{1}{ln(2)} \quad \forall j\in\{1,2,...,n\} \iff p_j=p_i \ \forall i\in\{1,2,...,n\}$$

$$\iff \quad p=\frac{1}{n} \ \Rightarrow H(p)=log(n)$$

Teorema 2.1.3. *Cambio de Variables para la Entropía de Shannon*

Sean X, Y variables aletorias de rango finito, $f: X \to Y$ una función medible entonces $H(X) \geq H(Y)$ con $H(X)=H(Y)$ si f es biyectiva.

Demostración:

$$p(y)=P(Y=y)=P\{X\in f^{-1}(y)\}=\sum_{x\in f^{-1}(y)} p(x) \text{ , para un x fijo } p(y)\geq p(x)$$

$$H(X)=-\sum_{x\in X} p(x)log(p(x))=-\sum_{y\in Y}\sum_{x\in f^{-1}(y)} p(x)log(p(x))$$

$$\geq -\sum_{y\in Y} p(y)log(p(y))=H(Y)$$

como el logaritmo es una función estrictamente creciente para bases >1, entonces

$p(y)=\sum_{x\in f^{-1}(y)} p(x)=\sum_{x_0} p(x)=p(x)$ entonces $H(X)=H(Y)$ si f es biyectiva.

2.1.1 Contenido de Información

El contenido de información de una variable aleatoria simboliza la cantidad de información que se obtine cuando se muestrea la misma. Sea X variable aleatoria con Función de Masa de Probabilidad $p(x)$, se define este operador como:

Definición 2.1.4. *Contenido de Información*

$$I_X(x)=-log[p(x)]$$

Ahora bien, de la Definición 2.1.4 se desprende que la entropía es el valor esperado de el contenido de información y por ende está dada por:

$$H(X)=E[I_X(x)]$$

Para variables aleatorias con distribución continua f en S $\subseteq \mathbb{R}^n$ soporte de la función $f(x)$ conjunto medible, definimos la Entropía Diferencial siempre que la integral de Lebesgue exista como el siguiente operador:

Definición 2.1.5. *Entropía Diferencial*

$$H(x) = -\int_S f(x)log(f(x))\ dx$$

A pesar que a simple vista esta definición de entropía pareciera generalizar a la idea original, tiene ciertas particularidades que desnaturalizan el concepto de entropía. El siguente ejemplo señala la posibilidad que tiene la Entropía Diferencial de tomar valores negativos.

Ejemplo 2.1.1.

Sea f Distribución Uniforme Contínua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

Tomando, por ejemplo, $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{1}{2}$ se puede observar que:

$$H(X) = -\int_a^b f(x)log(f(x))dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}log(b-a)dx = log(b-a) < 0$$

Además de la posibilidad de tomar valores negativos, la Entropía Diferencial tiene otras particularidades que se apartan de los parámetros que la Teoría de Información pretende que el operador posea ya que, por ejemplo, su valor cambia con transformaciones biyectivas de la variable aleatoria.

Lema 2.1.1. *Cambio de Variables para Funciones de Densidad*

Sea Y, X variables aleatorias contínuas que toman valores en un intervalo T, S, con Distribución G, F y Función de Densidad g, f respectivamente. Sea $S \subset \mathbb{R}$ intervalo cerrado con frontera ∂S y U interior de S. Tomando $r : U \to T \subseteq \mathbb{R}$, $r(X) = Y$ función C^1 y biyectiva en $(S - \partial S)$.

$$F(x) = P(X \leq x) = P(r^{-1}(Y) \leq x)$$

Con $r(x)$ creciente:

$$= P[Y \leq r(x)] = G[r(x)]$$

Derivando, por la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo:

$$f(x) = \frac{d}{dx}G(r(x)) = g(r(x))\frac{d}{dx}r(x)$$

Si $r(x)$ es decreciente:

$$f(x) = -\frac{d}{dx}F(x) = g(r(x))\frac{d}{dx}r(x)$$

Si $r(x)$ es creciente o decreciente:

$$f(x) = g(r(x))|\frac{d}{dx}r(x)|$$

Teorema 2.1.6. *Cambio de Variables para la Entropía Diferencial*

$$H(Y) = E\left(log(\frac{d}{dx}r(x))\right) - H(X)$$

Demostración:

Sea X una variable aleatoria que toma valores en $S \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto con frontera ∂S y U entorno abierto de S e Y variable aleatoria que toma valores en T. Sea f y g Funciones de Densidad de X e Y respectivamente. Tomando $r : U \to T \subseteq \mathbb{R}$ mapeo C^1 con derivada Lipchitz (Definición 1.2.6) y biyectivo en $(S - \partial S)$ tal que $\frac{d}{dx}(r(x))$ sea invertible $\forall x \in (S - \partial S)$, con $r(X) = Y$. Sea $g(y)log(\frac{1}{g(y)})$ integrable Rienmann en T. Utilizaremos el Lema 2.1.1 y el Teorema de cambio de variables para integrales se tiene que:

$$H(Y) = \int_T g(y)log(\frac{1}{g(y)})dy = \int_S \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}r(x)} log\left(\frac{\frac{d}{dx}r(x)}{f(x)}\right) \frac{d}{dx}r(x)\, dx$$

$$= \int_S f(x)log\left(\frac{d}{dx}r(x)\right) dx - \int_S f(x)log\left(f(x)\right) dx$$

$$= E\left(log(\frac{d}{dx}r(x))\right) - H(X)$$

2.1.2 Entropía de Rényi

Alfréd Rényi [18] propone una generalización de la Entropía de Shannon cambiando el postulado número 4 de Shannon (Postulado 2.1.1) por uno más débil llamado Aditividad.

Postulado 2.1.2. *Aditividad*

Tomando como referencia [18, 19], con $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ y $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ Funciones de Masa de Probabilidad indedpendientes y $p \cdot q$ función de Masa de Probabilidad formada por la multiplicación componente a componente (la Función de Masa de Probabilidad que consiste en los números $p_j q_k$ con $j = 1, 2, .., m$ y $k = 1, 2, ..., n$) entonces definimos la Aditividad como:

$$H(p \cdot q) = H(p) + H(q)$$

Sea p Función de Probabilidad Discreta de la variable aleatoria X, se define la Entropía de Rényi como:

Definición 2.1.7. *Entropía de Rényi*

$$\alpha \geq 0 \ , \ \alpha \neq 1 \ , \ \alpha < \infty$$

$$H_\alpha(X) = \ \frac{1}{1-\alpha} \ log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha\right)$$

Teorema 2.1.8. *Límite de la Entropía de Rényi*

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(p) = H(p)$$

Demostración:

$$f(x) = log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha\right) \ , \ \ g(x) = 1-\alpha, \ \ g'(x) = -1, \ \ g(0) = 0 \text{ y } \ \ f(0) = 0$$

$$\lim_{\alpha \to 1} f'(x) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha log(p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha} = \sum_{i=1}^{n} p_i log(p_i) \Rightarrow \lim_{\alpha \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i log(p_i)$$

Utilizando el Teorema de L'hopital obtenemos el resultado deseado.

Teorema 2.1.9. *Concavidad Estricta de la Entropía de Rényi ($\alpha < 1$)*

$$H_\alpha(p) = h(g(x)) = \frac{1}{1-\alpha} log\left(\sum_{i=1}^{n} P_i^\alpha\right) \ \alpha < 1$$

$$g : (P_1, P_2, ..., P_n) \to \mathbb{R} \ : \sum_{i=1}^{n} P_i^\alpha$$

$$h : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R} \ : h(x) = \frac{1}{1-\alpha} log_b(x)$$

Demostración:

Utilizando el Teorema 1.1.8 para la función g, tomada como suma de Funciones Cóncavas.

$$g = g_1 + g_2 + ... + g_n = P_1^\alpha + P_2^\alpha + ... + P_n^\alpha \text{ con } g_i : (P_1, P_2, ..., P_n) \to \mathbb{R} \ = \ P_i^\alpha$$

Dado que P_i^α es C^2 en el abierto $(0, \infty)$, el $\{0\}$ se evalua por separado. La función g_i es Estrictamente Cóncava en $(\mathbb{R})_1 \times (\mathbb{R})_2 \times ... \times (0, \infty)_i \times ... \times (\mathbb{R})_n$.

$$\mathbf{H}(g_i) = \begin{bmatrix} (0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & (\alpha^2-\alpha)P_i^{\alpha-2} & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $(\alpha^2 - \alpha) < 0$ y $P_i^{\alpha-2} > 0$

Sea $x \in R^n \neq 0 \Rightarrow x^T\mathbf{H}x = (\alpha^2-\alpha)P_i^{\alpha-2}x_i^2 < 0$

Por el Teorema 1.1.13 g_i es Estrictamente Cóncava en $(\mathbb{R})_1 \times (\mathbb{R})_2 \times ... \times (0,\infty)_i \times ... \times (\mathbb{R})_n$.

Si $x \in (\mathbb{R})_1 \times (\mathbb{R})_2 \times ... \times [0,0]_i \times ... \times (\mathbb{R})_n,\ y \in (\mathbb{R})_1 \times (\mathbb{R})_2 \times ... \times (0,\infty)_i \times ... \times (\mathbb{R})_n$

$\Rightarrow g_i(\theta x + (1-\theta)y) = (1-\theta)^\alpha y_i^\alpha > (1-\theta)y_i^\alpha$. Si $(1-\theta) \in (0,1) \Rightarrow (1-\theta)^\alpha > (1-\theta)$.

Por el Teorema 1.1.8 g es Estrictamente Cóncava.

La función h es Estrictamente Cóncava y Estrictamente Creciente ya que el logaritmo lo es en $(0,\infty)$ para $b > 1$ por el criterio de las derivadas primera y segunda.

$$\frac{d}{dx}log_b(x) = \frac{1}{x\ln(b)} > 0 \qquad \frac{d^2}{dx}log_b(x) = -\frac{1}{\ln(b)\,x^2} < 0$$

Por el Teorema 1.1 f es Estrictamente Cóncava.

Sea p Función de Probabilidad de Masa de una variable aleatoria X, se define la Entropía de Colisión como:

Definición 2.1.10. *Entropía de Colisión ($\alpha = 2$)*

$$H_2(p) = -log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)$$

Teorema 2.1.11. $H_2(p) \leq H_2(u)$

Con p, u Funciones de Probabilidad de Masa, y vector en $\mathbb{R}^n$.

Sea $u \in \mathbb{R}^n,\ u = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$

Sea $p \in \mathbb{R}^n,\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Sea $y \in \mathbb{R}^n$, $y = (1,1,1,...,1)$

Demostración:

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle p,y\rangle|^2 \leq \langle p,p\rangle\langle y,y\rangle \Rightarrow 1 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \cdot n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^2\right)$$

Como el logaritmo negaitvo es estrictamente decreciente:

$$H_2(p) \leq H_2(u)$$

Sea p función de Probabilidad de Masa de una variable aleatoria X, se define la Entropía Mínima como:

Definición 2.1.12. *Entropía Mínima ($\alpha \to \infty$)*

$$H_\infty(p) = -log\left(\max_i p_i\right)$$

2.1.3 Entropía de Tsallis

La Entropía de Tsallis [20] fue introducida como genrealización de la Entropía de Shannon para p función de Probabilidad de Masa de la variable aleatoria X y q un número real cualquiera:

$$H_q(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{q-1}\ \left(1 - \sum\limits_{i \in X} p_i^q\right) & si\ q \neq 1 \\ \\ -\sum\limits_{i\ \in X} p_i\ ln(p_i) & si\ q = 1 \end{cases}$$

La Entropía de Tsallis fue originalmente propuesta [20] como una variante de la entropía tradicional, posteriormente se extendio su utilización para el estudio de procesos estocásticos no markovianos [21], detección de patrones relacionados al daño cerebral en electrocardiogramas [22], árboles de decisiones [23]. Esta entropía tiene distintos tratamientos axiomáticos [24] muchos de los cuales utilizan una variante de la Aditivdad denominada Pseduo-Aditividad como axioma.

El siguiente teorema justifica la definición de la Entropía de Tsallis como función por partes.

Teorema 2.1.13. *Límite de la Entropía de Tsallis*

$$\lim_{q \to 1} H_q(p) = H(p)$$

Demostración:

$$f(q) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^q\right),\ \ g(q) = 1 - q,\ \ g'(q) = -1,\ \ g(0) = 0 \text{ y } \ \ f(0) = 0$$

$$f'(q) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dq} p_i^q = -\sum_{i=1}^{n} p_i^q log(p_i)$$

Utilizando el Teorema de L'hopital obtenemos el resultado deseado.

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \sum_{i=1}^{n} p_i log(p_i)$$

2.2 Entropía Conjunta y Entropía Condicional

En esta sección se presentarán extensiones al concepto de Entropía de Shannon para variables aleatorias discretas con Distribuciones Conjuntas. Se desarrollará el concepto de Entropía Condicional, que intuitivamente representa la incertidumbre promedio que tenemos de una variable aleatoria Y sabiendo todos los valores que toma otra X. Además, se expondrá el concepto de Entropía Conjunta.

En esta sección se presentara la teoría solamente para variables aleatorias discretas.

Definición 2.2.1. *Vector Aleatorio*

Sean X, Y variables aleatorias que toman valores en espacios medibles S y T, respectivamente. Definimos (X, Y) como una variable aletoria que toma valores en un subconjunto de $(S \times T)$

Definición 2.2.2. *Entropía Conjunta*

$$H(X,Y) = -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) log(p(x,y)) \tag{1}$$

Definición 2.2.3. *Entropía Condicional*

Sea $p(x, y)$ función de Masa Conjunta para las variables aleatorias X, Y. Se define la Entropía Condicional como la incertidumbre promedio que tenemos de Y, conociendo cada valor que toma X.

$$H(Y|X) = -\sum_{x \in X} p(x) H(Y|X = x) \tag{2}$$

Teorema 2.2.4. $H(Y|X) = -\ E[\ log\ (p(Y|X))]$

Demostración:

$$= -\sum_{x \in X} p(x) \sum_{y \in Y} p(y|x) log(p(y|x)) = -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) log(p(y|x))$$

$$= -\ E[\ log\ (p(Y|X))]$$

$$= -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) log(\frac{p(x,y)}{p(x)}) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) log(\frac{p(x)}{p(x,y)}) \tag{3}$$

Definición 2.2.5. *Información Mutua*

$$I(X;Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) log \left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right)$$

Denominamos Información Mutua a $I(X;Y)$, esto nos permite describir la cantidad de información compartida entre X e Y. Se puede expresar también como:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

es decir la reducción de entropía de X por el conocimiento de Y.

Definición 2.2.6. *Información Mutua Condicional*

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z) = E\left(log \left(\frac{p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)} \right) \right)$$
$$= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Z} p(x,y,z) log \left(\frac{p(z)p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)} \right)$$

La Información Mutua Condicional a $I(X;Y|Z)$ cuantifica la reducción de la entropía de X por el conocimiento de Y, dada la certeza en la ocurrencia de Z.

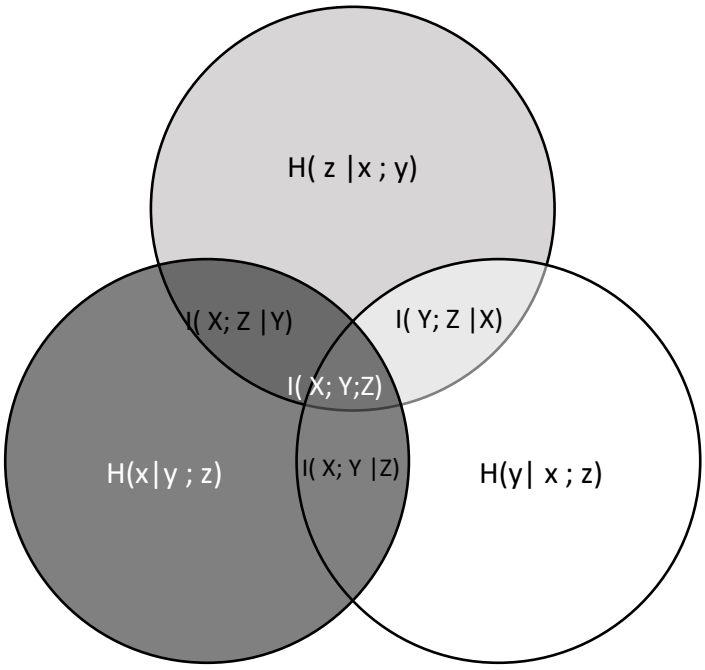


Figura 1: **Información Mutua Condicional**: Representación gráfica de la *Entropía Condicional* y la *Información Mutua Condicional*.

Teorema 2.2.7. *Regla de la Cadena*

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

Demostración:

Utilizando la expresión 3 del Teorema 2.2.4, por la propiedad del logaritmo:

$$H(X|Y) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} p(x,y)log(\frac{p(y)}{p(x,y)}) = -\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} p(x,y)log(p(x,y)) + \sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} p(x,y)log(p(y))$$

$$= H(X,Y) + \sum_{y\in Y} p(y)log(p(y)) = H(X,Y) - H(Y)$$

Colorario 2.2.1. $H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z)$

Demostración: Definimos los Vectores Aleatorios: $A := (X,Z)$ y $B := (X,Y)$

$$H(B|Z) = H(B,Z) - H(Z) = H(X,Y,Z) - H(Z) = H(Y,A) - H(Z)$$

$$= H(Y,A) - H(Z) + H(X,Z) - H(X,Z)$$

$$= H(Y,A) - H(A) + H(X,Z) - H(Z)$$

$$= H(Y|A) + H(X|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z)$$

Colorario 2.2.2. $H(Y|X) = H(X|Y) - H(X) + H(Y)$

Demostración:

Por la simetría de $H(X,Y)$

$$H(X,Y) = H(Y|X) + H(X) = H(Y,X) = H(X|Y) + H(Y)$$

Teorema 2.2.8. $H(X_1, X_2, .., X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X^{i-1})$ *(Regla General de la Cadena)*

Utilizando la siguente notación: $X^{i-1} = \{X_1, X_2, .., X_{i-1}\}$

Teorema 2.2.9. $I(X; Y_1, Y_2, ..., Y_n) = \sum_{i=1}^{n} I(X; Y_i|Y^{i-1})$ *Regla de la Cadena para la Información Mutua Condicional*

Utilizando la siguente notación: $Y^{i-1} = \{Y_1, Y_2, .., Y_{i-1}\}$

Teorema 2.2.10. *La diferencia simétrica de entropía es una Pseudométrica (Definición 1.2.7)*

$$d(X,Y) = H(X|Y) + H(Y|X)$$

Demostración:

M1: La Entropía Condicional $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ es no negativa.

M2: Es simétrica pues:

$$d(X,Y) = H(X|Y) + H(Y|X) = H(Y|X) + H(X|Y) = d(Y,X)$$

M4: Buscamos demostrar que:

$$H(X|Y) + H(Y|Z) + H(Z|Y) + H(Y|X) \geq H(X|Z) + H(Z|X)$$

Como $H(X|Y) + H(Y|Z) \geq H(X|Z)$ dado que:

$$H(X|Z) = H(X,Z) - H(Z) = H(X,Z) - H(Z) + H(Y,Z) - H(Y,Z)$$

$$= H(Y|Z) - [H(X,Y,Z) - H(X,Z)] + [H(X,Y,Z) - H(Y,Z)]$$

$$= H(X|Y) + H(Y|Z) - H(Y|X,Z) - I(X,Z|Y)$$

y además $H(Z|Y) + H(Y|X) \geq H(Z|X)$ por el mismo argumento.

2.3 Entropías Relativas y Divergencias

El concepto de Entropía Relativa es una medida de distancia entre dos Distribuciones. En Teoría de la Información la Entropía Relativa mide la cantidad extra de bits necesarios por letra para codificar un mensaje con Distribución Q, cuando la Distribución real es P. Mide la ineficiencia generada cuando se asume que la Distribución es Q cuando verdaderamente es P.

Esta generalización de la entropía nos permite sortear los inconvenientes de la Entropía Difrenencial y definir una distancia para variables aleatorias continuas. Este operador que comúnmente es denominado Divergencia de Kullback-Leibler $D_{KL}(P,Q)$ no es una métrica ya que no es simétrica y además no cumple con la desigualdad triangular.

2.3.1 Divergencias

Definición 2.3.1. *Divergencia y Distancia*

Sea M Espacio métrico, d es una métrica en M. Llamamos Divergencia a las funciones que cumplen el postulado **M1** de la Definición 1.2.1, si además cumple con **M2** y **M3** lo denominamos Distancia.

Definición 2.3.2. *Divergencia de Kullback-Leibler*

Definimos la Divergencia de Kullback-Leibler para Funciones de Probabilidad de Masa p y q respecto a una variable aleatoria discreta X, con $p(x) = 0$ siempre que $q(x) = 0$ como:

$$D_{KL}(p,q) \;=\; \sum_{x\ \epsilon\ x} p(x)\ log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)$$

Teorema 2.3.3. $D_{KL}(p,q) \geq 0$

Demostración

Como $ln(x_0) \leq x_0 - 1$ para $x_0 \geq 0$

$$-D_{KL}(p,q) = \sum_{x\in X} p(x) ln\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right)$$

$$\leq \sum_{x\in X} p(x)\left(\frac{q(x)}{p(x)} - 1\right)$$

$$= \sum_{x\in X} q(x) - \sum_{x\in X} p(x) = 1 - 1 = 0$$

Alternativamente podemos usar el Teorema 1.1.18:

$$D_{KL}(p,q) = \sum_{x\in X} p(x) log_2\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geq \left(\sum_{x\in X} p(x)\right) log_2\left(\frac{\sum\limits_{x\in X} p(x)}{\sum\limits_{x\in X} q(x)}\right) =$$

$$1 log_2 1 = 0$$

Propiedades 2.3.1.

1. $D_{KL}(p,q) \geq 0 \ \wedge\ D_{KL}(q,p) = 0 \ \Leftrightarrow\ P(x) = Q(x)$
2. $D_{KL}(p,q) \neq D_{KL}(q,p)$

Teorema 2.3.4. *Combinación Convexa de Funciones de Masa de Probabilidad es función de Masa de Probabilidad*

Demostración:

Buscamos establecer que dada Funciones de Probabilidad de masa p, q, s :

1. $s(x) \geq 0\ \forall x \in X$
2. $\sum_{x\in X} s(x) = 1$

$$\lambda p + (1-\lambda)q = s\ ,\ \lambda \in [0,1]\ \rightarrow s(x) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda p_i + (1-\lambda)q_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n} p_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} q_i = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Teorema 2.3.5. *D_{KL} es Convexa respecto al par (p,q)*

Demostración:

Sea p, q Funciones de Masa de Probabilidad. Dado que definimos la convexidad solamente para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ visualizaremos a la Divergencia de Kullback-Leibler $D_{KL}(p, q)$ como función $D_{KL} : [0, 1]^{2n} \to R$ con $(p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_n, q_n) \in [0, 1]^{2n}$, como este dominio es Convexo y por el Teorema 2.3.4 la divergencia está bien definida para combinaciones Convexas de Funciones de Probabilidad de Masa. Con $\lambda \in [0, 1]$, con $(p^1, q^1), (p^2, q^2) \in (p, q)$ pares ordenados de Funciones de Masa de Probabilidad.

$$D_{KL}(\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2 \ , \ \lambda q^1 + (1-\lambda)q^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\lambda p_i^1 + (1-\lambda)p_i^2\right) \ log \ \left(\frac{\lambda p_i^1 + (1-\lambda)p_i^2}{\lambda q_i^1 + (1-\lambda)q_i^2} \right) \right)$$

Por el Teorema 1.1.18, Para un i fijo:

$$\left(\left(\lambda p_i^1 + (1-\lambda)p_i^2\right) \ log \ \left(\frac{\lambda p_i^1 + (1-\lambda)p_i^2}{\lambda q_i^1 + (1-\lambda)q_i^2} \right) \right) \leq \ \lambda p_i^1 \ log \left(\frac{\lambda p_i^1}{\lambda q_i^1} \right) + (1-\lambda)p_i^2 \ log \left(\frac{\lambda p_i^2}{\lambda q_i^2} \right)$$

Dado que esta desigualdad es válida $\forall i \in [1, 2, ..., n]$ y la suma de estos términos preserva la desigualdad entonces:

$$D_{KL}(\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2 \ , \ \lambda q^1 + (1-\lambda)q^2)$$

$$\leq \lambda D_{KL}(p^1, q^1) + (1-\lambda) D_{KL}(p^2, q^2)$$

Teorema 2.3.6. *No Negatividad de la Información Mutua.*

$$I(X; Y) \geq 0$$

Demostración:

Expresando la Información Mutua utilizando la Divergencia de Kullback-Leibler como: $D_{KL}(p(x, y), p(x)p(y))$. Por el Teorema 2.3.3, la no negatividad de la Divergencia de Kullback-Leibler, se establece que:

$$D_{KL}(p(x, y), p(x)p(y)) \geq 0$$

Teorema 2.3.7. *Concavidad Estricta de la Entropía.*

Demostración:

Sea u función de probabilidad de masa uniforme.

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p(x)log(p(x)) = -\sum_{i=1}^{n} p(x)log(p(x)) - \sum_{i=1}^{n} p(x)log(u(x)) + \sum_{i=1}^{n} p(x)log(u(x))$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(x)log(u(x)) - D_{KL}(p,u) = -\sum_{i=1}^{n} p(x)log\left(\frac{1}{n}\right) - D_{KL}(p,u)$$

$$= -log\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} p(x) - D_{KL}(p,u) = log(n)\sum_{i=1}^{n} p(x) - D_{KL}(p,u)$$

$$= log(n) - D_{KL}(p,u)$$

De la Definición 1.1.7 y el Teorema 1.1.8 se desprende que H es Estrictamente Cóncava por ser suma de Funcion Cóncava y Estrictamente Cóncava.

Definición 2.3.8. *Divergencia Kullback-Leibler Diferencial*

Para Distribuciones con Funciones de Densidad p,q definimos la Divergencia de Kullback-Leibler, siempre que la integral de Rienman indefinida exista como:

$$D_{KL}(p,q) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\; log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\; dx$$

Las anteriores definiciones son solamente aplicables para variables aleatorias con Funciones de Masa o Densidad de Probablidad en $\mathbb{R}$, sin embargo la Teoría de la Medida nos permite definir el concepto de divergencia para Medidas de Probabilidad en general.

Definición 2.3.9.

Si P, Q son dos Medidas de Probabilidad en (X, Σ) tal que $P \ll Q$ entonces definimos la Divergencia de Kullback-Leibler, siempre que la integral siguiente exista, como:

$$D_{KL}(P,Q) = \int_X log\left(\frac{dP}{dQ}\right) dP$$

Definición 2.3.10.

Si $P \ll Q \ll \lambda$ y además $p = \dfrac{dP}{d\lambda}$, $q = \dfrac{dQ}{d\lambda}$ definimos la Divergencia de Kullback-Leibler como:

$$D_{KL}(P,Q) = \int_X p\; log\left(\frac{p}{q}\right) d\lambda$$

Otras de las métricas más utilizadas para medir diferencias y establecer criterios de convergencia entre Funciones de Probabilidad es la Distancia de Variación. Para Funciones de Probabilidad de Masa esta distancia es un múltiplo de la norma L^1 y nos permite establecer una cota para la Divergencia de Kullback-Leibler.

Definición 2.3.11. *Distancia de Variación*

Sea (X, Σ) Espacio de Medida con μ, λ Medidas de Probabilidad en este espacio. Denominamos Distancia de Variación al siguiente supremo:

$$\|\mu - \lambda\|_V = \sup_{A \subset \Sigma} |\mu(A) - \lambda(A)| \tag{4}$$

Alternativamente si $\Delta = \{A_1, A_2, ..A_n\}$ es una partición finita de X podemos expresar la Distancia de Variación como:

$$\|\mu - \lambda\|_V = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{m} |\mu(A_i) - \lambda(A_i)|$$

Decimos que una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$ converge a μ en Variación si:

$$\lim_{n \to \infty} \|\mu_n - \mu\|_V = 0$$

Teorema 2.3.12.

Sea X conjunto numerable, (X, Σ) Espacio de Medida con μ, λ Medidas de Probabilidad.

$$\|\mu - \lambda\|_V = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |\mu(x) - \lambda(x)|$$

Demostración:

Particionamos X en dos conjuntos $A = \{x : \mu(x) \geq \lambda(x)\}$ y A^c. Sea $S \subset X$ y $S \neq A, A^c$.

$$\mu(S) - \lambda(S) \leq \mu(S \cap A) - \lambda(S \cap A)$$

Dado que la intersección remueve los $x \in S \cap A^c$ con $\mu(x) - \lambda(x) < 0$

$$\mu(S) - \lambda(S) \leq \mu(S \cap A) - \lambda(S \cap A) \leq \mu(A) - \lambda(A)$$

Dado que agregamos elementos de A con $\mu(x) - \lambda(x) \geq 0$

Entonces:

$$\mu(S) - \lambda(S) \leq \mu(A) - \lambda(A) \tag{5}$$

De la misma manera:

$$\lambda(S) - \mu(S) \leq \lambda(S \cap A^c) - \mu(S \cap A^c) \leq \lambda(A^c) - \mu(A^c) \tag{6}$$

$$\text{Como } \mu(A) - \lambda(A) - \lambda(A^c) + \mu(A^c) = 1 - 1 = 0$$

De 5, 6 $|\mu(S) - \lambda(S)| \leq |\mu(A) - \lambda(A)|$

$$\|\mu - \lambda\|_V = \frac{1}{2}\left(\mu(A) - \lambda(A) + \lambda(A^c) - \mu(A^c)\right) = \frac{1}{2}\left(|\mu(A) - \lambda(A)| + |\lambda(A^c) - \mu(A^c)|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x \in X} |\mu(x) - \lambda(x)|$$

Teorema 2.3.13.

Sean μ , λ Medidas de Probabilidad $\in (X, \Sigma)$ Espacio de Medida con μ , $\lambda \ll \sigma$

$$\|\mu - \lambda\|_V = \int_X \left|\frac{d\mu}{d\sigma} - \frac{d\lambda}{d\sigma}\right| d\sigma$$

La siguiente desigualdad establece una cota inferior para la Divergencia de Kullback-Leibler.

Teorema 2.3.14. *Desigualdad de Pinsker*

Sean μ , λ Medidas de Probabilidad $\in (X, \Sigma)$ Espacio de Medida.

$$\frac{1}{2}\left(\|\mu - \lambda\|_V\right)^2 \leq D_{KL}(\mu, \lambda)$$

2.3.2 Divergencia de Jensen-Shannon

La Divergencia de Jensen-Shannon es un operador basado en la Divergencia de Kullback-Leibler, pero pose ciertas características particulares, como su carácter simétrico. Fue introducida originalmente por Wong y You [25] y posteriormente desarollada por Lin [26].

El operador $\sqrt{D_{JS_{\frac{1}{2}}}}$ es verdaderamente una métrica ya que cumple con los axiomas **M1**, **M2**, **M3** y **M4** [27, 28].

Esta divergencia trae incorporado el concepto de Mezcla (Definición 1.3.6) de dos Distribuciones de Probabilidad, Lin [26] originalmente la introdujo para Funciones de Masa de Probabilidad con peso w_1, w_2 como $D_{JS_w} = H(w_1 p + w_2 q) - w_1 H(p) - w_2 H(q)$ demostrando las propiedades 2.3.2. En el presente trabajo utilizaremos el mismo peso para ambas Funciones de Probabilidades.

Definición 2.3.15. *Divergencia Jensen-Shannon*

$$D_{JS_{\frac{1}{2}}}(\ P \mid Q\ ) = \frac{1}{2}\left(\ D_{KL}(\ P\ ,\ \frac{P+Q}{2}\ ) + D_{KL}(\ Q\ ,\ \frac{P+Q}{2}\ )\right)$$

En términos de la Información Mutua, esta divergencia cuantifica la cantidad de información que poseen en comun una variable aleatoria de Mezcla X con Distribución $M = \frac{P+Q}{2}$ y una variable indicadora Z.

$$Z \in \{0,1\},\ Z = 0 \implies X \sim P,\ Z = 1 \implies X \sim Q$$

$$D_{JS_{\frac{1}{2}}}(\ P \mid Q\ ) = \frac{1}{2}\sum_{x\in X} P\ log\left(\frac{P}{M}\right) + \frac{1}{2}\sum_{x\in X} Q\ log\left(\frac{Q}{M}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x\in X} P\ log\,(P) - \frac{1}{2}\sum_{x\in X} P\ log\,(M) + \frac{1}{2}\sum_{x\in X} Q\ log\,(Q) - \frac{1}{2}\sum_{x\in X} Q\ log\,(M)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{x\in X} P\ log\,(P) + \sum_{x\in X} Q\ log\,(Q)\right) - \sum_{x\in X}\frac{1}{2}P\ log\,(M) - \sum_{x\in X}\frac{1}{2}Q\ log\,(M)$$

$$= -H(X|Z) + H(X)$$

Destacaremos 3 propiedades fundamentales que posee este operador. La primera es una cota inferior que se deriva inmediatamente de la Divergencia de Kullback-Leibler, la segunda destaca el carácter simétrico el operador y la tercera una cota superior independiente de las Funciones de Masa utilizadas. Lin [26] establece la cota superior de 1 para la Divergencia de Jensen-Shannon para el caso de Funciones de Masa de Probabilidad para variables aleatorias discretas (Teorema 2.3.16).

Propiedades 2.3.2. *Propiedades de la Divergencia de Jensen-Shannon*

1. $D_{JS_{\frac{1}{2}}}(\ P \mid Q\ ) \geq 0$
2. $D_{JS_{\frac{1}{2}}}(\ P \mid Q\ ) = D_{JS_{\frac{1}{2}}}(\ Q \mid P\ )$
3. $D_{JS_{\frac{1}{2}}}(\ P \mid Q\ ) \leq 1$ utilizando logaritmo base 2.

Algunos años luego del trabajo de Lin, Topsøe [29] generaliza una cota para este operador pero ya en el campo de Distribuciones de Probabilidades en general.

Teorema 2.3.16.

Sean P, Q Distribuciones de Probabilidad y b base del logaritmo utilizado para la divergencia.

$$D_{JS_{\frac{1}{2}}}(\ P \mid Q\ ) \leq\ log(b)\,\|P - Q\|_V$$

M.Endres y E.Schindelin [27] definen para dos Medidas de Probabilidad P,Q en un Espacio de Medida (Ω, A) con $p = \frac{dP}{d\mu}$, $q = \frac{dQ}{d\mu}$ derivadas de Radon-Nikodym con respecto a una medida dominante σ-finita μ.

Definición 2.3.17. *Divergencia Jensen-Shannon Generalizada*

$$D_{JS_{\frac{1}{2}}} = \int_{\Omega} \left(p\ log \frac{2p}{p+q} + q\ log \frac{2q}{p+q} \right)\ d\mu$$

2.3.3 Divergencia de Rényi

La Divergencia de Rényi nace como una generalización de la Divergencia de Kullback-Leibler, para un parámetro $\alpha \neq 1,\ 0 < \alpha < \infty$. Se define como:

Definición 2.3.18. *Divergencia de Rényi*

$$D_{\alpha}(P||Q) = \frac{1}{1-\alpha}\ log \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha}}{q_i^{\alpha-1}} \right)$$

- $D_1(p||q) = \lim_{a \to 1+} D_{\alpha}(p||q)$ El límite $\alpha \to 1$ Corresponde a la Divergencia de Kullback-Leibler.
- $D_0(p||q) = \lim_{a \to 0} D_{\alpha}(p||q) = -log\ q(p > 0)$
- $D_{\infty}(p||q) = \log \sup_i \frac{p_i}{q_i} = \log \left(\max_{A \subseteq X} \frac{P(A)}{Q(A)} \right)$

Con P, Q Medidas de Probabilidad en F, sean p, q densidades Absolutamente Continuas con respecto a μ, con $\alpha \in \{\ \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$ definimos la Divergencia de Rényi de orden entre P y Q como:

Definición 2.3.19. *Divergencia de Rényi generalizada*

$$D_{\alpha}(P||Q) = \frac{1}{\alpha - 1} log \int p^{\alpha} q^{1-\alpha} d\mu$$

2.4 Información de Fisher

La Información de Fisher nace como un concepto del area de la Estadistica Inferencial [30], su objetivo es medir la cantidad de información que nos brinda una variable aleatoria X sobre un parámetro θ que modela a esta variable aleatoria.

Dada una población con una Distribución de Probabilidad que depende de un parámetro θ^* y $x_1, x_1, ..., x_n$ una serie de valores obtenidos en una muestra aleatoria de esta población asociados a una variable aleatoria X. Si se desea estimar el parámetro θ^* en base a la muestra obtenida a través de una función $p(x_i, \theta)$ que representa la relación entre el parámetro θ y los posibles valores x_i de la variable aleatoria X. A diferencia de una Función de Probabilidad de Masa o Densidad, fijamos x como constante y se utiliza a θ como variable. A esta función $p(x_i, \theta)$ también se la conoce como función de Verosimilitud.

Definición 2.4.1. *Función de Verosimilitud*

Sea Θ Espacio de Parámetros, X variable aleatoria discreta con $p(\theta)$ función de Masa de Probabilidad dependiente del parámetro θ. La función de Verosimilitud $L : \Theta \to R^+$ se define como:

$$L(\theta, x_i) = p(\theta, x_i) = p_\theta(X = x_i)$$

$$L(\theta, x_i) = p(\theta, x_i)$$

Para simplificar ciertas expresiones basadas en la utilización de la regla del producto en la diferenciación de esta función, utilizamos una transformación monótona $log\,(L(\theta, x_i))$. Tomando la derivada con respecto al parámetro se obtiene la función denominada Score.

Definición 2.4.2. *Score*

$$S(\theta, x_i) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(log\,(L(\theta, x_i))\right) = \frac{\partial}{\partial\theta} log\,(p(\theta, x_i))$$

Si θ es el verdadero parámetro de la población bajo ciertas condiciones de regularidad basadas en la Regla General de Leibnitz se puede probar que la esperanza del Score es igual a zero.

Teorema 2.4.3. *Esperanza del Score*

$$E\left(S(\theta, x)\right) = 0$$

Demostración:

Sean $p(\theta, x)$ función que cumple con la hipótesis 1 del Teorema 1.2.10, $\dfrac{\partial}{\partial\theta}p(\theta, x)$ función que cumple con la hipótesis 2 y 3 del Teorema 1.2.10.

$$E\left(S(\theta, x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\theta, x)\; p(\theta, x)\; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}p(\theta, x)\right)}{p(\theta, x)} p(\theta, x) dx$$

Por la Regla General de Leibnitz se intercambia la derivada parcial con la integral:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta, x)\; dx = \frac{\partial}{\partial\theta} \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, x) dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} 1 = 0$$

Informalmente se busca cuantificar el comportamiento de la función de Verosimilitud cerca de un posible máximo. Con una función muy empinada, las pendientes de la curva tendrán una gran variación. La Varianza es la medida más utilizada para cuantificar la desviación de una variable aleatoria respecto de su media, por esta razon se define la Información de Fisher como la Varianza del Score:

Definición 2.4.4. *Información de Fisher*

$$I(\theta) = V\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log\left(L(\theta, x)\right)\right)$$

Teorema 2.4.5.

$$I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} log(p(\theta, x))\right) = V\left(S(\theta, x)\right)$$

Demostración:

Sean $\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta, x)$ función que cumple con la hipótesis 1 del Teorema 1.2.10 y además $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}p(\theta, x)$ función que cumple con la hipótesis 2 y 3 del Teorema 1.2.10.

Derivando ambos términos del Teorema 2.4.3:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta} log\left(p(\theta, x)\right) p(\theta, x)\ dx = 0$$

Por el Teorema 1.2.10 y la regla del producto:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} log\left(p(\theta, x)\right)\right) p(\theta, x)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta} log\left(p(\theta, x)\right)\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta, x)\ dx = 0$$

Además dado que $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log\left(p(\theta, x)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta, x)\right)\frac{p(\theta, x)}{p(\theta, x)}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log(p(\theta, x))\right)^2 p(\theta, x)\ dx$$

$$= V\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log(p(\theta, x))\right)$$

De donde se deriva que:

$$V\left(S(\theta, x)\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} log\left(p(\theta, x)\right)\right)$$

2.4.1 Medida de Información de Fisher

Derivado de la Información de Fisher nace un operador denominado Medida de Información de Fisher, originalmente planteado para distribuciones invariantes frente a translaciones [31].

Definimos la variable aleatoria $Y = X + \theta$ con X variable aleatoria y θ parámetro fijo. Con $p(x, \theta)$ Función de Densidad de Probabilidades. Frieden define la invarianza frente a translaciones como:

$$p(y, \theta) = p_x(y - \theta) = p_x(x)$$

Frieden propone reemplazar $p_x(x)$ en la definición de Información de Fisher utilizando el Teorema de cambio de variables para integrales.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial [p_x(x)]}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{p_x(x)} dx \qquad y = x + \theta$$

Recientemente se comenzó a utilizar para el análisis de señales complejas, como las obtenidas a través de una electroencefalografía, para el estudio de la epilepsia [32]. También se aplicó este operador para analizar señales geo-eléctricas en áreas sísmicas [33], para analizar series de tiempo capturadas para el análisis de la actividad térmica del volcán Etna [34], en el estudio de sistemas de partícula única [35] y en el contexto del Plano de Fisher-Shannon para las distribuciones t de Student y la distribución Normal Generalizada [36].

Estos autores consideran que la Medida de Información de Fisher es es una estimación cuantitativa de el carácter oscilatorio de la función de probabilidad. En el ámbito de la Teoría de Información se puede interpretar la Información de Fisher como la cantidad de información que una variable aletoria posee respecto a un parámetro θ por lo que se puede interpretar la Medida de Información de Fisher como la cantidad de información disponible en una variable aletoria.

Definición 2.4.6. *Medida de Información de Fisher*

Este operador se puede definir como una integral indefinida de Riemann o como integral de Lebesgue. Se optó por el segundo criterio. Sea S soporte de la función $p(x)$ conjunto mediable, con $p(x)$ diferenciable en S. Se define la Medida de Información de Fisher, si la siguiente integral de Lebesgue existe, como:

$$F(p) = \int_S \frac{1}{p(x)} (\frac{d}{dx} p(x))^2 \, dx \quad S \subseteq \mathbb{R}$$

Existen varias variantes de la Medida de Información de Fisher para Funciones de Probabilidad de Masa [37] [38], discretizando la derivada con el método de diferencias finitas ya de modo progresivo, regresivo o central. En el presente trabajo se optara por la siguiente discretización:

Definición 2.4.7. *Medida de Información de Fisher Discreta*

$$F(p) = F_0 \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sqrt{(p_{i+1})} - \sqrt{(p_i)} \right)^2$$

$$F_0 = 1 \quad \text{Si } p_{i^*} = 1 \text{ para } i^* = 1 \text{ o } i^* = N, p_i = 0, \forall i \neq i^*$$
$$F_0 = \frac{1}{2} \quad \text{Para el resto de los casos}$$

Con F_0 como factor de normalización dado que al expandir la suma de cuadrados obtenemos:

$$p_{x_1} + 2(p_{x_2} + p_{x_3} + ... + p_{x_{N-1}}) + px_N - 2\left(\sqrt{p_{x_2}}\sqrt{p_1} + \sqrt{p_{x_3}}\sqrt{p_{x_2}} + ... + \sqrt{p_{x_N}}\sqrt{p_{x_{N-1}}}\right)$$

Si $p_{x_{i+1}} \vee p_{x_i} = 0 \ \forall \ i \in \{1, 2, .., N-1\}$ y $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

$$p_{x_1} + 2(p_{x_2} + p_{x_3} + ... + p_{x_{N-1}}) + px_N \leq 2\left(p_{x_1} + p_{x_2} + ... + p_{x_N}\right) = 2$$

2.5 Medidas de Complejidad Estadística

A pesar del éxito alcanzado en el desarrollo de medidas para caracterizar el grado de desorden y las disimilitudes entre variables aleatorias, estas medidas no estaban bien desarrolladas para cuantificar otros factores como el nivel de correlación y la descripcion de las diferentes relaciones entre sub-componentes de un sistema. El concepto de complejidad nace para describir sistemas compuestos por elementos que se relacionan entre si cuyo comportamiento y propiedades no son evidentes. Intuitivamente un tanto un sistema con estados equiprobables como uno basado en una distribución de probabilidad degenerada se consideran de baja complejidad.

Las medidas de complejidad nos brindan la posibilidad de caracterizar Funciones de Probabilidad desde un enfoque diferente y más general que los criterios de entropía. Se involucran múltiples conceptos, como medidas de dispersión, divergencia y entropía dentro de un mismo operador.
López-Ruiz, Mancini y Calbet [39] proponen una medida de complejidad basada en el producto de una medida de entropía H y una medida de desequilibro Q.

$$C_{LMC} = QH$$

Originalmente se buscó caracterizar a Q como una medida de distancia entre Funciones de Probabilidad, pretendiendo medir la disparidad entre nuestra función objetivo y la distribución uniforme (la cual representa la distribución de equilibrio del sistema). Generalmente en la literatura se suele tomar la distribución uniforme p_e como valor de referencia.

Lamberti [40] introduce una medida de complejidad estadistica basada en la Entropía de Shannon y la Divergencia de Jensen-Shannon normalizada para una distribución de probabilidad discreta p, siendo p_e la distribucion discreta uniforme.

Definición 2.5.1. *Complejidad LMC*

$$C_{LMC}[p] = H^{norm}[p]\ D_{JS}[p, p_e]$$

$$H^{norm}(p) = \frac{H(p)}{H(p_e)}$$

En este caso utilizaremos la Divergencia de Jensen-Shannon como medida de desequilibrio.

Destacaremos otras medidas de complejidad [41] definidas en base a otros operadores que caracterizan ciertos matices de las Funciones de Probabilidad. Para dos parámetros α, β se define la medida de complejidad LMC-Rényi [42] como:

Definición 2.5.2. *Complejidad LMC-Rényi*

$$C_{\alpha,\beta}(p) = \ e^{H_\alpha(p)\ -\ H_\beta(p)} \quad 0 < \alpha < \beta\ ,\ \alpha, \beta\ \neq\ 1$$

Derivados de la Información de Fisher, nacen nuevas medidas de complejidad de cuantifican los cambios en la pendiente de nuestra función de probabilidad. Utilizando la Medida de Información de Fishers, se pueden definir las siguientes medidas de complejidad que capturan facetas muy distintas de nuestras Funciones de Probabilidades a comparación de las medidas previamente expuestas. Utilizando la notación de [41], sea $V(p)$ la Varianza de una funcíon de probabilidad p asociada a una variable aleatoria. Sea $F(p)$ la Información de Fisher, se define la Complejidad de Crámer-Rao como:

Definición 2.5.3. *Complejidad de Crámer-Rao*

$$C_{CR}(p) = \ F(p)\ V(p)$$

Definición 2.5.4. *Complejidad de Fisher-Shannon*

$$C_{FS}(p) = \ F(p)\ \frac{1}{2\pi e}\ e^{2H(p)}$$

La Complejidad de Crámer-Rao cuantifica el contenido de la derivada de la función de probabilidad y la concentración de la función original alrededor de la media, mientras que la Complejidad de Fisher-Shannon utiliza una transformación de la Entropía de Shannon para capturar cuan concentrada esta la función de probabilidad.

3 Capítulo 3: Metodología de Bandt y Pompe.

3.1 Entropía de Permutación

En los últimos años la Entropía de Permutación se convirtió en una de las herramientas de mayor popularidad y flexibilidad para caracterizar la complejidad de una serie de tiempo. Cristoph Bandt y Bernd Pompe [1] propusieron una Distribución de Probabilidad asociada a una señal que tiene en cuenta el orden simbólico de la amplitud relativa de los valores de la serie de tiempo. A esta Distribución se la utiliza para posteriormente evaluar la Entropía de Shannon. La idea principal es considerar el orden de los patrones y no los valores de la serie en sí, permitiéndonos encapsular información cuantitativa de la estructura temporal de la serie de tiempo.

En presencia de una variable aleatoria continua, se propone en [1] reemplazar la serie original por una secuencia de estados finitos por medio de un proceso de muestreo y calcular la Entropía de Permutación para esta subserie.

3.2 Consideraciones prácticas de la Entropía de Permutación.

Por motivos prácticos se dividirá el proceso de generación del operador en cuatro etapas:

1. Obtener una muestra de la serie de tiempo y elaborar el *vector de embedding*.
2. Generar un función medible que mapee el *vector de embedding* a un conjunto de números reales, para obtener una variable aleatoria.
3. Usar Función de Probabilidad propuesta por Bandt y Pompe.
4. Calcular la Entropía de Permutación.

Primera Etapa

Sea $\{x_t\}$ con $t \in A \subseteq \mathbb{R}$ una serie en $\mathbb{R}$, indexada por A. En el caso que la serie no esté indexada en un conjunto numerable o no sea finita, se procederá obteniendo una muestra de la serie. A la serie la simbolizaremos como X_t, siendo T su correspondiente cardinalidad. Denominaremos *vector de embedding* a $X_t^{(d,\tau)} = (x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau}, ., ., \ldots, x_{t+(d-1)\tau})$, con d como la *dimensión de embedding* (cardinalidad de $X_t^{(d,\tau)}$) y con $0 \leq t < T - (d-1)\tau$. El parámetro $\tau \in \mathbb{N}$ denominado *embedding delay* señala la separación temporal entre los elementos de la serie.

Segunda Etapa

Definimos a $S_d = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{d!}\}$ como el conjunto de posibles permutaciones de d elementos, de cardinalidad $d!$. Para calcular la Función de Probabilidad se sugiere [43, 1] un mapeo Ω entre los vectores $X_t^{(d,\tau)}$ y S_d que preserva las relaciones temporales de la serie de tiempo. Mientras que Π es la variable aleatoria que utilizaremos para calcular nuestra Función de Probabilidad.

$$\Omega : X_t^{(d,\tau)} \ \rightarrow S_d = \{\pi_1, \pi_2, \ \ldots, \pi_{d!}\}$$

$$\Pi : \{\pi_1, \pi_2, \ \ldots, \pi_{d!}\} \rightarrow \{1, 2, \ \ldots, d!\}$$

Se presentarán dos tipos de mapeos Ω :

a) Permutación por Orden Temporal

b) Permutación por Compración

3.2.1 Permutación por Orden Temporal

Este mapeo toma los *vectores de embedding* $X_t^{(d,\tau)}$ y los transforma en una sucesión de índices de elementos del *vector de embedding* ordenados según el criterio de orden regular en $\mathbb{R}$. Tomando la serie que originalmente se usó como ejemplo en [1] :

$$X_t = (4, 7, 9, 10, 6, 11, 3), \quad d = 3 \ , \ \tau = 1 \ , \ T = 7$$

$$X_0^{(3,1)} = (4, 7, 9) \ \text{ y } \ X_1^{(3,1)} = (7, 9, 10) \text{ mapeados a } \pi = 012 \text{ pues } x_t < x_{t+1} < x_{t+2}$$

$$X_2^{(3,1)} = (9, 10, 6) \text{ y } X_4^{(3,1)} = (6, 11, 3) \text{ meapeados a } \pi = 201 \text{ con } x_{t+2} < x_t < x_{t+1}$$

$$X_3^{(3,1)} = (10, 6, 11) \text{ a } \pi = 102 \text{ dado que } x_{t+1} < x_t < x_{t+2}$$

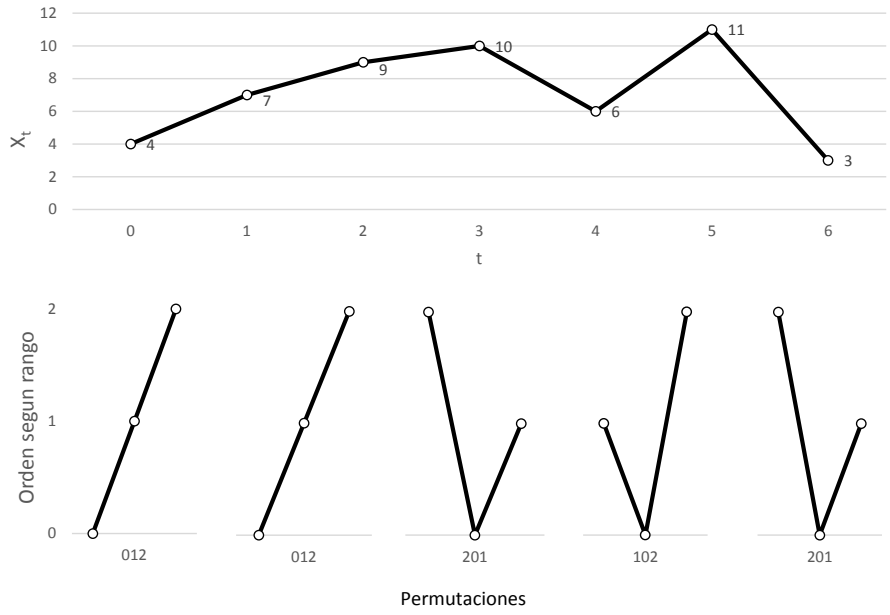


Figura 2: **Mapeo por orden temporal**: La figura de arriba muestra los valores que toma la serie X_t. Las figuras de abajo muestran el mapeo de los diferentes $X_t^{(d,\tau)}$ para $d = 3$, $\tau = 1$ en orden temporal.

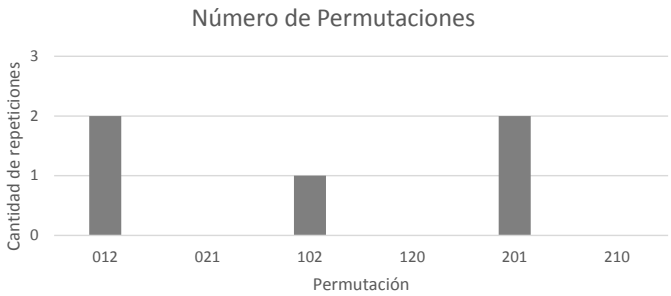


Figura 3: **Número de Premutaciones**: La siguiente figura muestra la cantidad de veces que se repiten los distintos tipos de permutaciones π temporales para la *dimensión de embedding* $d = 3$. La serie de tiempo fue tomada del trabajo de Bandt y Pompe [1].

3.2.2 Permutación por Comparación

Este mapeo plantea transformar los *vectores de embedding* en una sucesión de d elementos que se obtiene comparado todos los valores del mismo vector.

$$X_t^d \to \left(\sum_{k=t}^{t+d-1} 1_{C_0} \quad \sum_{k=t}^{t+d-1} 1_{C_1} \quad \dots \quad \sum_{k=t}^{t+d-1} 1_{C_i} \quad \dots \right)$$

$$C_i := (x_k < x_{t+i}) \ , \ \forall i < (d-1)$$

Siguendo con el ejemplo propuesto en el paper de Bandt y Pompe:

$$X_0^3 = (4, 7, 9),\ X_1^3 = (7, 9, 10) \text{ mapeado a } \pi = 012$$

$$X_3^3 = (10, 6, 11) \text{ a } \pi = 102$$

$$X_2^3 = (9, 10, 6) \ , \ X_4^3 = (6, 11, 3) \text{ a } \pi = 120$$

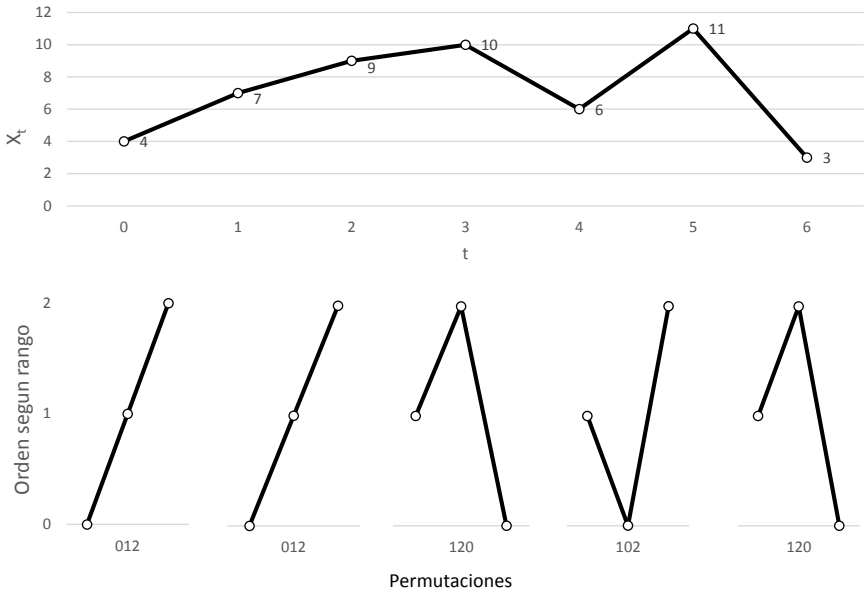


Figura 4: **Mapeo por Compración**: La figura de arriba muestra los valores que toma la serie X_t. Las figuras de abajo muestran el mapeo de los diferentes X_t^d para $d = 3$ por comparación.

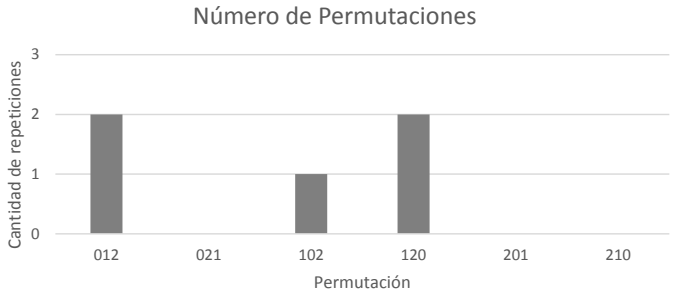


Figura 5: **Número de Premutaciones**: La siguiente figura muestra la cantidad de veces que se repiten los distintos tipos de permutaciones π para la *dimensión de embedding* $d = 3$. La serie de tiempo fue tomada del trabajo de Bandt y Pompe [1].

Tercera Etapa : Función de Probabilidad

Bandt y Pompe definen para una serie de tiempo $\{x_t\}_{t=1...T}$ una Función de Probabilidad para cada $i \in \ I \subseteq \{1, 2, \ldots, d!\}$ con

$$1_i(X_t^{(d,\tau)}) := \begin{cases} 1 & \Pi\left(\Omega\left(X_t^{(d,\tau)}\right)\right) = i \\ 0 & \Pi\left(\Omega\left(X_t^{(d,\tau)}\right)\right) \neq i \end{cases}$$

$$P(\Pi = i)^{(d,\tau)} = \frac{\sum_{X_t^{(d,\tau)}} 1_i(X_t^{(d,\tau)})}{T - (d-1)\tau}$$

Reexpresando la ecuación anterior utilizando la notación de Bandt y Pompe, con # como cardinalidad:

$$p(\pi_i)^{(d,\tau)} = \frac{\#\{X_t^{(d,\tau)} \mid X_t^{(d,\tau)} \; tiene \; tipo \; \pi_i\}}{T-(d-1)\tau}$$

Cuarta Parte: Entropía de Permutación

Utilizando la Función de Probabilidad del punto anterior se procederá a definir la Entropía de Permutación utilizando la fórmula de Shannon [16]:

$$H(P) = -\sum_{i \in I} p_i \; log(p_i)$$

Para restringir la imagen del operador entre 0 y 1, se normaliza la Entropía de Permutación con el $log(d!)$.

$$H_S(P) = \frac{H(P)}{log(d!)}$$

3.3 Consideraciones en el Caso de Igualdades

A pesar de la simplicidad y facilidad de implementación de los métodos expuestos en las secciones anteriores la presencia de valores iguales puede traer inconvenientes.

Bandt y Pompe [1] proponen romper esas igualdades introduciendo pequeñas perturbaciones aleatorias, otros autores proponen un ranking de los valores iguales de acuerdo con el orden temporal. Se demostró empíricamente [44] que si estas igualdades se presentan de manera significativa se puede correr el riesgo de introducir sesgo, y que el ranking de igualdades según el orden introduce correlaciones temporales que pueden potencialmente brindar conclusiones erróneas. Sin embargo, desde otras áreas [45] se sostiene que los valores idénticos no dañan la capacidad de segmentación de la entropía de permutación. En el presente trabajo se utilizó el algoritmo *quicksort* que no tiene en consideración el orden temporal para ordenar los valores iguales, sino que les asigna una posición aleatoria dentro de este subconjunto de valores iguales. El código a utilizar permite la implementación de otros algoritmos como el *mergesort* que preserven el orden temporal de los valores en el caso de igualdades.

3.4 Entropía de Permutación Ponderada

La definición clásica de la Entropía de Permutación tiene ciertos inconvenientes relacionados con la pérdida de algunas facetas de la serie de tiempo. En primer lugar, la Entropía de Permutación retiene únicamente la información referida las relaciones ordinales entre los elementos de la serie por lo que se pierde completamente la información referida a la amplitud de la serie.

Varios de los patrones ordinales creados con esta metodología pueden estar causados por pequeñas fluctuaciones en la serie de tiempo por los efectos del ruido o problemas en la medición, por lo que intuitivamente tendrían que tener una ponderación muchísimo menor. Además, los patrones ordinales con grandes diferencias entre las amplitudes de sus puntos tienen exactamente la misma ponderación que cualquier otro patrón.

Para contrarrestar estos hechos *Fadlallah et al.* [46] proponen la utilización de la Entropía de Permutación Ponderada. Para definir esta entropía se requiere de ciertos pasos previos que incorporan información referida a la amplitud de los valores de la serie de tiempo. En primer lugar, se requiere computar la media aritmética de cada uno de los *vectores de embedding*.

Definición 3.4.1. *Media Aritmética de la Permutacíon Ponderada*

$$\hat{X}_j^{(d,\tau)} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} x_{j+(k+1)\tau}$$

Se expresa el ponderador como una Varianza, utilizando los elementos del *vector de embedding* para el cálculo de este estadístico.

Definición 3.4.2. *Ponderador de la Permutacíon Ponderada*

$$w_j = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(x_{j+(k+1)\tau} - \hat{X}_j^{(d,\tau)}\right)^2$$

Utilizando estos ponderadores se obtiene una Función de Probabilidad de Masa para nuestra serie de tiempo. Cabe destacar que cuando $w_j = \beta \quad \forall j \leq N$, $\beta > 0$ se obtiene la Función de Probabilidad clásica.

Definición 3.4.3. *Función de Probabilidad de Masa de la Permutación Ponderada*

$$p_w\left(\pi_i^{(d,\tau)}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{N} 1_{u:tipo(u)=\pi_i}\left(X_j^{(d,\tau)}\right) w_j}{\sum_{j=1}^{N} 1_{u:tipo(u)=\Pi}\left(X_j^{(d,\tau)}\right) w_j}$$

El último paso es aplicarle a esta Función de Probabilidad la Entropía de Shannon u otro operador relacionado.

3.5 Entropía a Escalas Múltiples Mejorada

En una serie de tiempo la escala temporal es una de las facetas fundamentales a tener en cuenta si se desea encontrar cualquier tipo de patrón o característica. Tomando como ejemplo una serie basada en una conversación entre dos personas, una escala temporal basada en la longitud de una palabra puede aportar datos totalmente diferentes a los que se pueden obtener con una escala que contenga las diferentes letras individualmente. Observando las series de tiempo en diferentes

resoluciones obtenemos una perspectiva completamente nueva del fenómeno que se desea analizar. El principio de Cambio de Escala se basa en reducir la muestra original de nuestra serie con el objeto de obtener patrones y características que previamente permanecían ocultas. En el área de la biología, Costa *et al.* proponen escalas múltiples para series de tiempo fisiológicas como el intervalo entre latidos del corazón [47], estudios sobre la marcha en humanos [48] y en el análisis de las secuencias de ADN [49]. En el ámbito de las finanzas se utilizó el cambio de escalas para el estudio de índices bursátiles como el Dow Jones [50] y el HSI de Hong Kong [51].

Definición 3.5.1. *Cambio de Escala*

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ serie de tiempo con N muestras y t el factor de escala temporal definimos el Cambio de Escala como:

$$y_j = \frac{1}{t} \sum_{i=(j-1)t+1}^{jt} x_i \quad , \ 1 \leq j \leq \lfloor N/t \rfloor$$

Con $t = 1$ se conserva nuestra serie original, $t = 2$ toma la media aritmética entre dos puntos consecutivos, $t = 3$ la misma media pero entre tres puntos y así sucesivamente.

Si bien este cambio de escala permite un análisis en agrupaciones temporales mayores y muy diversas, esta metodología trae consigo algunos inconvenientes. Evidentemente este proceso disminuye el número de elementos de nuestra muestra a $\lfloor N/t \rfloor$, lo que puede traer consigo la pérdida de gran cantidad de información para valores de t altos. Por otro lado, la elección de t rompe con el orden temporal y la relación entre los valores dentro de la serie ya que dependiendo de cuando comience la misma se separan ciertos valores consecutivos en grupos diferentes para calcular la media. Azami et al. [52] proponen una mejora a esta metodología por medio de la generación de nuevas series basadas en la original, el cálculo de la entropía de permutación para cada una de ellas y un posterior promedio de los resultados.

Definición 3.5.2. *Escalas Múltiples Mejoradas*

$$y_j^{k,t} = \frac{1}{t} \sum_{i=(j-1)t+k}^{jt+k-1} x_i \qquad 1 \leq j \leq \lfloor N/t \rfloor, \, 1 \leq k \leq t$$

$$z^{k,t} = \{y_1^{k,t}, y_2^{k,t}, ..., y_{\lfloor N/t \rfloor}^{k,t}, \}$$

Definición 3.5.3. *Entropía de Permutación con Escalas Múltiples Mejoradas*

$$IMPE\,(x, t, d) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} H\left(z^{k,t}\right)$$

3.6 Entropía de Permutación Dependiente del Tiempo

Frecuentemente los procesos estocásticos que modelan fenómenos de la vida real tienen cambios trascendentales, muchas veces abruptos, que modifican completamente sus características y particularidades. La entropía, al ser una medida de incertidumbre puede ser una de estas características cambiantes a lo largo del tiempo, por lo que es importante evaluar qué cambio sufre a lo largo del tiempo.

La Entropía Dependiente del Tiempo fue utilizada en el ámbito de las finanzas para analizar la estabilidad en variaciones diarias de los tipos de cambio mundiales [53], y en el ámbito de la medicina para el estudio de electrocardiogramas en pacientes que sufrieron un paro cardíaco [54] y pacientes que sufrieron una isquemia cerebral [55].

Definición 3.6.1. *Serie Dependiente del Tiempo*

Sea $X = x_1, x_2, ..., x_T$ serie de tiempo con T elementos, $w \leq T$ el tamaño de la ventana y $\Delta \leq w$ el tamaño del paso. Definimos nuestra serie de tiempo X_s con ventana w y paso Δ como:

$$X_s = x_{1+s\Delta}, x_{2+s\Delta}, ..., x_{w+s\Delta} \qquad s = 0, 1, 2, ..., \left\lfloor \frac{T-w}{\Delta} \right\rfloor$$

Posteriormente, se utiliza esta serie X_s para el cálculo de la entropía $\forall s \ = 0, 1, 2, ..., \left\lfloor \frac{T-w}{\Delta} \right\rfloor$.

4 Capítulo 4: Entropía de Permutación aplicada a Series de Residuos.

4.1 Indroducción

En este capítulo se presentaran tres tipos de regresiones, la primera una Regresión Simple, la segunda una regression con una Regularización de Tikhonov y la tercera con una Regularizacion $l1$, penalizando la diferencia entre Vector de Antecendentes y el Vector Objetivo.

En los últimos años el mercado de retailiers online viene experimentando un crecimiento sin precedentes. Empresas como Amazon o Alibaba se posicionaron entre las empresas más grandes del mundo, Amazon alcanzando el primer lugar en el mundo en capitalización bursátil. Este auge en el sector del e-commerce viene acompañado por un gran incremento en la demanda de modelos que puedan medir el efecto de las campañas de medios en estos retailers, explicar el porqué de los cambios en las ventas online.

El modelo que se presentará es un modelo multiplicativo que se linearizará aplicando logaritmos. La variable dependiente son las ventas a nivel nación, semana, marca; mientras que las variables independientes se agruparan en dos conjuntos: Núcleo y Medios.

$$Ventas_{na,se,ma} = Nucleo_{na,se,ma} * Medios_{na,se,ma}$$

$$na, se, ma = nacional, semana, marca$$

El núcleo contiene al intercepto (ordenada al origen) del modelo, nuestra variable de precio y otras variables como la estacionalidad de la marca. Existen diversas maneras de modelar la estacionalidad ya sea por medio de series trigonométricas y desarrollos de Fourier, utilizando variables binarias por semana o utilizando regresiones auxiliares.

Núcleo:

Sea β el coeficiente de cada variable que estima la regresión.

$$Nuecleo_{na,se,ma} = Intercepto_{na,se,ma} * Precio^{\beta}_{na,se,ma} * \beta^{Estacionalidad}_{na,se,ma}$$

Medios:

Los eventos de medios ingresan al modelo en forma de GRPS (gross rating points), medida que obtiene al dividir las impresiones o clicks por la población objetivo, por ende, cuantifica las impresiones como un porcentaje de la población que puede recibir el mensaje. Posteriormente se saturan estos GRPS de acuerdo a la Distribución de Weibull, utilizando tres parámetros: la vida media, eficacia y penetración.

Para capturar el efecto en el tiempo que provocan las campañas de medios en la población se utiliza un decrecimiento exponencial de los GRPS por medio del parámetro de la vida media. La letra e denota los distintos eventos de medios que contiene el modelo.

$$Adstock_{na,se,e} = GRPS_{na,se,e} + Adstock_{na,se-1,e} * 0.5^{1/VidaMedia_e}$$

La penetración indica el porcentaje total de consumidores que pueden ver los eventos de medios, mientras que la eficacia denota la cantidad de veces que se necesita ver un anuncio para entender el mensaje. Utilizando la penetración y la eficacia se estima la *escala* y la *forma* por medio de estimadores de máxima verosimilitud o métodos de mínimos cuadrados.

$$Alcance_{na,se,ma} = Pen_e \left(1 - e^{-(Adstock_{na,se,e}/Escala_e)^{Forma_e}}\right)$$

$$Medios_{na,se,ma} = \prod_{e=1}^{E} \beta^{Alcance_{na,se,ma}}$$

4.2 Modelos

Se presentaran tres modelos , dos de los cuales estan penalizados por la norma de una transformación lineal de la diferencia entre el Vector de Antecedentes y el coeficiente.

4.2.1 Modelo 1: Regresión Simple

$$arg\min_x \left(\|Ax - b\|_2^2\right)$$

Teorema 4.2.1. *Existencia y unicidad de la solución Mínimos Cuadrados.*

Demostración:

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ espacio vectorial de matrices de m por n, con columnas linealmente independientes y $b \in \mathbb{R}^m$. La Regresión Simple tiene solución única $\hat{x} = A^{\dagger}b = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$.

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2 \qquad \nabla f(\hat{x}) = 2A^T\left(A\hat{x} - b\right)$$

$$\nabla f(\hat{x}) = 0 \iff A^TA\hat{x} - A^Tb = 0 \iff A^TA\hat{x} = A^Tb$$

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|Ax - A\hat{x} + A\hat{x} - b\|_2^2 =$$

$$\|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + \|A\hat{x} - b\|_2^2 + 2\left(Ax - A\hat{x}\right)^T \left(A\hat{x} - b\right)$$

$$\left(Ax - A\hat{x}\right)^T \left(A\hat{x} - b\right) = \left(A(x - \hat{x})\right)^T \left(A\hat{x} - b\right) = (x - \hat{x})^T A^T \left(A\hat{x} - b\right)$$

$$= (x - \hat{x})^T \left(A^T A\hat{x} - A^T b\right) = (x - \hat{x})^T 0 = 0$$

Donde se desprende que $\|Ax - b\|_2^2 = \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + \|A\hat{x} - b\|_2^2$

Por ende: $\|A\hat{x} - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2$

Si $\|A\hat{x} - b\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2$ entonces $\|Ax - A\hat{x}\|_2^2 = 0 \iff A(x - \hat{x}) = 0$

Como las columnas de A son linealmente independientes el nucleo de A consiste unicamente por el vector 0 entonces $x - \hat{x} = 0 \iff x = \hat{x}$.

El Análisis Convexo se permite garantizar que los mínimos locales sean mínimos globales y, bajo la condición de Convexidad Estricta, que estos mínimos locales sean únicos.

La condicion de segundo orden para la Convexidad (Teorema 1.1.13) son una opción para garantizar que funciónes C^2, si el Hessiano de nuestra función está definido positivo, sean Estrictamente Convexas.

Teorema 4.2.2. *Condiciones para la Convexidad Estricta*

Dado $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$, con el Hessiano $\nabla^2 f(x) = 2A^T A$, Si $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$, con las columnas de A linealmente independientes: $\Rightarrow x^T A^T Ax > 0$

Demostración:

$$x^T A^T Ax = (Ax)^T Ax = \|Ax\|_2^2$$

Si las columnas de A son linealmente independientes $Ax \neq 0$ si $x \neq 0$

Teorema 4.2.3. *Sea V espacio vectorial, $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ norma. $\|.\|_2^2$ es Estrictamente Convexa.*

Demostración:

Sea $x \neq y, \in V \wedge \theta \in (0, 1)$

$$\lambda \|x\|_2^2 + (1 - \theta)\|y\|_2^2 - \|\theta x + (1 - \theta)y\|_2^2$$

$$= \theta^2 \|x\|_2^2 + (1 - \theta)\|y\|_2^2 - \theta^2 \|x\|_2^2 - 2\theta(1 - \theta)\langle x, y\rangle - (1 - \theta)^2 \|y\|_2^2$$

$$= \theta(1-\theta)\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\langle x, y\rangle\right)$$

$$= \lambda(1-\lambda)\|x-y\|_2^2 > 0$$

Teorema 4.2.4. *Composición de Función Estrictamente Convexa con Función Afín g es Estrictamente Convexa si g en inyectiva.*

Demostración:

Sea $v \neq w$, $\theta \in (0,1)$. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in R^{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^m$ $m \geq n$

$$(f \circ g)(\theta v + (1-\theta)w) = f\left(g(\theta v + (1-\theta)w)\right) = f\left(\theta(Av+b) + (1-\theta)(Aw+b)\right)$$

$$Av + b \neq Aw + b \iff Av \neq Aw, \text{ si el } rango(A) = n.$$

Dado que $Av + b \neq Aw + b$ de la definición de Convexidad Estricta:

$$f\left(\theta(Av+b) + (1-\theta)(Aw+b)\right) < \theta f(Av+b) + (1-\theta)f(Aw+b)$$

$$= \theta f(g(v)) + (1-\theta)f(g(w))$$

Teorema 4.2.5. *Mínimos Locales son Mínimos Globales*

Sea f Función Convexa , Y entorno abierto de x_0 : $\forall y \in Y$ $f(x_0) \leq f(y)$ es Mínimo Local. Para algun $\theta \in (0,1)$.

Demostración:

$$y = \theta x_0 + (1-\theta)x,\ y \in Y, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ u otro dominio Convexo.}$$

$$f(y) \leq \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x)$$

Por ser $f(x_0)$ Mínimo Local:

$$f(y) \leq \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x) \leq \theta f(y) + (1-\theta)f(x)$$

$$f(y) \leq \theta f(y) + (1-\theta)f(x)$$

$$f(x_0) \leq f(y) \leq f(x) \implies f(x_0) \leq f(x)$$

Si f es Estrictamente Convexa $f(x_0) < f(x)$

4.2.2 Modelo 2: Regresión con Regularización de Tikhonov

El concepto de Vector de Antecedentes x_a nace con el objeto de ajustar los valores de una regresión a otros resultados obtenidos en modelos anteriores o en la experiencia empírica.

Definiendo a $\lambda \in \mathbb{R}^+$ como el peso que le otorgamos en la optimizacion a la distancia entre nuesto Vector de Antecedentes y el Vector Objetivo al pasar por la transformacion representada por la matriz $P \in R^{m\times n}$. El segundo modelo esta regularizado por la norma euclídea de una transformación lineal de la diferencia entre estos dos vectores, se denomina Regularización de Tikhonov:

$$arg\min_x \left(\|Ax-b\|_2^2 + \lambda \|P\,(x-x_a)\|_2^2 \right)$$

Teorema 4.2.6. *Existencia y unicidad de la solución para la Regresión con Regularización de Tikhonov.*

$$f(x) = \|Ax-b\|_2^2 + \lambda \|P\,(x-x_a)\|_2^2 \quad \nabla f(\hat{x}) = 0 \iff 2A^TA\hat{x} - 2A^Tb + 2\lambda P^TP(\hat{x}-x_a) = 0$$

$$\left(2A^TA + 2\lambda P^TP\right)\hat{x} = 2A^Tb + 2\lambda PP^Tx_a$$

Dado que A^TA y P^TP son matrices de Gram por el Teorema 1.1.10 son Definidas Positivas o Semidefinidas Positivas. Por los Teoremas 1.1.11 y 1.1.12 si A o P tienen columnas linealmente independientes entonces:

$$\left(2A^TA + 2\lambda P^TP\right) \text{ es invertible.}$$

$$\hat{x} = \left(2A^TA + 2\lambda P^TP\right)^{-1}\left(2A^Tb + 2\lambda PP^Tx_0\right)$$

Además el Hessiano de f, $\nabla^2 f(x) = 2A^TA + 2\lambda P^TP \succ 0$ por lo que los Teoremas 1.1.13, 1.1.16 aseguran el Mínimo Global en $\hat{x}$.

4.2.3 Modelo 3: Regresión con Regularización l1

El tercer modelo regulariza una transformación lineal de diferencia entre el Vector de Antecedentes y el Vector Objetivo utilizando la norma $l1$.

$$arg\min_x \left(\|Ax-b\|_2^2 + \lambda \|P\,(x-x_a)\|_1 \right)$$

Para garantizar la Convexidad Estricta de el **Modelo 3**, por el Teorema 1.1.8 se requiere que las columnas de A sean linealmente independientes.

Teorema 4.2.7. *Sea V espacio vectorial, $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ norma. $\|.\|$ es Convexa.*

Demostración:

Por la desigualdad triangular y la escalabilidad de la norma:

$$\forall v, w \in V \ , \theta \in [0,1] \ \ \|\theta v + (1-\theta)w\| \leq \|\theta v\| + \|(1-\theta)w\| = \theta \|v\| + (1-\theta) \|w\|$$

Teorema 4.2.8. *Composición de Función Convexa con Función Afín es Convexa*

Demostración:

Sea f Convexa, g Afín:

$$(f \circ g)(\theta v + (1-\theta)w) = f\left(g(\theta v + (1-\theta)w)\right) = f\left(\theta Av + (1-\theta)Aw + b\right)$$

$$= f\left(\theta(Av+b) + (1-\theta)(Aw+b)\right) = f\left(\theta g(v) + (1-\theta)g(w)\right)$$

f esta bien definida por el Teorema 1.1. Además, por la Convexidad de f:

$$\leq \theta f\left(g(v)\right) + (1-\theta) f\left(g(w)\right)$$

Teorema 4.2.9. *Convexidad Estricta del Modelo 3*

Sea A matrix $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ con columnas linealmente independientes. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Sea $\|Ax - b\|_2^2$ el primer término del **Modelo 3** y $\lambda \left\|P\left(x - x_a\right)\right\|_1$ el segundo término del mismo modelo.

Demostración:

Por el Teorema 4.2.1 se desprende que el primer término del **Modelo 3** es Estrictamente Convexo. También se pueden utilizar los Teoremas 4.2.3 y 4.2.4 demostrando la inyectividad de $Ax - b$. De los Teoremas 4.2.7 y 4.2.8 se desprende que el segundo término del **Modelo 3** es Convexo. Sumando estos términos, por el Teorema 1.1.8 obtenemos el resultado deseado.

4.3 Series y Metodología

Se considerarán modelos aplicados a dos marcas distintas pertenecientes a empresas de consumo masivo, ambos de 104 semanas siendo los modelos pertenecientes a la segunda marca de mayor complejidad, con más variables y mayor cantidad de valores de antecedentes. Todos los residuos que se computen en estos modelos son previos a su transformación inversa y cualquier tipo de transformación para eliminar el sesgo de linealizar el modelo. Toda la información para la creación de las regresiones fue provista por Nielsen Holdings. Las variables utilizadas y los resultados obtenidos se detallan en el Anexo A.

Definimos el Residuo como la diferencia entre las ventas reales b y las ventas estimadas b_e por los distintos modelos.

Definición 4.3.1. *Residuo*

$$Residuo = b - b_e$$

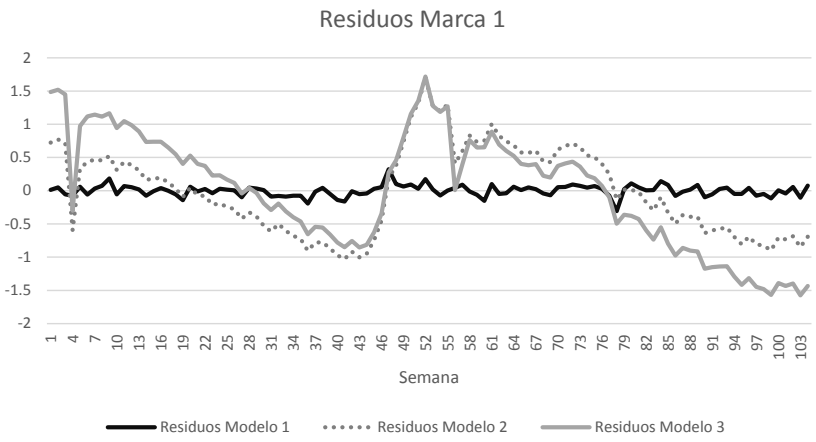


Figura 6: Residuos de los diferentes modelos para la **Marca 1**

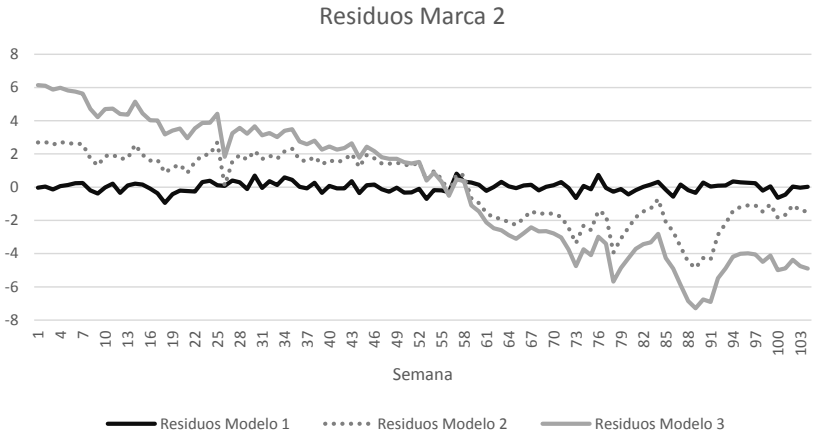


Figura 7: Residuos de los diferentes modelos para la **Marca 2**

Las optimizaciones se resolverán utilizando los paquetes de optimización Convexa de Matlab CVX [56] [57] y FOM [58]. Para el calculo de las medidas de complejidad se utilizara el paquete de Matlab TOCSY [59], el paquete de python Pyentrp [60] y códigos de creación propia.

Si bien no existe un criterio universal para la elección de los pesos del modelo, a mayor peso mayor será la importancia relativa del $Vector\ de\ Antecedentes$. Utilizaremos para el **Modelo 2** (M2) un peso de 64, mientras que para el **Modelo 3** (M3) un peso de 999. Se utiliza una matriz P diagonal con unos y ceros en la diagonal principal con el objeto de eliminar del segundo término todos los coeficientes que no tengan antecedentes.

Para crear la Función de Probabilidad de Bandt y Pompe se utiliza la Permutación por Orden Temporal, con *dimensión de embedding* $d = 4$ y $d = 5$ con *embedding delay* de $\tau = 1$, $\tau = 2$. Estos

parámetros son comúnmente utilizados en los artículos que aplican la Entropía de Permutación y en los modelos a utilizar capturan un intervalo temporal de aproximadamente un mes.

La Entropía de Permutación y la Entropía de Permutación Ponderada son las referencias de base para el presente trabajo siempre utilizando la metodología de Bandt y Pompe para el cálculo de la Función de Probabilidad de Masa. Además, se optó por la Entropía de Rényi con $\alpha = 2$ comúnmente denominada Entropía de Colisión, la Entropía de Tsallis con $q = 0.5$ y finalmente la Min-Entropy.

4.4 Resultados del Análisis Estático de los Residuos.

4.4.1 Análisis de la Metodología de Bandt y Pompe

La primera etapa para detección de diferencias entre modelos pertenecientes a familia de mínimos cuadrados, causadas por la inclusión y el peso de los antecedentes, es la elaboración de nuestra Función de Probabilidad. El análisis de la estructura temporal de nuestras series de Residuos por medio de la metodología de Brandt y Pompe es una herramienta potente para cuantificar cambios causados en ciertas semanas por la inclusión de antecedentes.

Los histogramas de las Figuras 8 y 9 muestran la Distribución de Probabilidad de los diferentes modelos. A simple vista se puede observar como la inclusión de antecedentes cambia dramáticamente la estructura temporal, hay una ruptura de los patrones semanales de nuestra serie de tiempo que generan divergencias en nuestras Funciones de Probabilidad.

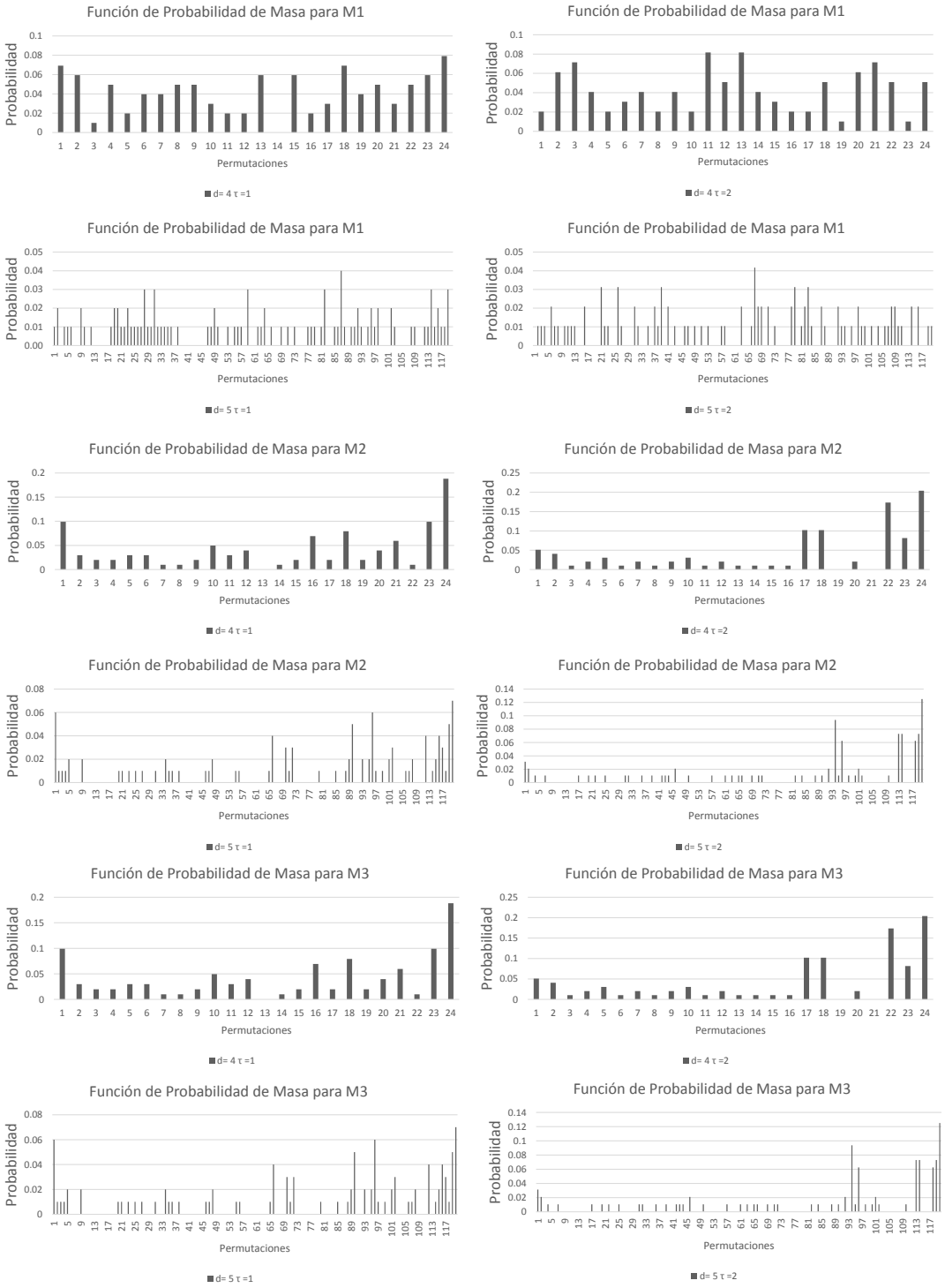


Figura 8: Funciones de Probabilidad de Masa de los distintos modelos para la **Marca 1.**

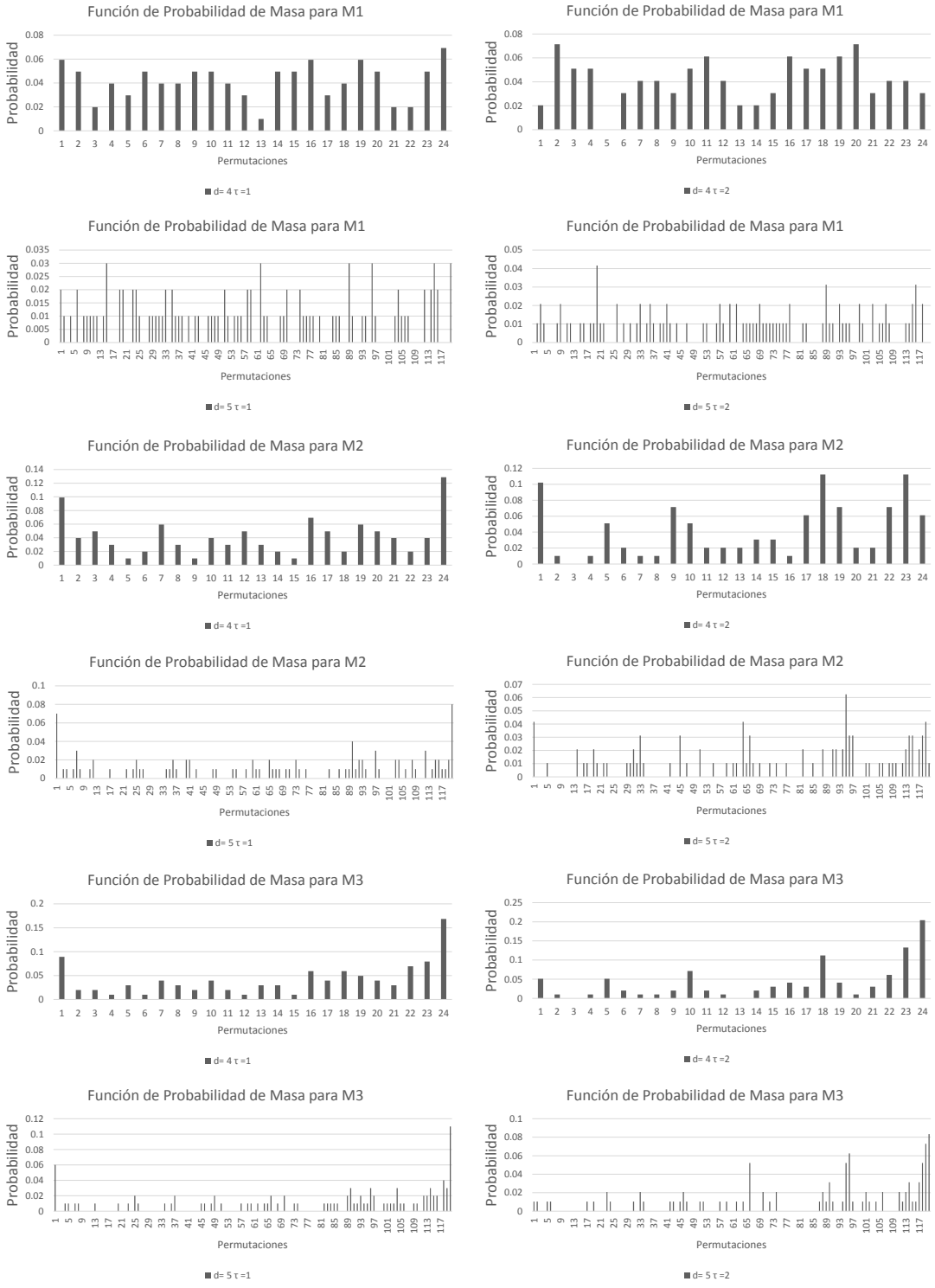


Figura 9: Funciones de Probabilidad de Masa de los distintos modelos para la **Marca 2.**

4.4.2 Entropía

Con el objeto de cuantificar en nivel de incertidumbre y aleatoriedad en las series de Residuos se presentarán diversas entropías que utilizarán la Función de Probabilidad propuesta en la sección anterior.

4.4.2.1 Marca 1

El análisis de la **Marca 1** con los operadores de entropía desnuda ciertas deficiencias que poseen estos mismos para la clasificación de este tipo de series de tiempo. El cambio en la *dimensión de embedding* y el *embedding delay* genera variaciones significativas en los resultados, pero no se producen grandes inconsistencias en los valores relativos al variar los parámetros d y τ. Analizando los valores obtenidos para la Información de Fisher en las tablas siguientes, se puede ver que el operador sufre de algunas inconsistencias cuando se utiliza el parámetro $d = 5$ y $\tau = 2$ ya que el **Modelo 1** tiene valores superiores al **Modelo 3**.

Con esta metodología, la entropía del **Modelo 1** es siempre mayor a la del **Modelo 2** y al **Modelo 3**, caracterizando a al primero como un modelo con un mayor nivel de aleatoriedad e incertidumbre. Los resultados son coherentes con la característica del **Modelo 1** de no poseer un Vector de Antecedentes.

La comparación entre el **Modelo 2** y el **Modelo 3** no arroja resultados suficientemente consistentes para diferenciar ambos modelos por medio de la entropía.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	4.384400257	104 M3 minentropy	2.26589406
104 M2 Shannon	4.035046784	104 M1 Tsallis	7.343645046
104 M3 Shannon	3.840653126	104 M2 Tsallis	6.807407513
104 M1 Ponderada	4.228674315	104 M3 Tsallis	6.409552022
104 M2 Ponderada	2.991236351	104 M1 Fisher	0.105674109
104 M3 Ponderada	3.019252316	104 M2 Fisher	0.123340761
104 M1 Renyi	4.213628942	104 M3 Fisher	0.155926489
104 M2 Renyi	3.319133683	104 M1 Varianza	0.000854533
104 M3 Renyi	3.085302145	104 M2 Varianza	0.00627084
104 M1 minentropy	3.658211483	104 M3 Varianza	0.004908226
104 M2 minentropy	2.410283969		

Figura 10: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 1.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	4.387456213	104 M3 minentropy	1.485426827
104 M2 Shannon	3.701613848	104 M1 Tsallis	7.443106251
104 M3 Shannon	3.36295232	104 M2 Tsallis	6.186167414
104 M1 Ponderada	4.184507552	104 M3 Tsallis	5.62194391
104 M2 Ponderada	3.007175343	104 M1 Fisher	0.072449052
104 M3 Ponderada	3.236933989	104 M2 Fisher	0.221491933
104 M1 Renyi	4.146210635	104 M3 Fisher	0.210523304
104 M2 Renyi	2.95209154	104 M1 Varianza	0.000930645
104 M3 Renyi	2.176858673	104 M2 Varianza	0.007347532
104 M1 minentropy	3.614709844	104 M3 Varianza	0.004432673
104 M2 minentropy	2.292781749		

Figura 11: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 2.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	6.03856294	104 M3 minentropy	3.473931188
104 M2 Shannon	5.274757536	104 M1 Tsallis	14.67257352
104 M3 Shannon	4.95868857	104 M2 Tsallis	11.21744112
104 M1 Ponderada	5.69524349	104 M3 Tsallis	10.11423469
104 M2 Ponderada	3.776554308	104 M1 Fisher	0.33601963
104 M3 Ponderada	3.871789529	104 M2 Fisher	0.423990412
104 M1 Renyi	5.688489859	104 M3 Fisher	0.425577179
104 M2 Renyi	4.723876396	104 M1 Varianza	0.000141431
104 M3 Renyi	4.289762572	104 M2 Varianza	0.001263489
104 M1 minentropy	4.64385619	104 M3 Varianza	0.00082968
104 M2 minentropy	3.836501268		

Figura 12: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 1.

En la Figura 14 podemos comparar más claramente los diferentes operadores para los parámetros d y τ y ver los cambios en la estructura que provoca la modificación de los parámetros utilizados para crear la Función de Probabilidad. Se puede destacar la Entropía de Permutación por ser consistente al variar los parámetros y por estar alineado a la interpretación teórica de la entropía. Los otros operadores también distinguen correctamente las diferentes series y en línea general son invariantes frente al cambio de parámetros.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	5.878978777	104 M3 minentropy	1.941106311
104 M2 Shannon	4.769569106	104 M1 Tsallis	13.74125762
104 M3 Shannon	4.249686968	104 M2 Tsallis	9.775766823
104 M1 Ponderada	5.539472729	104 M3 Tsallis	8.236085404
104 M2 Ponderada	3.943008118	104 M1 Fisher	0.501213209
104 M3 Ponderada	4.140942348	104 M2 Fisher	0.522153139
104 M1 Renyi	5.584962501	104 M3 Fisher	0.495360421
104 M2 Renyi	3.893110354	104 M1 Varianza	0.000165498
104 M3 Renyi	2.847856032	104 M2 Varianza	0.000930932
104 M1 minentropy	4.584962501	104 M3 Varianza	0.000603085
104 M2 minentropy	3		

Figura 13: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 2.

4.4.2.2 Marca 2

Los operadores de entropía aplicados a la regresiónes de la **Marca 2** también presentan inconsistencias provocadas por cambios en la *dimensión de embedding* y el *vector de embedding*.

La Entropía de Permutación, la Entropía de Permutación Ponderada, la Minentropia, la Entropía de Rényi se destacan por ser consistentes a lo largo de todas la variaciones utilizadas. Con esta metodología, la entropía del **Modelo 1** es siempre mayor a la del **Modelo 2** y el **Modelo 3** , caracterizando a al primero como un modelo con un mayor nivel de aleatoriedad e incertidumbre. Los resultados son coherentes con la característica del **Modelo 1** de no poseer un Vector de Antecedentes.

Los valores de la Información de Fisher no son consistentes para clasificar los modelos según la existencia de antecedentes. Al aumentar dimensión del *vector embedding* y el *embedding delay* los valores relativos entre los modelos cambian significativamente. En teoría se espera que el **Modelo 1** tenga valores inferiores al resto de los modelos que contienen información previa, sin embargo, al aumentar el valor de estos parámetros se obtienen vectores con información perteneciente a un rango temporal mucho mayor. Muchas de las variables modeladas junto a sus respectivos antecedentes tienen un período de actividad acotado, por lo que al incrementar la dimensión del *vector embedding* y el *embedding delay* se corre el riesgo de perder la visión semanal y acotada de algunas variables. Esto podría significar una caída en la cantidad de información que aporta cada antecedente al modelo.

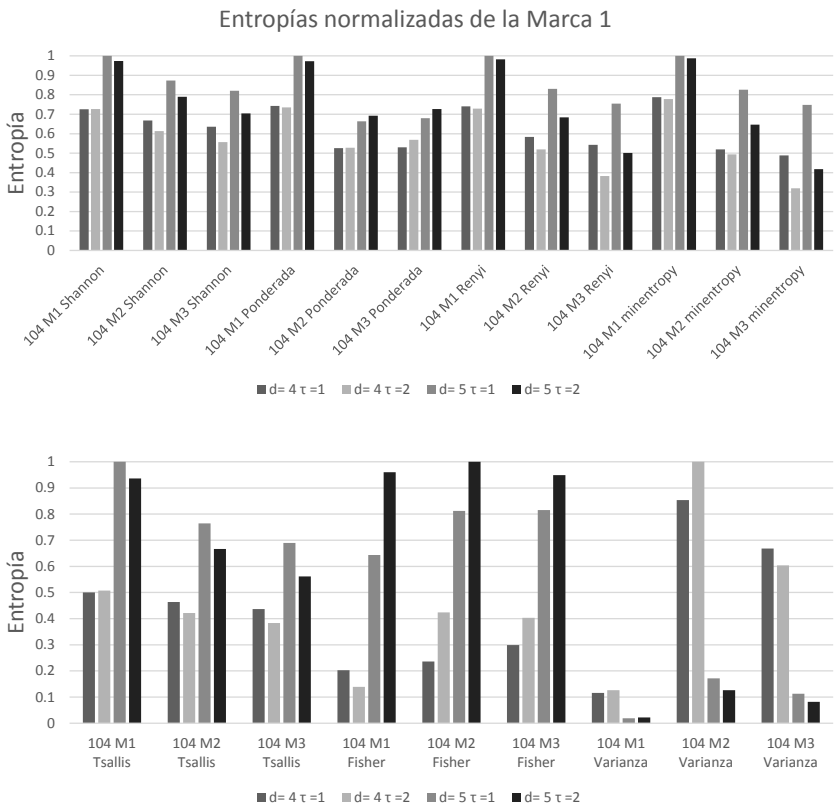


Figura 14: La siguiente figura compara los diversos modelos para cada tipo de medida, las Entropías de Permutación, la Entropía de Rényi con $\alpha = 2$, la Entropía de Tsallis con $q = 0.5$, la Min-Entropy, Información de Fisher y Varianza. Se normaliza por el valor máximo de cada medida.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	4.486700634	104 M3 minentropy	2.570748642
104 M2 Shannon	4.307180357	104 M1 Tsallis	7.616349354
104 M3 Shannon	4.202059941	104 M2 Tsallis	7.321884347
104 M1 Ponderada	4.406256301	104 M3 Tsallis	7.16418104
104 M2 Ponderada	3.728527336	104 M1 Fisher	0.030153944
104 M3 Ponderada	3.609985304	104 M2 Fisher	0.070950174
104 M1 Renyi	4.367816345	104 M3 Fisher	0.059817596
104 M2 Renyi	3.86231609	104 M1 Varianza	0.000368942
104 M3 Renyi	3.552809516	104 M2 Varianza	0.002659871
104 M1 minentropy	3.850856561	104 M3 Varianza	0.003535305
104 M2 minentropy	2.957771765		

Figura 15: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 1.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	4.434557458	104 M3 minentropy	2.292781749
104 M2 Shannon	4.124609478	104 M1 Tsallis	7.43951318
104 M3 Shannon	3.867329957	104 M2 Tsallis	6.900106498
104 M1 Ponderada	4.29570011	104 M3 Tsallis	6.447844253
104 M2 Ponderada	3.441039906	104 M1 Fisher	0.063248397
104 M3 Ponderada	3.40865681	104 M2 Fisher	0.106007181
104 M1 Renyi	4.296323561	104 M3 Fisher	0.106664876
104 M2 Renyi	3.712084677	104 M1 Varianza	0.00064949
104 M3 Renyi	3.112413288	104 M2 Varianza	0.003294737
104 M1 minentropy	3.807354922	104 M3 Varianza	0.003555676
104 M2 minentropy	3.155278225		

Figura 16: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 4 y *embedding delay* de 2.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	6.01856294	104 M3 minentropy	3.184424571
104 M2 Shannon	5.66469472	104 M1 Tsallis	14.48678708
104 M3 Shannon	5.550476587	104 M2 Tsallis	13.05954957
104 M1 Ponderada	5.746317667	104 M3 Tsallis	12.67938626
104 M2 Ponderada	4.675034391	104 M1 Fisher	0.409448952
104 M3 Ponderada	4.569020477	104 M2 Fisher	0.405048577
104 M1 Renyi	5.748470171	104 M3 Fisher	0.360798922
104 M2 Renyi	4.870872005	104 M1 Varianza	0.000128858
104 M3 Renyi	4.526758828	104 M2 Varianza	0.000508554
104 M1 minentropy	5.058893689	104 M3 Varianza	0.000635361
104 M2 minentropy	3.64385619		

Figura 17: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 1.

Modelos	Entropía	Modelos	Entropía
104 M1 Shannon	6.048402344	104 M3 minentropy	3.584962501
104 M2 Shannon	5.547995053	104 M1 Tsallis	14.63728791
104 M3 Shannon	5.248974549	104 M2 Tsallis	12.26057112
104 M1 Ponderada	5.710823047	104 M3 Tsallis	11.26197841
104 M2 Ponderada	4.814469148	104 M1 Fisher	0.391985047
104 M3 Ponderada	4.829941295	104 M2 Fisher	0.467136657
104 M1 Renyi	5.74874983	104 M3 Fisher	0.370260523
104 M2 Renyi	5.107864346	104 M1 Varianza	0.000130427
104 M3 Renyi	4.53858393	104 M2 Varianza	0.000353401
104 M1 minentropy	4.584962501	104 M3 Varianza	0.000338306
104 M2 minentropy	4		

Figura 18: **Comparación de Entropía**: La siguiente tabla compara las distintas medidas elegidas para la *dimensión de embedding* 5 y *embedding delay* de 2.

La **Marca 2** posee ciertas características comparables con la **Marca 1**. En la Figura 19 podemos comparar más claramente los diferentes operadores para los parámetros d y τ y ver los inconvenientes que poseen muchos de estos operadores para la caraterización de este tipo de series de tiempo. Tal como en el caso de la **Marca 1** la Entropía de Permutación es consistente al variar los parámetros y esta alineada a la interpretación teórica de la entropía.

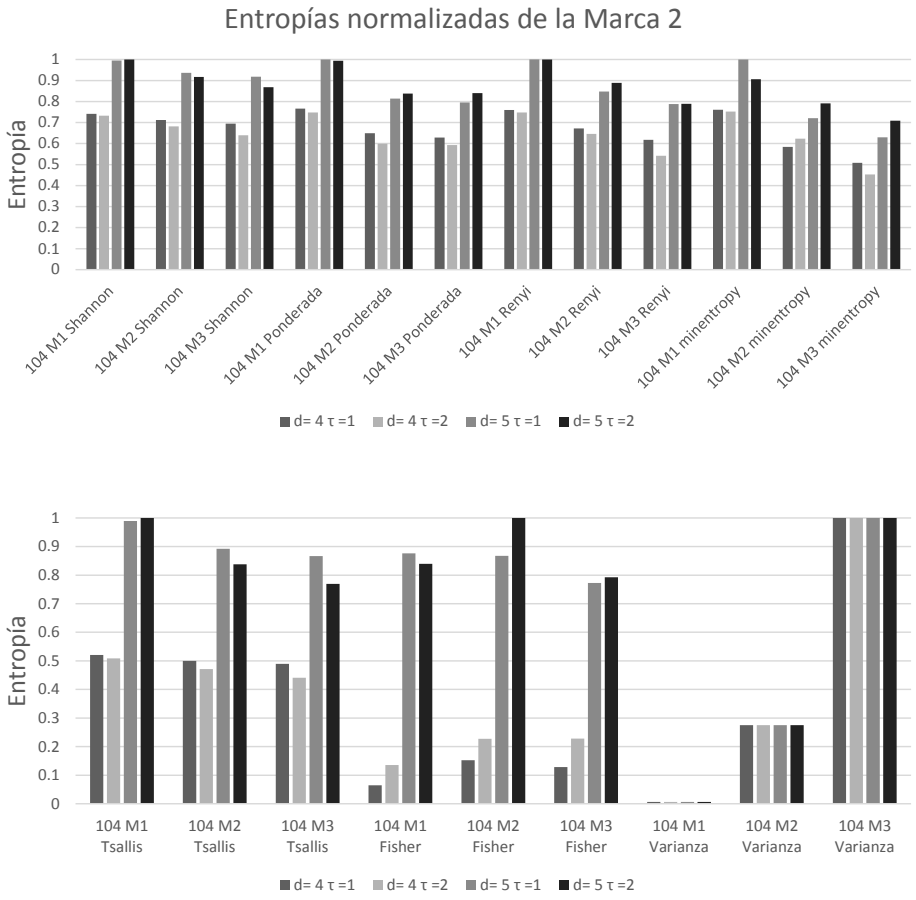


Figura 19: La siguiente figura compara los diversos modelos para cada tipo de medida, las Entropías de Permutación, la Entropía de Rényi con $\alpha = 2$, la Entropía de Tsallis con $q = 0.5$, la Min-Entropy, Información de Fisher y Varianza. Se normaliza por el valor máximo de cada medida.

4.4.3 Medidas de Complejidad

La Figura 20 es una representación gráfica de la Complejidad LMC utilizando la Entropía de Shannon normalizada con una *dimensión de embedding* $d = 4$. Con esta *dimensión de embedding* se caracteriza a las regresiones con regularizaciones con una complejidad significativamente superior al modelo sin antecedentes. El Plano de Complejidad muestra una clara distinción entre los modelos de la **Marca 1**, en especial utilizando el parámetro $\tau = 2$ que permite una distinción más precisa entre los modelos con Regularización $l1$ y Regularización de Tikhonov.

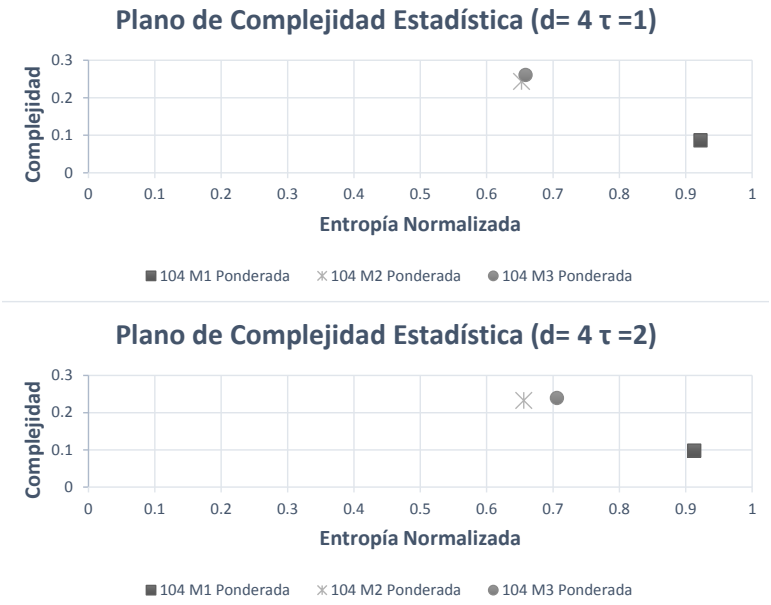


Figura 20: **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 1**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=4.

Al cambiar la *dimensión de embedding* a 5 se observan cambios significativos en el comportamiento de los distintos modelos. A pesar que para cada *dimension de embedding* la Divergencia de Jensen-Shannon del modelo sin regularizaciones es menor a el de los otros dos, el parámetro $\tau = 5$ reduce significativamente esta diferencia y esto genera un valor de complejidad superior. El aumento en la dimensión del *vector de embedding* genera vectores de mayor dimensión con información perteneciente a una mayor cantidad de semanas. Esto podría significar que una cantidad superior de variables y antecedentes impacten en cada *vector de embedding*, por lo que posiblemente se reduciría el efecto en la serie de cada antecedente en particular.

La Figura 21 muestra una clara distinción entre los modelos con regrularización y el modelo sin, este último se destaca por tener una complejidad y una entropía muy superior al resto.

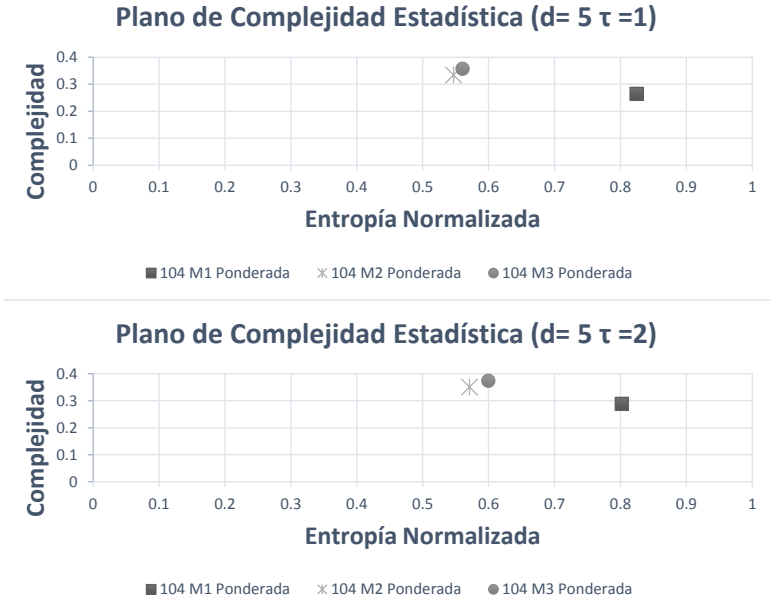


Figura 21: **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 1**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=5.

Los resultados obtenidos para la **Marca 2** muestras muchas similitudes con la **Marca 1**. En ambas marcas se observa una clara distinción entre los modelos con y sin antecedentes, con resultados consistentes al cambiar los parámetros de embedding y un comportamiento similar al utilizar la *dimensión de embedding* $d = 5$. Las Figuras 22 y 23 muestran notoriamente a los residuos de las regresiones con regularizaciones como series de mayor complejidad y menor entropía. A pesar de esto, el cambio en la *dimensión de embedding* tiene un efecto categórico en el valor de la complejidad de la serie. Con el parámetro $\tau = 4$ la complejidad de los modelos con regularización es aproximadamente el triple que la del **M1**, pero al cambiar a $\tau = 5$ la complejidad de los primeros solamente representa 1.3 veces la del **M1**.

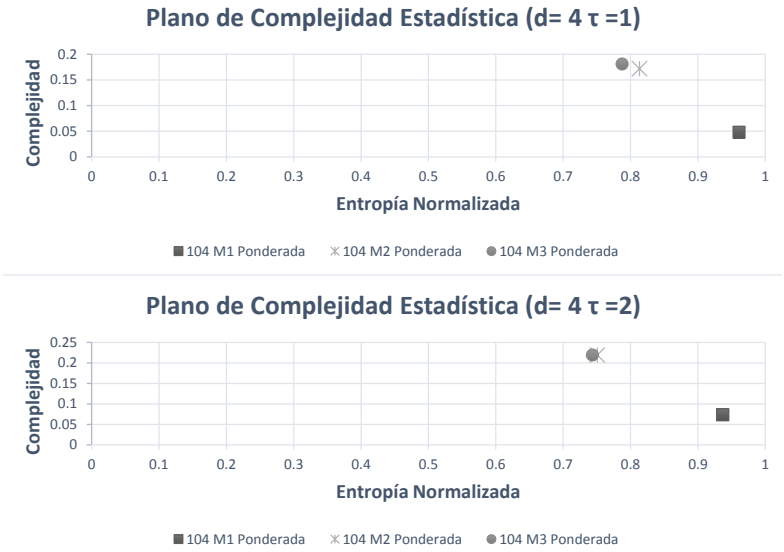


Figura 22: **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 2**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=5.

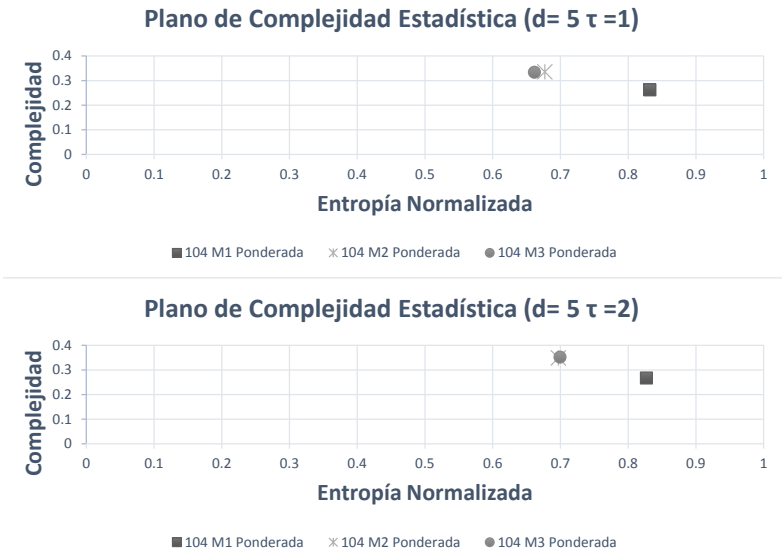


Figura 23: **Plano de Complejidad Estadística** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística para la **Marca 2**, utilizando la Entropía de Permutación Ponderada con una *dimensión de embedding* d=5.

Las Figuras 24, 25, 26 y 27 muestran la utilización de la Información de Fisher para medir la cantidad de información disponible en los residuos de los diferentes modelos y la medida de Complejidad de Cramer-Rao. En este aspecto podemos destacar el **Modelo 2** y el **Modelo 3** como los que poseen un mayor grado de información intrínseco en los residuos y un mayor grado de complejidad. Consistentemente con las métricas anteriores, el **Modelo 1** de 104 semanas se destaca por ser el de menor complejidad y por tener la menor cantidad de información propia. Podemos destacar la gran consistencia de la Complejidad de Cramer-Rao a lo largo de todos los parámetros y las dos marcas. En todas las configuraciones se logra diferenciar con claridad los diferentes modelos, y además se obtiene una clara diferenciación entre los modelos **M2** y **M3**.



Figura 24: **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 1**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=4.



Figura 25: **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 1**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=5.



Figura 26: **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 2**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=4.



Figura 27: **Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao** : La siguente figura muestra el Plano de Complejidad Estadística de Cramer-Rao para la **Marca 2**, utilizando la Información de Fisher con una *dimensión de embedding* d=5.

4.5 Resultados del Análisis Dinámico de los Residuos

Dada la dependencia temporal que poseen las variables y los antecedentes de los presentes modelos, la evolución temporal de la entropía y la complejidad pueden proporcionar información valiosa acerca del momento en donde impactan ciertos antecedentes de manera más significativa en el modelo. La Entropía de Permutación Dependiente del Tiempo permite analizar cambios en la estructura de nuestras series de residuos posibilitando la comparación del impacto que tienen ciertos antecedentes particulares en el modelo. Ya que el Análisis Dinámico es, temporalmente hablando, de carácter más acotado que el estático, posibilita la identificación de los antecedentes y las semanas donde la estructura del modelo sin antecedentes se rompe y el nivel de complejidad y entropía de la serie cambia.

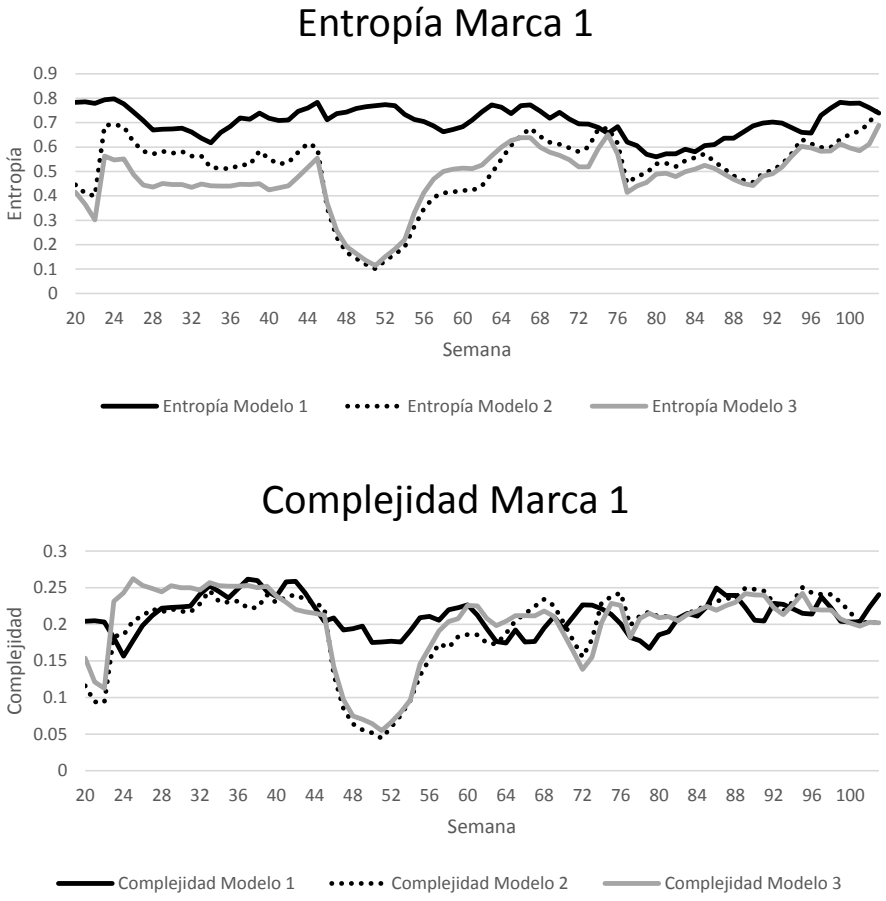


Figura 28: La siguente figura muestra la evolución de la Entropía de Permutación Ponderada y la Complejidad LMC para la **Marca 1**, con una ventana $w = 20$, paso $\Delta = 1$ y *dimensión de embedding.* $d = 4$.

El Análisis Dinámico de la entropía de la **Marca 1** en la Figura 28 destaca la aleatoriedad del **Modelo 1** por sobre los demas modelos en todas las ventanas temporales. Las series pertenecientes al **Modelo 2** y el **Modelo 3** presentan una importante disminución de la entropía en las primeras semanas, este comportamiento está acompañado por una disminución importante y un aumento similar de los residuos en un período temporal corto, como se puede observar en la Figura 6. Otra

disminución importante en la entropía se da entre las semanas 43 y 67. Durante este período los residuos se vuelven más negativos (ver Figura 6), aumentan drásticamente para luego caer de manera abrupta. La complejidad hereda gran parte del comportamiento de la entropía y ambas parecen ser muy sensibles a cambios abruptos y pronunciados en los residuos.

Las series pertencecientes a la **Marca 2** tambíen tienen un comportamiento similar al obtenido en Análisis Estático una vez que fijamos la variable temporal. Se observa en las Figura 29 una abrupta disminución en la entropía entre las semanas 60 y 80 que corresponde a una caida importante en el valor de los residuos con subidas abruptas, pero siempre con tendencia a la baja durante este período. La series de complejidad para la **Marca 2** tiene visualmente un comportamiento oscilatorio de mayor frequencia que la serie de la **Marca 1**, pero de menor amplitud. A pesar que los modelos con regularizaciones tienen picos más elevados y períodos con complejidad muy superior al **Modelo 1** no se vislumbra un claro patrón utilizando la ventana temporal de 20 dias.

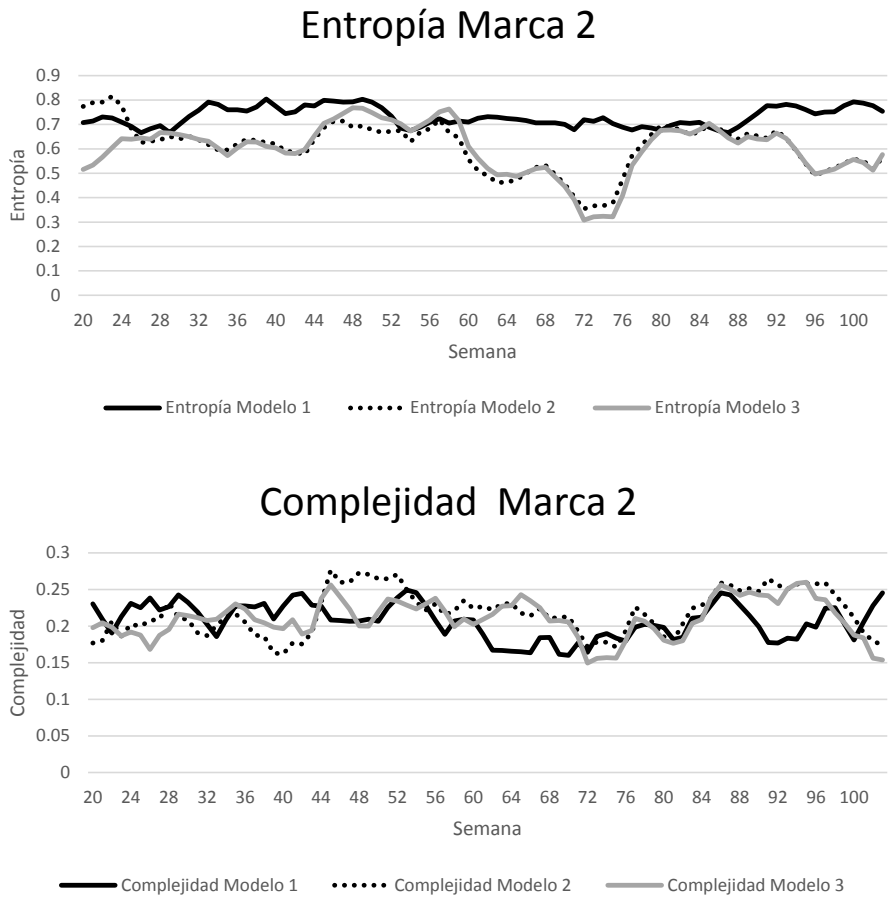


Figura 29: La siguente figura muestra la evolución de la Entropía de Permutación Ponderada y la la Complejidad LMC para la **Marca 2**, con una ventana $w = 20$, paso $\Delta = 1$ y *dimensión de embedding.* $d = 4$.

4.6 Conclusiones del Capítulo

La Teoría de la Información proporciona herramientas útiles para el análisis y la clasificación de series de tiempo ya sea de manera estática como dinámica. La gran mayoría de los operadores lograron discriminar las series de residuos devenidas de modelos con y sin regularizaciones de manera consistente, incluso cambiando parámetros específicos del operador. En prácticamente todos los casos se penalizó la introducción de antecedentes con una menor entropía y un mayor nivel de complejidad lo cual va de la mano con la interpretación teórica de estos operadores.

El Análisis Dinámico de las series de tiempo con las series de entropía y complejidad es consistente con el Análisis Estático de los modelos y permite detectar con claridad ciertas fases de gran turbulencia. A pesar de esto, las series de entropía tienen una interpretación visual mucho más clara que las de complejidad. Estas últimas se destacan por ser más ruidosas que las series de entropía ya que el operador en si incorpora una mayor cantidad de elementos e información.

Se desprende del Análisis Dinámico la necesidad de crear criterios estadísticos y metodológicos para la elección de los parámetros y para la búsqueda de la clasificación óptima de las series. Para un análisis más completo se necesita programar e implementar algoritmos como los expuestos en [61, 62] que permitan determinar la *dimension de embedding* mínima. Es necesario desarrollo de métodos de validación cruzada como, por ejemplo, el LOO (*leave one out*) [63] para poder comparar los distintos operadores utilizando parámetros diferentes. Por último, se destaca la obligación de desarrollar distintos modelos que permitan predecir los valores futuros de la serie original a partir de la evolución temporal de estos operadores.

5 Capítulo 5: Entropía de Permutación aplicada a Índices Bursátiles.

5.1 Introducción

Este capítulo se enfocará en el estudio del índice Merval y su correspondiente evolución en el tiempo comparándolas contra dos series de gran relevancia y comúnmente asociadas con el estado macroeconómico del país, el precio del dólar y el Riesgo País. Se utilizarán las medidas de entropía y complejidad para detectar y pronosticar períodos de gran incertidumbre y períodos de estabilidad.

Un índice bursátil de un conjunto de acciones es un número que busca reflejar el valor y los cambios en el valor de las acciones que lo componen. Generalmente se calcula realizando un promedio ponderado de las acciones que lo forman, con un factor de ponderación basado en el precio o el valor de la capitalización bursátil de las empresas pertinentes.

El Merval es el principal índice bursátil de Argentina. Este mide el valor en pesos de una canasta teórica de acciones, seleccionadas de acuerdo a criterios que ponderan su liquidez. El porcentaje de participación que cada acción tendrá en el índice está basado en el número de operaciones y el volumen efectivo operado durante los seis meses anteriores.

Entre las series de tiempo que brindan mayor información acerca de la volatilidad y turbulencia económica del país, el precio del dólar y el Riesgo País son dos de las más destacadas y de mayor reconocimiento entre el conjunto de la población. El Riesgo País es un indicador que elabora JP Morgan midiendo la diferencia entre la tasa interna de retorno de los bonos de Estados Unidos y la tasa interna de retorno de los bonos soberanos de otros países. Este índice cuantifica el riesgo inherente de las operaciones financieras por fuera de Estados Unidos. En Argentina, en las numerosas crisis económicas que sufrió el país se produjeron caídas importantes en la demanda de bonos soberanos, impactando al índice en cuestión negativamente y permitiendo que alcance valores muy elevados.

Se busca en el presente capítulo obtener una caracterización de los períodos de crisis e incertidumbre por medio de operadores de complejidad y entropía observando este fenómeno desde dos perspectivas diferentes: la tendencia y la turbulencia a corto plazo. Se teoriza que las series presentaran un amplio componente de tendencia, pero en corto plazo las series presentaran una gran turbulencia y aleatoriedad. Al disminuir la ventana para el cálculo para la entropía aumentará el ruido en la serie y se requerirá filtros más complejos e información horaria para la precisa detección de cambios económicos en el corto plazo.

5.2 Metodología

5.2.1 Series

Se analizarán los precios de cierre diarios del índice bursátil S&P Merval. Se representará con X_t el precio de cierre del día y con X_{t-1} el precio de cierre del día anterior. Se utilizará la tasa logarítmica de rendimientos para analizar el cambio temporal del índice bursátil. Esta metodología

se popularizo en el área de las finanzas por diversos factores como por ejemplo que muchas series de precios tienen Distribución Log-normal. Las series y programas utilizados se presentarán en el Anexo B.

Definición 5.2.1. *Rendimiento Logarítmico*

$$r_t = ln(X_t) - ln(X_{t-1})$$

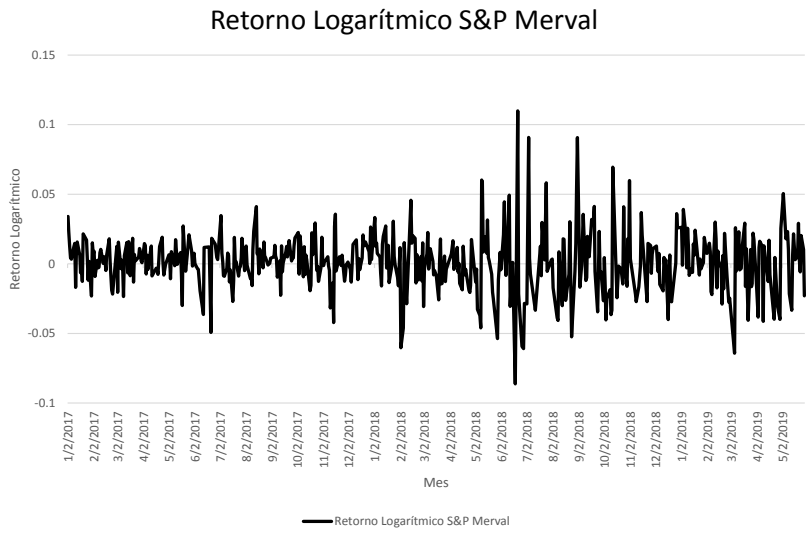


Figura 30: Rendimiento logarítmico del S&P Merval entre 1/2/2017 y 5/28/2019.

Para medir los cambios en el precio del dólar se eligió el precio de cierre comprador del Banco Nación.

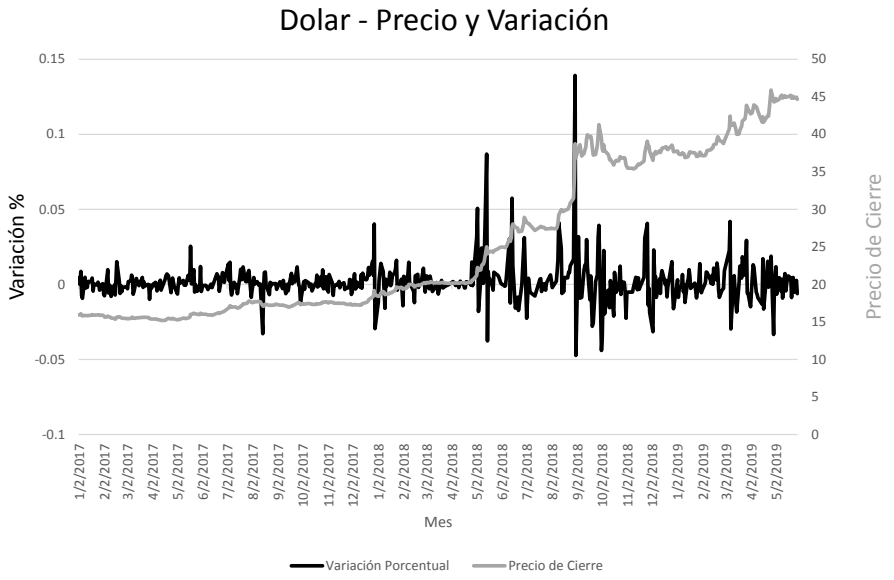


Figura 31: Precio de cierre y variación porcentual del dolar Banco Nación entre 1/2/2017 y el 5/28/2019.

Además, se utilizará el indicador de JP Morgan como serie de referencia para medir el riesgo inherente de operar en Argentina.



Figura 32: Indice de Riesgo País desde 1/2/2017 hasta 5/28/2019.

5.2.2 Entropía y Modelos Estadísticos

Se utilizará la Entropía de Permutación Ponderada Dependiente del Tiempo con ventanas de 200, 180, 90 días. La Divergencia de Jensen-Shannon como base para el cálculo de la complejidad.

Dado que todas las series presentan una tendencia marcada, para el cálculo de estadísticos de relación y significancia se presentarán dos modelos simples con la tendencia incluida como variable. El primer modelo, una Regresión Simple se utilizará para cuantificar el impacto de la tendencia en las series. El segundo modelo introduce un nuevo término, la serie de entropía o complejidad como variable independiente como base para explicar la variable dependiente ya sea la serie de precios del dólar o el Riesgo País.

Definición 5.2.2. *Modelo de Tendencia*

Sean ϵ_i independientes $\sim N(0, \sigma^2)$ $\forall i = 1, ..., n$

$$y_i = b_0 + b_1 Tendencia_i + \epsilon_i$$

Donde $Tendencia_i$ es el número de día en el período temporal a considerar, b_0 es un estimador del verdadero intercepto β_0 (ordenada al origen), b_1 es un estimador del parámetro de tendencia real β_1 y ϵ_i es el error.

Para evaluar la significatividad de nuestros coeficientes se utilizará un test de hipótesis basado en la Distribución t de Student.

Definición 5.2.3. *Test de Hipótesis para el Modelo de Tendencia*

Las hipótesis son:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_\alpha : \beta_1 \neq 0$$

Dado nuestros supuestos, se cumple que [64]:

$$\frac{b_1 - \beta_1}{s(b_1)} \sim t(n-2) \text{ Student con } (n-2) \text{ grados del libertad.}$$

Definición 5.2.4. *Modelo de Tendencia y Entropía/Complejidad*

$$y_i = b_0 + b_1 Tendencia_i + b_2 \ Entropia/Complejidad_i$$

Donde $b_2 \ Entropia/Complejidad_i$ corresponde a la entropía o complejidad del dia i.

Definición 5.2.5. *Test de Hipótesis para modelos de Tendencia y Entropía/Complejidad*

Con $k = 0, 1, 2$, las hipótesis son:

$$H_0 : \beta_k = 0$$
$$H_\alpha : \beta_k \neq 0$$

Dado nuestros supuestos:

$$\frac{b_k - \beta_k}{s(b_k)} \sim t(n-3) \text{ Student con } (n-3) \text{ grados del libertad.}$$

5.3 Resultados

5.3.1 Entropía

El cambio temporal de la Entropía de Permutación en las Figuras 33 y 34 muestran una marcada tendencia descendiente a partir de mayo del año 2018 mientras que la serie perteneciente a la Figura 35 no tiene una tendencia clara, pero comparte junto con las otras dos series la gran caída de mayo del 2018. A partir de esta fecha los saltos en el precio del dólar se vuelven muy marcados, con gran intensidad. Este comportamiento se repite de manera periódica, pero pierda cierta intensidad en el final de la serie.

La Entropía de Permutación Ponderada detecta efectivamente cambios bruscos en tipo de cambio y la inestabilidad económica que atraviesa el país, caracterizando a la serie del S&P Merval con un grado de aleatoriedad muchísimo menor a partir de mediados del año 2018. Además, se puede destacar la consistencia del operador a lo largo de todas las diferentes ventanas temporales utilizadas.

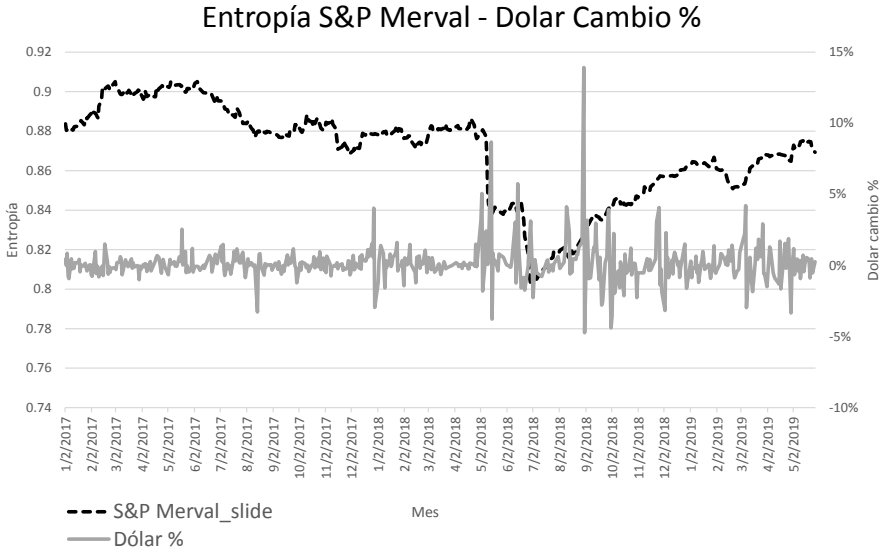


Figura 33: Comparación entre la Entropía de Permutación Ponderada del S&P Merval con una ventana de 200 días y el cambio porcentual en el precio del dólar.

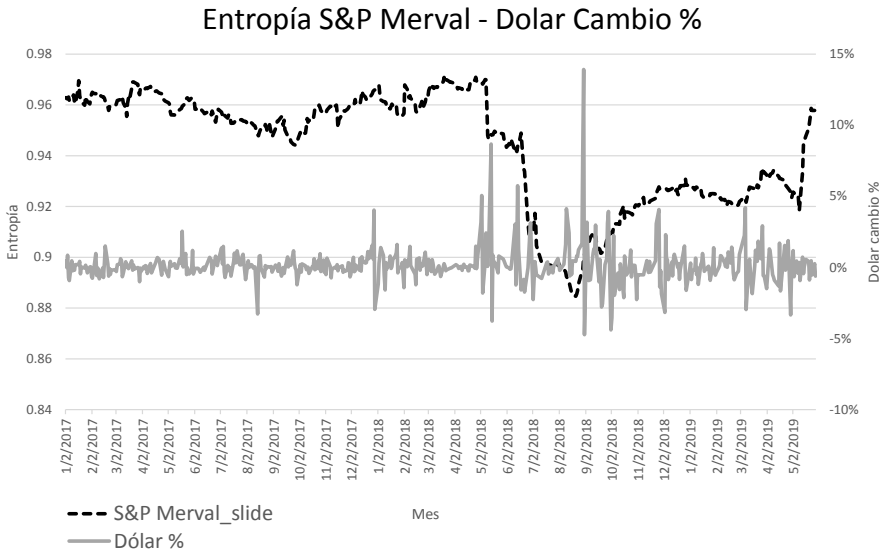


Figura 34: Comparación entre la Entropía de Permutación Ponderada del S&P Merval con una ventana de 180 días y el cambio porcentual en el precio del dólar.

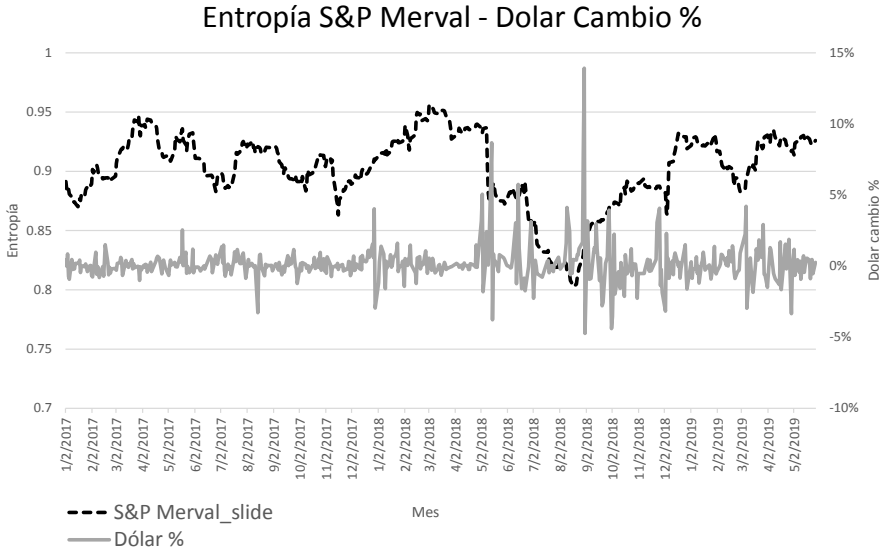


Figura 35: Comparación entre la Entropía de Permutación Ponderada del S&P Merval con una ventana de 90 días y el cambio porcentual en el precio del dólar.

5.3.1.1 Análisis de Tendencias

Con el objeto de analizar estadísticamente el grado de relación y la tendencia general entre las series se utilizarán tres medidas de correlación: el Coeficiente de Pearson, el Coeficiente de Spearman y el Coeficiente de Kendall Tau. Las tres medidas muestran una correlación positiva fuerte entre las series de entropía con ventanas de 200 y 180 días, y una correlación positiva mucho más débil con la de 90 días. Las series de 200 y 180 días están negativamente correlacionadas con el precio del dólar y el índice de Riesgo País mientras que la serie de 90 días no posee prácticamente ninguna correlación con estas dos series. Claramente todas las series a excepción de la S&P Merval de 90 días poseen una tendencia muy marcada que influye en el valor de los coeficientes calculados.

Serie	S&P Merval 200	S&P Merval 180	S&P Merval 90	Dolar	Riesgo País
S&P Merval 200	1.0000	0.5741	0.0670	-0.7836	-0.7475
S&P Merval 180	0.5741	1.0000	0.6468	-0.4565	-0.3947
S&P Merval 90	0.0670	0.6468	1.0000	0.1052	0.1606
Dolar	-0.7836	-0.4565	0.1052	1.0000	0.9389
Riesgo País	-0.7475	-0.3947	0.1606	0.9389	1.0000

Tabla 1: Coeficientes de Correlación de Person

Serie	S&P Merval 200	S&P Merval 180	S&P Merval 90	Dolar	Riesgo País
S&P Merval 200	1.0000	0.4100	-0.0436	-0.7124	-0.6502
S&P Merval 180	0.4100	1.0000	0.5960	-0.5985	-0.5127
S&P Merval 90	-0.0436	0.5960	1.0000	-0.0671	0.0487
Dolar	-0.7124	-0.5985	-0.0671	1.0000	0.6853
Riesgo País	-0.6502	-0.5127	0.0487	0.6853	1.0000

Tabla 2: Coeficientes de Correlación de Spearman

Serie	S&P Merval 200	S&P Merval 180	S&P Merval 90	Dolar	Riesgo País
S&P Merval 200	1.0000	0.2778	-0.0447	-0.4514	-0.3925
S&P Merval 180	0.2778	1.0000	0.4176	-0.3529	-0.3120
S&P Merval 90	-0.0447	0.4176	1.0000	-0.0533	0.0304
Dolar	-0.4514	-0.3529	-0.0533	1.0000	0.4999
Riesgo País	-0.3925	-0.3120	0.0304	0.4999	1.0000

Tabla 3: Coeficientes de Correlación de Kendall Tau

5.3.1.2 Regresiones

El primer modelo tiene el objeto de cuantificar el componente intrínseco de tendencia que poseen las series de entropía, el dólar y el Riesgo País por medio de una regresión simple. La siguiente tabla muestra los principales resultados de este modelo: los coeficientes estimados de la regresión, y para cuantificar si estos coeficientes son significativos, los t-valores p-valores.

Modelos	Variable	Estimado	t-valor	p-valor
S&P Merval 200	b_0	0.97317	782.41	0
S&P Merval 200	b_1	0.00000411	-23.42	0
S&P Merval 180	b_0	0.00172	557.45	0
S&P Merval 180	b_1	0.00000569	-15.2	0
S&P Merval 90	b_0	0.003	302.16	0
S&P Merval 90	b_1	0.00000991	-1.1	0.2728
Dolar	b_0	8.89251	26.79	0
Dolar	b_1	0.00111	55.5	0
Riesgo País	b_0	304.33511	35.55	0
Riesgo País	b_1	0.83726	29.58	0

Tabla 4: Coeficientes y Estadísticos del Modelo de Tendencia.

En el marco de esta regresión lineal, prácticamente todos los modelos presentan un componente de tendencia importante y los signos de los coeficientes son consistentes con los valores esperados al ver la serie gráficamente. El test estadístico t categoriza a la tendencia como coeficientes significativos para todas las series menos el S&P Merval con ventana de 90 días. Esta serie evalúa un periodo temporal más corto y la tendencia se pierde por la volatilidad bursátil.

El segundo modelo busca establecer a las series de entropía como variables explicativas para modelar y explicar los cambios en el precio del dólar y el índice de Riesgo País. Las regresiones con el dólar y el Riesgo País como variable dependiente se destacan por atribuir menos importancia a la tendencia y presentan discrepancias en los signos de sus coeficientes, las series de 180 y 90 días tienen un coeficiente positivo, mientras que la serie de 200 días negativo. Si bien los signos de los coeficientes para las diferentes series del Merval son consistentes al cambiar la variable dependiente, la ventana de 200 días es la que posee el coeficiente que concuerda con la evolución de la entropía en el tiempo. Estadísticamente, los t-valores muestran coeficientes significativos en todos los modelos a excepción del modelo de Riesgo País con entropía de 180 días que posee un coeficiente b_0 muy poco significativo dado los supuestos utilizados.

Modelos	S&P Ventana	Variable	Estimado	t-valor	p-valor
Dólar	200	b_0	128.7857439	12.57911319	0.00000
Dólar	200	b_1	0.0496715	35.11242616	0.00000
Dólar	200	b_3	-123.1063534	-11.7067271	0.00000
Dólar	180	b_0	-24.17505032	-2.99467309	0.00288
Dólar	180	b_1	0.064522217	49.16810305	0.00000
Dólar	180	b_3	34.59574251	4.110819442	0.00005
Dólar	90	b_0	-30.90396406	-7.546222253	0.00000
Dólar	90	b_1	0.0620111	60.71494919	0.00000
Dólar	90	b_3	44.07072002	9.767349241	0.00000
Riesgo País	200	b_0	3139.897031	11.7950029	0.00000
Riesgo País	200	b_1	0.556544271	15.13052755	0.00000
Riesgo País	200	b_3	-2913.741845	-10.65630176	0.00000
Riesgo País	180	b_0	-109.5225282	-0.524911911	0.59987
Riesgo País	180	b_1	0.87458661	25.7856407	0.00000
Riesgo País	180	b_3	431.8083433	1.985170027	0.04765
Riesgo País	90	b_0	-537.4269174	-4.996577175	0.00000
Riesgo País	90	b_1	0.847375895	31.58930984	0.00000
Riesgo País	90	b_3	930.0660698	7.848346251	0.00000

Tabla 5: Coeficientes y Estadísticos del modelo de Entropía y Tendencia.

5.3.2 Complejidad

Las series temporales de complejidad temporal muestran patrones muy marcados y una tendencia ascendente a partir de mayo del año 2018. La Divergencia de Jensen-Shannon junto con la Entropía de Permutación Ponderada asocian los momentos de mayor incertidumbre y cambios bruscos en la serie del S&P Merval con un valor de complejidad superior. Las series de complejidad son consistentes a lo largo de las diferentes ventanas temporales y poseen gran sensibilidad frente a los cambios del índice bursátil. Se puede observar que entre los años 2017 y 2019 la complejidad del sistema se cuadriplica a medida que los saltos en el tipo de cambio se hacen más frecuentes y más abruptos.

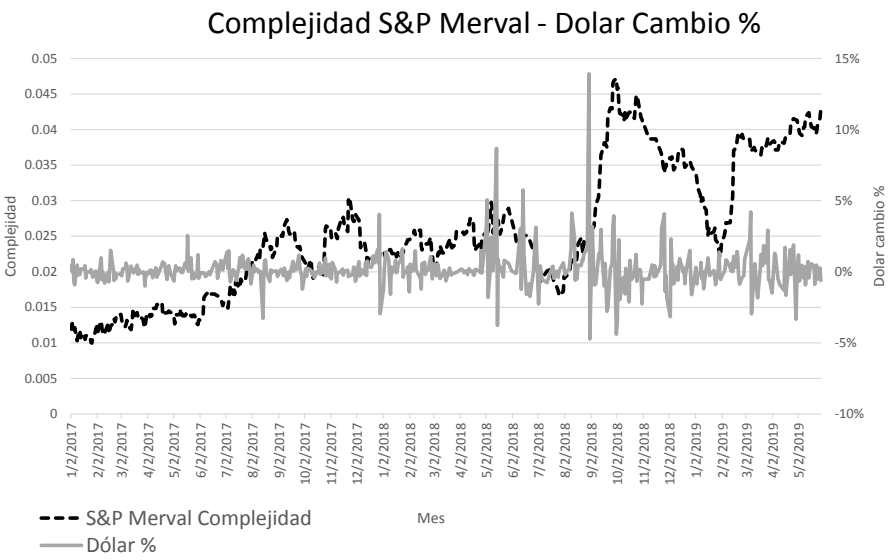


Figura 36: Comparación entre la Complejidad del S&P Merval con una ventana de 200 días y el cambio porcentual en el precio del dólar.

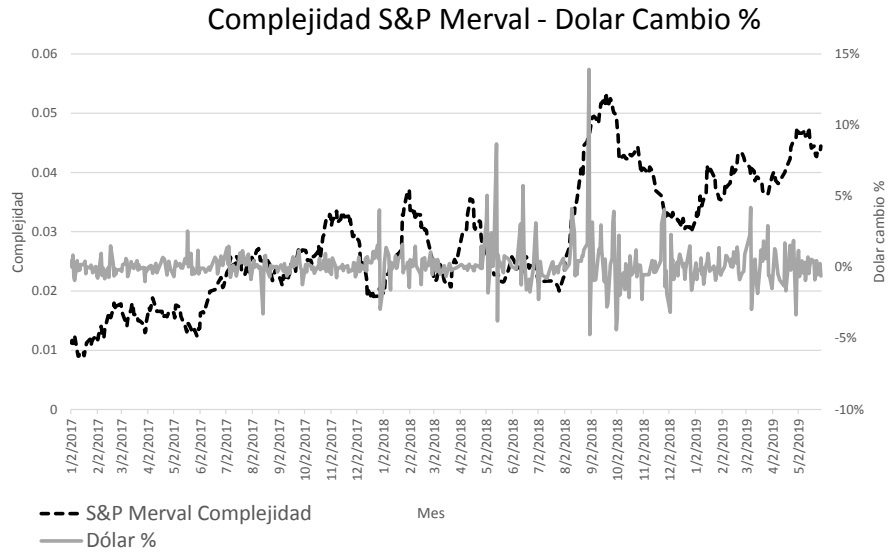


Figura 37: Comparación entre la Complejidad del S&P Merval con una ventana de 180 días y el cambio porcentual en el precio del dólar.

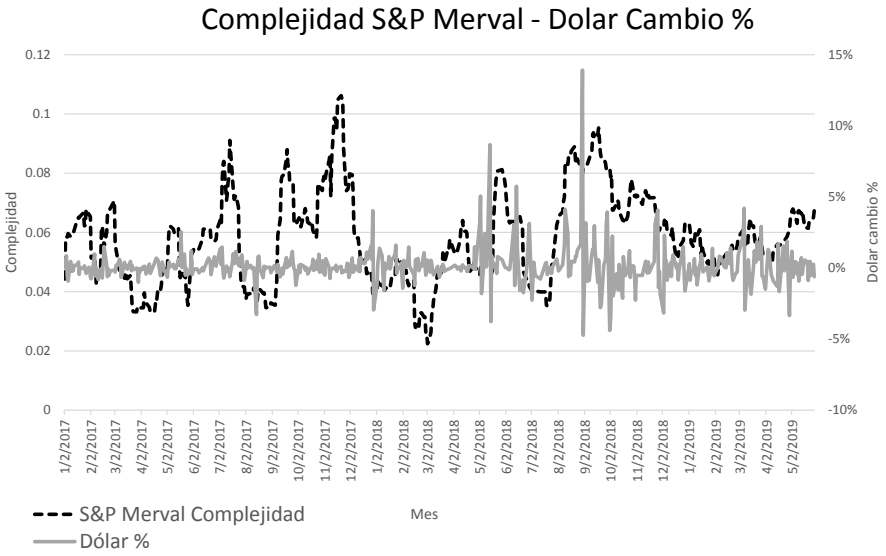


Figura 38: Comparación entre la Complejidad del S&P Merval con una ventana de 90 días y el cambio porcentual en el precio del dolar.

5.3.2.1 Análisis de Tendencias

Para en análisis estadístico entre las series de complejidad y el precio del dólar también se utilizó tres medidas de correlación: el Coeficiente de Pearson, el Coeficiente de Spearman y el Coeficiente de Kendall Tau. Las tablas de muestran una correlación positiva importante entre las medidas de complejidad con ventanas de 200 y 180 días, mientras que la serie con ventana de 90 días presenta una correlación mucho más débil con ambas. Las series de 200 y 180 días están positivamente correlacionadas con el precio del dólar y el Riesgo País mientras que la serie de 90 días tiene una correlación positiva pequeña con estas series temporales.

Los coeficientes de Spearman y Kendall Tau son consistentes en la dirección de las relaciones, pero presentan valores inferiores a los producidos con la metodología de Pearson.

Serie	S&P Merval 200	S&P Merval 180	S&P Merval 90	Dolar	Riesgo País
S&P Merval 200	1.0000	0.8708	0.3282	0.8407	0.6857
S&P Merval 180	0.8708	1.0000	0.4267	0.8241	0.6819
S&P Merval 90	0.3282	0.4267	1.0000	0.2382	0.2077
Dolar	0.8407	0.8241	0.2382	1.0000	0.9389
Riesgo País	0.6857	0.6819	0.2077	0.9389	1.0000

Tabla 6: Coeficientes de Correlación de Pearson

Serie	S&P Merval 200	S&P Merval 180	S&P Merval 90	Dolar	Riesgo País
S&P Merval 200	1.0000	0.6896	0.2425	0.6320	0.2782
S&P Merval 180	0.6896	1.0000	0.2742	0.6149	0.2825
S&P Merval 90	0.2425	0.2742	1.0000	0.1550	0.1399
Dolar	0.6320	0.6149	0.1550	1.0000	0.4999
Riesgo País	0.2782	0.2825	0.1399	0.4999	1.0000

Tabla 8: Coeficientes de Correlación de Kendall Tau

Serie	S&P Merval 200	S&P Merval 180	S&P Merval 90	Dolar	Riesgo País
S&P Merval 200	1.0000	0.8624	0.3598	0.8325	0.4639
S&P Merval 180	0.8624	1.0000	0.4134	0.8351	0.4882
S&P Merval 90	0.3598	0.4134	1.0000	0.2218	0.2018
Dolar	0.8325	0.8351	0.2218	1.0000	0.6853
Riesgo País	0.4639	0.4882	0.2018	0.6853	1.0000

Tabla 7: Coeficientes de Correlación de Spearman

5.3.2.2 Regresiones

El primer modelo tiene el objeto de cuantificar el componente intrínseco de tendencia que poseen las series de complejidad, el dólar y el Riesgo País por medio de una regresión simple. La siguiente tabla muestra los principales resultados de este modelo: los coeficientes estimados de la regresión, y para cuantificar si estos coeficientes son significativos, los t-valores y los p-valores.

Modelos	Variable	Estimado	t-valor	p-valor
S&P Merval 200	b_0	0.0115248	27.96015514	0.00000
S&P Merval 200	b_1	0.000051892	38.06901912	0.00000
S&P Merval 180	b_0	0.0133278	26.48815978	0.00000
S&P Merval 180	b_1	0.000057209	34.38103916	0.00000
S&P Merval 90	b_0	0.0533154	39.51493304	0.00000
S&P Merval 90	b_1	0.000018541	4.155228264	0.00004
Dólar	b_0	8.982512817	26.79181463	0.00000
Dólar	b_1	0.0615319	55.49678215	0.00000
Riesgo País	b_0	304.3351135	35.55186286	0.00000
Riesgo País	b_1	0.837262531	29.5757192	0.00000

Tabla 9: Coeficientes y Estadísticos del Modelo de Tendencia.

Los Modelos de Tendencia basados en las series de complejidad se caracterizan por tener signos consistentes con la naturaleza creciente de la complejidad y valores de tendencia significativos a lo largo de todas las series.

En las series de complejidad se observa, a lo largo de las diferentes ventanas, una tendencia más marcada que en las series de entropía. El estadístico t muestra a todos los coeficientes b_1 como estadísticamente significativos, incluso para la serie S&P Merval 90. A pesar de esto, la serie de complejidad del S&P Merval 90 es la que tiene menor tendencia con un coeficiente de 4.155, el menor coeficiente entre todas las series de complejidad. La variación del S&P Merval 90 está concentranda en los picos de mayor incertidumbre económica lo que es totalmente consistente con la naturaleza más acotada de la información que recibe el operador.

Las regresiones con las series de complejidad coeficientes con signos totalmente consistentes entre los diferentes modelos, todos ellos positivos. El signo positivo del coeficiente b_3 es conforme con la intuición teórica de la complejidad y con la dirección del cambio temporal en la complejidad para nuestro período de análisis.

Estadísticamente, los modelos presentan coeficientes significativos y solamente el modelo de Riesgo País, con complejidad calculada con una ventana de 200, días presenta un coeficiente b_3 con valores fuera del rango aceptable.

Modelos	S&P Ventana	Variable	Estimado	t-valor	p-valor
Dólar	200	b_0	6.704812382	13.02483829	0.00000
Dólar	200	b_1	0.0512762	24.49277096	0.00000
Dólar	200	b_3	197.6347855	5.711848221	0.00000
Dólar	180	b_0	6.718529242	13.51530972	0.00000
Dólar	180	b_1	0.0518139	26.70502305	0.00000
Dólar	180	b_3	169.8688637	6.01200712	0.00000
Dólar	90	b_0	6.412365362	9.742475147	0.00000
Dólar	90	b_1	0.0606381	54.7957349	0.00000
Dólar	90	b_3	48.20651056	4.509548232	0.00001
Riesgo País	200	b_0	299.2098928	22.0878574	0.00000
Riesgo País	200	b_1	0.814185427	14.77874492	0.00000
Riesgo País	200	b_3	444.7125177	0.488410011	0.62547
Riesgo País	180	b_0	289.3571766	22.09274004	0.00000
Riesgo País	180	b_1	0.772970692	15.12075499	0.00000
Riesgo País	180	b_3	1123.809	1.509599501	0.13175
Riesgo País	90	b_0	267.2509066	15.69537548	0.00000
Riesgo País	90	b_1	0.824366405	28.79538722	0.00000
Riesgo País	90	b_3	695.5632865	2.515159124	0.01220

Tabla 10: Coeficientes y Estadísticos del Modelo de Complejidad y Tendencia.

5.4 Conclusiones del Capítulo

El análisis dinámico de las series de tiempo del actual capítulo arroja una perspectiva interesante y sumamente esperada de la evolución económica-financiera del país. Los diversos indicadores utilizados presentan un comportamiento muy marcado, lo que facilita la interpretación de los operadores elegidos, así como también la elección de los parámetros para estos últimos.

Los resultados obtenidos ponen en evidencia la efectividad de la entropía para detectar períodos de agitación económica, o bien cambios drásticos en la percepción subjetiva de la situación económica actual. El análisis de complejidad si bien también tiene capacidad para detectar períodos de turbulencia y cambios significativos en la situación económica y financiera, necesita una fina elección de la ventana temporal.

En líneas generales las series de entropía son de más sencilla interpretación, tienen una tendencia marcada y no presentan un comportamiento visiblemente oscilatorio. Por otra parte, las series de complejidad, por ser un operador que engloba mayor cantidad de características, poseen un carácter más oscilatorio, similar a una serie de ruido blanco y posiblemente requerirán de modelos auxiliares para filtrar y extraer información de manera efectiva. Utilizando una ventana de 90 días se pierde estadísticamente la tendencia lineal global pero la serie aún conserva la capacidad para detectar cambios marcados a nivel local.

Las modelos de regresión simples presentados son una alternativa de sencilla implementación que permiten establecer criterios estadísticos de significatividad y un punto de partida para el análisis predictivo de los presentes indicadores, siempre utilizando los operadores de la Teoría de la Información como punto de partida. Al restringir el número de variables y simplificar los modelos se obtiene una interpretación sencilla y resultados robustos que justifican la utilización de estos operadores como entorno para el estudio de la evolución de series temporales financieras. Además, posibilitan la creación de criterios matemáticos para la elección de los parámetros a utilizar y un criterio de para elegir y descartar series mucho más sólido.

El desarrollo de modelos de mayor complejidad para en análisis de estos procesos estocásticos, así como también la obtención de datos con frecuencia temporal horaria permitirán un análisis con ventanas temporales menores, con un grado de detalle y poder predictivo superior. Esto permitirá comprender mejor la dinámica de estos complejos sistemas.

6 Anexo A: Capítulo 4

6.1 Códigos en Python para el cómputo de los operadores.

```
@author: veag6001
"""

import pandas as pd
import numpy as np
from pyentrp import entropy1 as ent
import dit.other as dit
from dit.example_dists import binomial
import scipy as sci
import matplotlib.pyplot as plt

embedding=5
lag=1
export = r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Export'

uniform_pmf= np.ones(np.math.factorial(embedding))/np.math.factorial(embedding)

def JSD(p,q):
    m = 0.5*(p+q)
    jsd= 0.5*(sci.stats.entropy(p,m,base=2))+ 0.5*(sci.stats.entropy(q,m,base=2))
    return jsd

# File Prep - Get the 3 different Models series
residuals= pd.read_excel(r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Outputs.xlsx',sheet_name='x_ls')
residuals_ridge=pd.read_excel(r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Outputs.xlsx',sheet_name='x_euclid')
residuals_lasso=pd.read_excel(r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Outputs.xlsx',sheet_name='x_l1')

tipos_de_regresion=['residuals','residuals_lasso','residuals_ridge']

# Weighted Permutation Entropy  & JSD
residuals_peentropy_wei=ent.permutation_entropy_weighted(residuals['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_lasso_peentropy_wei=ent.permutation_entropy_weighted(residuals_lasso['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_ridge_peentropy_wei=ent.permutation_entropy_weighted(residuals_ridge['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
weighted_entropy = pd.DataFrame({'104 M1 Ponderada':residuals_peentropy_wei,'104 M3 Ponderada':residuals_lasso_peentropy_wei,
'104 M2 Ponderada':residuals_ridge_peentropy_wei}, index=[0])

residuals_peentropy_wei_pmf=ent.permutation_entropy_weighted_pmf(residuals['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_lasso_peentropy_wei_pmf=ent.permutation_entropy_weighted_pmf(residuals_lasso['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_ridge_peentropy_wei_pmf=ent.permutation_entropy_weighted_pmf(residuals_ridge['Residual'],embedding,lag,weighted=True)

residuals_peentropy_wei_jsd = JSD(residuals_peentropy_wei_pmf,uniform_pmf)
residuals_lasso_peentropy_wei_jsd=JSD(residuals_lasso_peentropy_wei_pmf,uniform_pmf)
residuals_ridge_peentropy_wei_jsd=JSD(residuals_ridge_peentropy_wei_pmf,uniform_pmf)
weighted_entropy_divergence = pd.DataFrame({'104 M1 Ponderada Divergencia':residuals_peentropy_wei_jsd,
'104 M3 Ponderada Divergencia':residuals_lasso_peentropy_wei_jsd,'104 M2 Ponderada Divergencia':residuals_ridge_peentropy_wei_jsd},
index=[0])

residuals_peentropy_wei_complex=residuals_peentropy_wei_jsd*residuals_peentropy_wei/np.log2(np.math.factorial(embedding))
residuals_lasso_peentropy_wei_complex=residuals_lasso_peentropy_wei_jsd*residuals_lasso_peentropy_wei/np.log2(np.math.factorial(embedding))
residuals_ridge_peentropy_wei_complex=residuals_ridge_peentropy_wei_jsd*residuals_ridge_peentropy_wei/np.log2(np.math.factorial(embedding))
weighted_entropy_complexity = pd.DataFrame({'104 M1 Ponderada Complejidad':residuals_peentropy_wei_complex,
'104 M3 Ponderada Complejidad':residuals_lasso_peentropy_wei_complex,'104 M2 Ponderada Complejidad':residuals_ridge_peentropy_wei_complex},
index=[0])

entropy = pd.concat([weighted_entropy, weighted_entropy_divergence,weighted_entropy_complexity], axis= 1)
entropy=entropy.T
entropy.to_csv(export+"\\"+str(embedding)+"_"+str(lag)+"_complexity.csv")


# Fisher Information

residuals_peentropy_wei_fisher = ent.fisher_information(residuals_peentropy_wei_pmf)
residuals_lasso_peentropy_wei_fisher = ent.fisher_information(residuals_lasso_peentropy_wei_pmf)
residuals_ridge_peentropy_wei_fisher = ent.fisher_information(residuals_ridge_peentropy_wei_pmf)
fisher_information = pd.DataFrame({'104 M1 Información de Fisher':residuals_peentropy_wei_fisher,
'104 M3 Información de Fisher':residuals_lasso_peentropy_wei_fisher,'104 M2 Información de Fisher':residuals_ridge_peentropy_wei_fisher)
, index=[0])

# Variance
residuals_variance=np.var(residuals_peentropy_wei_pmf)
residuals_lasso_variance=np.var(residuals_lasso_peentropy_wei_pmf)
residuals_ridge_variance=np.var(residuals_ridge_peentropy_wei_pmf)
variance = pd.DataFrame({'104 M1 Varianza':residuals_variance,'104 M3 Varianza':residuals_lasso_variance,
'104 M2 Varianza':residuals_ridge_variance}, index=[0])

cramerrao = pd.concat([fisher_information,variance], axis= 1)
cramerrao=cramerrao.T
cramerrao.to_csv(export+"\\"+str(embedding)+"_"+str(lag)+"_cramer_rao.csv")
```

Figura 39: La siguiente figura muestra el programa 1 de Python, procesando los operadores para la serie de residuos.

```python
import pandas as pd
import numpy as np
from pyentrp import entropy1 as ent
import dit.other as dit
from dit.example_dists import binomial
import scipy as sci
import matplotlib.pyplot as plt

embedding=4
lag=2

export = r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Export'

q0=np.array([1.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0])
l0=np.array([0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,1.0])
uniform_pmf= np.ones(np.math.factorial(embedding))/np.math.factorial(embedding)


def JSD(p,q):
    m = 0.5*(p+q)
    jsd= 0.5*(sci.stats.entropy(p,m,base=2))+ 0.5*(sci.stats.entropy(q,m,base=2))
    return jsd


# File Prep - Get the 3 different Models series
residuals= pd.read_excel(r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Outputs.xlsx',sheet_name='x_ls')
residuals_ridge=pd.read_excel(r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Outputs.xlsx',sheet_name='x_euclid')
residuals_lasso=pd.read_excel(r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo4\Regressions\Custom104\Outputs.xlsx',sheet_name='x_l1')


tipos de regresion=['residuals','residuals lasso','residuals ridge']

# Permutation Entropy
residuals_entropy=ent.permutation_entropy(residuals['Residual'],embedding,lag)
residuals_lasso_entropy=ent.permutation_entropy(residuals_lasso['Residual'],embedding,lag)
residuals_ridge_entropy=ent.permutation_entropy(residuals_ridge['Residual'],embedding,lag)
residuals_uniform=sci.stats.entropy(uniform_pmf,base=2)
shannon_entropy = pd.DataFrame({'104 M1 Shannon':residuals_entropy,'104 M3 Shannon':residuals_lasso_entropy,
'104 M2 Shannon':residuals_ridge_entropy}, index=[0])


#Normalice the Permutation Entropy
residuals_entropy_norm=residuals_entropy/np.log2(24)
residuals_lasso_entropy_norm=residuals_lasso_entropy/np.log2(24)
residuals_ridge_entropy_norm=residuals_ridge_entropy/np.log2(24)

# Weighted Permutation Entropy  & JSD
residuals_peentropy_wei=ent.permutation_entropy_weighted(residuals['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_lasso_peentropy_wei=ent.permutation_entropy_weighted(residuals_lasso['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_ridge_peentropy_wei=ent.permutation_entropy_weighted(residuals_ridge['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
weighted_entropy = pd.DataFrame({'104 M1 Ponderada':residuals_peentropy_wei,'104 M3 Ponderada':residuals_lasso_peentropy_wei,
'104 M2 Ponderada':residuals_ridge_peentropy_wei}, index=[0])

residuals_peentropy_wei_pmf=ent.permutation_entropy_weighted_pmf(residuals['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_lasso_peentropy_wei_pmf=ent.permutation_entropy_weighted_pmf(residuals_lasso['Residual'],embedding,lag,weighted=True)
residuals_ridge_peentropy_wei_pmf=ent.permutation_entropy_weighted_pmf(residuals_ridge['Residual'],embedding,lag,weighted=True)

residuals_peentropy_wei_jsd = JSD(residuals_peentropy_wei_pmf,uniform_pmf)
residuals_lasso_peentropy_wei_jsd=JSD(residuals_lasso_peentropy_wei_pmf,uniform_pmf)
residuals_ridge_peentropy_wei_jsd=JSD(residuals_ridge_peentropy_wei_pmf,uniform_pmf)

weighted_entropy_divergence = pd.DataFrame({'104 M1 Ponderada Divergencia':residuals_peentropy_wei_jsd,
'104 M3 Ponderada Divergencia':residuals_lasso_peentropy_wei_jsd,'104 M2 Ponderada Divergencia':residuals_ridge_peentropy_wei_jsd},
 index=[0])
```

Figura 40: La siguiente figura muestra la primera parte del programa 2 de Python, procesando los operadores para la serie de residuos.

```
# Get the PMF's
residuals_pmf = ent.permutation_entropy_pmf(residuals['Residual'],embedding,lag)
residuals_lasso_pmf = ent.permutation_entropy_pmf(residuals_lasso['Residual'],embedding,lag)
residuals_ridge_pmf = ent.permutation_entropy_pmf(residuals_ridge['Residual'],embedding,lag)
pmf = pd.DataFrame({'Regular PMF':residuals_pmf,'Lasso PMF':residuals_lasso_pmf,'Ridge PMF':residuals_ridge_pmf})

#Get the permutations
residuals_permutations =ent.permutation_entropy_permutations(residuals['Residual'],embedding,lag)
residuals_lasso_permutations =ent.permutation_entropy_permutations(residuals_lasso['Residual'],embedding,lag)
residuals_ridge_permutations =ent.permutation_entropy_permutations(residuals_ridge['Residual'],embedding,lag)
# Renyi Entropy
residuals_renyi=ent.renyi_entropy(residuals_pmf,3)
residuals_lasso_renyi=ent.renyi_entropy(residuals_lasso_pmf,3)
residuals_ridge_renyi=ent.renyi_entropy(residuals_ridge_pmf,3)
renyi_entropy = pd.DataFrame({'104 M1 Renyi':residuals_renyi,'104 M3 Renyi':residuals_lasso_renyi,'104 M2 Renyi':residuals_ridge_renyi}
, index=[0])
# Normalice Renyi Entropy
residuals_renyi_norm=residuals_renyi/ent.renyi_entropy(uniform_pmf,2)
residuals_lasso_renyi_norm=residuals_lasso_renyi/ent.renyi_entropy(uniform_pmf,2)
residuals_ridge_renyi_norm=residuals_ridge_renyi/ent.renyi_entropy(uniform_pmf,2)
# Minimun Entropy
residuals_minentropy=ent.min_entropy(residuals_pmf)
residuals_lasso_minentropy=ent.min_entropy(residuals_lasso_pmf)
residuals_ridge_minentropy=ent.min_entropy(residuals_ridge_pmf)
minimun_entropy = pd.DataFrame({'104 M1 minentropy':residuals_minentropy,'104 M3 minentropy':residuals_lasso_minentropy,
'104 M2 minentropy':residuals_ridge_minentropy}, index=[0])
# Tsallis Entropy
residuals_tsallis=ent.tsallis_entropy(residuals_pmf,0.5)
residuals_lasso_tsallis=ent.tsallis_entropy(residuals_lasso_pmf,0.5)
residuals_ridge_tsallis=ent.tsallis_entropy(residuals_ridge_pmf,0.5)
tsallis_entropy = pd.DataFrame({'104 M1 Tsallis':residuals_tsallis,'104 M3 Tsallis':residuals_lasso_tsallis,
'104 M2 Tsallis':residuals_ridge_tsallis}, index=[0])

# Fisher Information
residuals_fisher=ent.fisher_information(residuals_pmf)
residuals_lasso_fisher=ent.fisher_information(residuals_lasso_pmf)
residuals_ridge_fisher=ent.fisher_information(residuals_ridge_pmf)
uniform_fisher=ent.fisher_information(uniform_pmf)
fisher_info = pd.DataFrame({'104 M1 Fisher':residuals_fisher,'104 M3 Fisher':residuals_lasso_fisher,
'104 M2 Fisher':residuals_ridge_fisher}, index=[0])

# Variance

residuals_variance=np.var(residuals_peentropy_wei_pmf)
residuals_lasso_variance=np.var(residuals_lasso_peentropy_wei_pmf)
residuals_ridge_variance=np.var(residuals_ridge_peentropy_wei_pmf)
variance = pd.DataFrame({'104 M1 Varianza':residuals_variance,'104 M3 Varianza':residuals_lasso_variance,
'104 M2 Varianza':residuals_ridge_variance}, index=[0])

entropy = pd.concat([shannon_entropy,weighted_entropy, renyi_entropy,minimun_entropy,tsallis_entropy,fisher_info,variance], axis= 1)
entropy=entropy.T
entropy.to_csv(export+"\\"+str(embedding)+"_"+str(lag)+"_entropy2.csv")
pmf.to_csv(export+"\\"+str(embedding)+"_"+str(lag)+"Custom_PMF.csv",index=False)
```

Figura 41: La siguiente figura muestra la segunda parte del programa 2 de Python, procesando los operadores para la serie de residuos.

```
def permutation_entropy_weighted(time_series, m, delay,weighted):
    n = len(time_series)
    permutations = np.array(list(itertools.permutations(range(m))))
    hashlist = [util_hash_term(perm) for perm in permutations]
    c = [0] * len(permutations)
    vector=[0] *( n - delay * (m - 1))
    weight=[0] *( n - delay * (m - 1))

    for i in range(n - delay * (m - 1)):
        sorted_index_array = np.array(np.argsort(time_series[i:i + delay * m:delay], kind='quicksort'))
        vector[i]=time_series[i:i + delay * m:delay]
        hashvalue = util_hash_term(sorted_index_array);
        if weighted == True:
            weight[i]=np.var(vector[i])
            c[np.argwhere(hashlist == hashvalue)[0][0]] += 1*weight[i]
        else:
            c[np.argwhere(hashlist == hashvalue)[0][0]] += 1

    c = [element for element in c if element != 0]
    p = np.divide(np.array(c), float(sum(c)))
    pe = -sum(p * np.log2(p))
    return pe

def permutation_entropy_weighted_pmf(time_series, m, delay,weighted):
    n = len(time_series)
    permutations = np.array(list(itertools.permutations(range(m))))
    hashlist = [util_hash_term(perm) for perm in permutations]
    c = [0] * len(permutations)
    vector=[0] *( n - delay * (m - 1))
    weight=[0] *( n - delay * (m - 1))

    for i in range(n - delay * (m - 1)):
        sorted_index_array = np.array(np.argsort(time_series[i:i + delay * m:delay], kind='quicksort'))
        vector[i]=time_series[i:i + delay * m:delay]
        hashvalue = util_hash_term(sorted_index_array);
        if weighted == True:
            weight[i]=np.var(vector[i])
            c[np.argwhere(hashlist == hashvalue)[0][0]] += 1*weight[i]
        else:
            c[np.argwhere(hashlist == hashvalue)[0][0]] += 1

    #c = [element for element in c if element != 0]
    p = np.divide(np.array(c), float(sum(c)))
    return p

def JSD(p,q):
    m = 0.5*(p+q)
    jsd= 0.5*(stats.entropy(p,m,base=2))+ 0.5*(stats.entropy(q,m,base=2))
    return jsd
```

```
            def entropy(p):
                en = -sum(p * np.log2(p))
                return en
            def renyi_entropy(p,alpha):
                re = np.log2(sum(p**alpha)) *(1/(1-alpha))
                return re
            def min_entropy(p):
                me = -np.log2(np.amax(p, axis=0))
                return me
            def tsallis_entropy(p,q):
                te=(1/(q-1))*(1-(np.sum(p**q)))
                return te
            def fisher_information(p):
                if (p[len(p)-1]==1.0 or p[0]==1.0):
                    f0=1
                else:
                    f0=0.5
                f=np.zeros(len(p)-1)
                for i in range(len(p)-1):
                    f[i]=(np.sqrt(p[i+1])-np.sqrt(p[i]))**2
                fisher= sum(f)*f0
                return fisher
```

Figura 42: La siguiente figura muestra los cambios al paquete de Python pyentrp, utilizado para procesar los operadores para la serie de residuos.

6.2 Códigos en Matlab para el cómputo de las regresiones.

```
A = dlmread('D:\Users\x2\Downloads\Info Integrada\Tesis\Capitulo 4\Custom104\pmodout.csv',",",1,0)
b = dlmread('D:\Users\x2\Downloads\Info Integrada\Tesis\Capitulo 4\Custom104\LN-Vol.csv',",",1,0)
x0= dlmread('D:\Users\x2\Downloads\Info Integrada\Tesis\Capitulo 4\Custom104\Prior.csv',",",1,0)
min= dlmread('D:\Users\x2\Downloads\Info Integrada\Tesis\Capitulo 4\Custom104\bounds-min.csv',",",1,0)
max= dlmread('D:\Users\x2\Downloads\Info Integrada\Tesis\Capitulo 4\Custom104\bounds-max.csv',",",1,0)
wi=[0;0;0;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1]
n=21
% Ridge Regression
cvx_begin
    variable y(n)
    minimize( norm(A*y-b) + 64*norm(((y-x0).*wi),2) )
    subject to
        min <= y <= max

cvx_end
% Regular Regression

cvx_begin
    variable x_ls(n)
    minimize( norm(A*x_ls-b)  )
    subject to
        min <= x_ls <= max

cvx_end
% Lasso Regression
cvx_begin
    variable z(n)
    minimize( norm(A*z-b) + 999*norm(((z-x0).*wi),1) )
    subject to
        min <= z <= max

cvx_end
% Residuals

time= b - (A*x_ls)
time_ridge= b - (A*y)
time_lasso= b - (A*z)
```

Figura 43: La siguiente figura muestra el código de Matlab utilizado para realizar las diferentes regresiones.

6.3 Variables utilizadas.

SEMANA	VAR1	VAR2	VPCY1	VPCY2	MARKET	NEWYEAR	XMAS	JULY4TH	THNXGIV	TREND	TREND2	LNTREND	RANDOM	HOLDOUT	DBAN2	FBAN1	FBAN2	MBAN2	MBAN3
12/10/2016	132.0937383	37804	35	0	0	0	0	0	0	-52	1	0	0.18496257	0	0	0	0	1.728	0
12/17/2016	134.1353798	40553	12	0	0	0	0	0	0	-51	2	0.693147181	0.970088716	0	0	0	0	4.994	0
12/24/2016	141.620844	38315	52	0	0	0	0.857142857	0	0	-50	3	1.098612289	0.399824306	0	0	0	0	6.02	0
12/31/2016	138.7864101	37063	44	0	0	0.857142857	0.142857143	0	0	-49	4	1.386294361	0.259398645	0	0	0	0	3.609	0
1/7/2017	141.0880121	41825	369	0	0	0.142857143	0	0	0	-48	5	1.609437912	0.921602578	0	0	0	0	0.696	0
1/14/2017	144.2475728	37417	362	0	0	0	0	0	0	-47	6	1.791759469	0.96927735	0	0	0	0	0.657	0
1/21/2017	142.6750489	40910	150	0	0	0	0	0	0	-46	7	1.945910149	0.542979173	0	0	0	0	0.651	0
1/28/2017	139.4521689	42267	51	0	0	0	0	0	0	-45	8	2.079441542	0.531691723	0	0	0	0	0.637	0
2/4/2017	142.072863	47565	43	0	0	0	0	0	0	-44	9	2.197224577	0.049794026	1	0	0	0	0.615	0
2/11/2017	143.2384538	41026	9	0	0	0	0	0	0	-43	10	2.302585093	0.066566552	1	0	5.503	0	0.595	0
2/18/2017	143.378961	48821	0	0	0	0	0	0	0	-42	11	2.397895273	0.819318571	0	0	6.881	0	0.568	0
2/25/2017	144.4659148	49026	0	0	0	0	0	0	0	-41	12	2.48490665	0.523870521	0	0	6.631	0	0.483	0
3/4/2017	142.3235188	47568	0	0	0	0	0	0	0	-40	13	2.564949357	0.853394311	0	0	5.627	0	0.445	0
3/11/2017	150.1965481	43383	0	0	0	0	0	0	0	-39	14	2.63905733	0.067184577	1	0	5.19	0	0.691	0
3/18/2017	151.4309865	46517	0	0	0	0	0	0	0	-38	15	2.708050201	0.957023858	0	0	4.768	0	0.72	0
3/25/2017	143.7893686	49687	0	0	0	0	0	0	0	-37	16	2.772588722	0.297193964	0	0	5.696	0	0.552	0
4/1/2017	141.9352966	48746	0	0	0	0	0	0	0	-36	17	2.833213344	0.272611789	0	0	6.277	0	0.257	0
4/8/2017	142.8613806	47021	0	0	0	0	0	0	0	-35	18	2.890371758	0.689929631	0	0	6.506	0	0.32	0
4/15/2017	143.9578352	43596	0	0	0	0	0	0	0	-34	19	2.944438979	0.976764862	0	0	6.451	0	0.315	0
4/22/2017	140.8814137	52556	0	0	0	0	0	0	0	-33	20	2.995732274	0.226507519	0	0	4.41	0	0.324	0
4/29/2017	138.3794026	49585	0	0	0	0	0	0	0	-32	21	3.044522438	0.68823655	0	0	5.132	0	0.325	0
5/6/2017	141.5227152	51302	0	0	0	0	0	0	0	-31	22	3.091042453	0.412763866	0	0	3.941	0	0.32	0
5/13/2017	149.6571279	47556	0	0	0	0	0	0	0	-30	23	3.135494216	0.558554113	0	0	2.547	0	0.32	0
5/20/2017	150.4040128	50963	0	0	0	0	0	0	0	-29	24	3.17805383	0.287225611	0	0	2.526	0	0.261	0
5/27/2017	145.2329271	51005	0	0	0	0	0	0	0	-28	25	3.218875825	0.475789305	0	0	3.001	0	0.261	0
6/3/2017	143.1189851	52013	0	0	0	0	0	0	0	-27	26	3.258096538	0.844986977	0	0	4.294	0	0.264	0
6/10/2017	145.8042137	47432	0	0	0	0	0	0	0	-26	27	3.295836866	0.634524118	0	0	4.166	0	0.284	0
6/17/2017	148.3383188	55020	0	0	0	0	0	0	0	-25	28	3.33220451	0.590364669	0	0	3.619	0	0.282	0
6/24/2017	145.0620277	54464	0	0	0	0	0	0	0	-24	29	3.36729583	0.582581526	0	0	3.225	0	0.276	0
7/1/2017	145.117073	53709	0	0	0	0	0	0.571428571	0	-23	30	3.401197382	0.377013369	0	0	3.339	0	0.284	0
7/8/2017	141.3525888	51076	0	0	0	0	0	0.428571429	0	-22	31	3.433987204	0.72836156	0	0	6.031	0	0.621	0
7/15/2017	140.8991773	57297	0	0	0	0	0	0	0	-21	32	3.465735903	0.506603529	0	0	13.172	0	0.771	0
7/22/2017	146.0749607	54169	0	0	0	0	0	0	0	-20	33	3.496507561	0.931213594	0	0	5.61	0	0.74	0
7/29/2017	143.135558	52817	0	0	0	0	0	0	0	-19	34	3.526360525	0.92912005	0	0	3.148	0	0.707	0
8/5/2017	146.7663531	53170	0	0	0	0	0	0	0	-18	35	3.555348061	0.589660338	0	0	3.863	0	0.675	0
8/12/2017	147.0678513	46782	0	0	0	0	0	0	0	-17	36	3.583518938	0.297222846	0	0	2.747	0	0.654	0
8/19/2017	142.17719	55831	0	0	0	0	0	0	0	-16	37	3.610917913	0.391042433	0	0	2.059	0	0.664	0
8/26/2017	146.1397453	58827	0	0	0	0	0	0	0	-15	38	3.63758616	0.472429176	0	0	1.445	0	0.64	0
9/2/2017	146.3358122	56404	0	0	0	0	0	0	0	-14	39	3.663561646	0.679525748	0	0	4.386	0	0.635	0
9/9/2017	155.6311478	53750	0	0	0	0	0	0	0	-13	40	3.688879454	0.168088351	0	0	5.665	0	0.663	0
9/16/2017	159.0501235	53411	423	0	0	0	0	0	0	-12	41	3.713572067	0.166526103	0	0	5.499	0	0.629	0
9/23/2017	155.0864075	62666	1836	0	0	0	0	0	0	-11	42	3.737669618	0.871104887	0	0	4.932	0	0.555	0
9/30/2017	159.444897	59585	0	0	0	0	0	0	0	-10	43	3.761200116	0.298789533	0	0	3.944	0	0.612	0
10/7/2017	154.7838227	61720	0	0	0	0	0	0	0	-9	44	3.784189634	0.934641764	0	0	5.293	0	0.076	0
10/14/2017	151.9523265	67327	0	0	0	0	0	0	0	-8	45	3.80666249	0.900470831	0	0	5.149	0	0.056	0
10/21/2017	141.0660328	70955	0	0	0	0	0	0	0	-7	46	3.828641396	0.568783468	0	0	6.677	0	0.057	0
10/28/2017	139.8654795	94821.5	0	0	0	0	0	0	0	-6	47	3.850147602	0.049545658	1	0	6.94	0	0.04	0
11/4/2017	130.3666207	78074	0	0	0	0	0	0	0	-5	48	3.871201011	0.135588261	0	0	7.242	0	0	0
11/11/2017	123.0894939	76267.5	0	0	0	0	0	0	0	-4	49	3.891820298	0.511317883	0	0	6.946	0	0	0
11/18/2017	150.2163834	79281	223	0	0	0	0	0	0.285714286	-3	50	3.912023005	0.433204564	0	0	6.756	0	0	0
11/25/2017	145.831072	75058	299	0	0	0	0	0	0.714285714	-2	51	3.931825633	0.17610578	0	0	6.675	0	0	0
12/2/2017	134.4837033	89259	322	0	0	0	0	0	0	-1	52	3.951243719	0.665035991	0	0	8.137	0	0	0
12/9/2017	130.5749284	79542.5	0	225	0	0	0	0	0	0	53	3.970291914	0.404818663	0	0	0	4.994	0	0
12/16/2017	137.0972808	73853	0	156	0	0	0	0	0	1	54	3.988984047	0.124548768	0	0	0	3.764	0	0
12/23/2017	139.0014367	80646	0	113	0	0	0.714285714	0	0	2	55	4.007333185	0.453486754	0	0	0	2.918	0	0
12/30/2017	144.671145	86023	0	2526	0	0.714285714	0.285714286	0	0	3	56	4.025351691	0.199553141	0	0	0	3.752	0	0
1/6/2018	145.5772347	100993	0	4730	0	0.285714286	0	0	0	4	57	4.043051268	0.574837174	0	0	0	2.878	0	0
1/13/2018	146.2452788	93636	0	3892	0	0	0	0	0	5	58	4.060443011	0.738473961	0	0.263	0	3.133	0	0.773
1/20/2018	137.9431098	89303.5	0	941	0	0	0	0	0	6	59	4.077537444	0.439812204	0	0.483	0	2.561	0	0.711
1/27/2018	143.1070515	82598	0	0	0	0	0	0	0	7	60	4.094344562	0.049367048	1	0.466	0	2.72	0	0.656
2/3/2018	140.077711	108575	0	0	0	0	0	0	0	8	61	4.110873864	0.522382167	0	0.447	0	3.137	0	0.585
2/10/2018	148.631754	96627	0	0	0	0	0	0	0	9	62	4.127134385	0.34336531	0	0.439	0	4.652	0	0.415
2/17/2018	151.554445	100607.5	0	0	0	0	0	0	0	10	63	4.143134726	0.022712321	1	0.457	0	5.216	0	0.404
2/24/2018	147.9236765	111991	0	0	0	0	0	0	0	11	64	4.158883083	0.712887876	0	0.431	0	4.22	0	0.396
3/3/2018	148.1859532	104067	0	0	0	0	0	0	0	12	65	4.17438727	0.937064602	0	0.978	0	1.808	0	0.593
3/10/2018	150.2277548	103715	0	0	0	0	0	0	0	13	66	4.189654742	0.445993072	0	1.03	0	0	0	0.612
3/17/2018	146.8002128	107676	0	0	0	0	0	0	0	14	67	4.204692619	0.946937223	0	1.003	0	5.026	0	0.566
3/24/2018	151.0922692	100176.5	0	0	0	0	0	0	0	15	68	4.219507705	0.712898685	0	1.911	0	2.152	0	0.548
3/31/2018	154.4560613	99204.5	0	0	0	0	0	0	0	16	69	4.234106505	0.103272743	0	2.078	0	3.087	0	0.449
4/7/2018	153.1352928	112799	0	404	0	0	0	0	0	17	70	4.248495242	0.17517205	0	0.573	0	2.778	0	0.169
4/14/2018	150.3602548	116380	0	2762	0	0	0	0	0	18	71	4.262679877	0.268905863	0	0.787	0	3.793	0	0.178
4/21/2018	151.9927628	118230	0	446	0	0	0	0	0	19	72	4.276666119	0.614856519	0	0.833	0	2.766	0	0.177
4/28/2018	156.0608532	116141	0	0	0	0	0	0	0	20	73	4.290459441	0.420707587	0	0.825	0	2.426	0	0.172
5/5/2018	155.7857676	110084	0	139	0	0	0	0	0	21	74	4.304065093	0.071737144	1	0.775	0	0.929	0	0.17
5/12/2018	157.1720051	110711.5	0	116	0	0	0	0	0	22	75	4.317488114	0.358493834	0	0.678	0	1.05	0	0.406
5/19/2018	163.436199	105896	0	161	0	0	0	0	0	23	76	4.33073334	0.711434881	0	0.632	0	1.238	0	0.361
5/26/2018	165.1408097	96174	0	137	0	0	0	0	0	24	77	4.343805422	0.189849902	0	0.649	0	1.454	0	0.347
6/2/2018	159.3296435	76800	0	63	0	0	0	0	0	25	78	4.356708827	0.147966351	0	0.653	0	1.379	0	0.368
6/9/2018	164.1158884	107653	0	0	0	0	0	0	0	26	79	4.369447852	0.561835524	0	0.613	0	1.496	0	0.391
6/16/2018	169.0852617	118362	0	0	0	0	0	0	0	27	80	4.382026635	0.270108697	0	0.534	0	1.454	0	0.367
6/23/2018	166.0025177	112843	0	0	0	0	0	0	0	28	81	4.394449155	0.325199114	0	0.457	0	1.593	0	0.354
6/30/2018	165.2483388	109688	0	0	0	0	0	0.428571429	0	29	82	4.406719247	0.569178363	0	0.305	0	1.844	0	0.225
7/7/2018	169.1308671	111521	0	0	0	0	0	0.571428571	0	30	83	4.418840608	0.042594441	1	0.659	0	1.702	0	0.251
7/14/2018	166.771706	130017	0	0	0	0	0	0	0	31	84	4.430816799	0.439210591	0	0.715	0	1.971	0	0.249
7/21/2018	164.3387973	124510	0	0	0	0	0	0	0	32	85	4.442651256	0.91743514	0	0.666	0	1.915	0	0.252
7/28/2018	167.1475336	107218.5	0	0	0	0	0	0	0	33	86	4.454347296	0.525841848	0	0.669	0	1.91	0	0.251
8/4/2018	166.8347808	117608.5	0	0	0	0	0	0	0	34	87	4.465908119	0.731815951	0	0.647	0	2.574	0	0.225
8/11/2018	165.689369	124254	0	0	0	0	0	0	0	35	88	4.477336814	0.905223561	0	0.639	0	2.765	0	0.235
8/18/2018	168.7611693	136341.5	0	0	0	0	0	0	0	36	89	4.48863637	0.576003754	0	0.608	0	2.774	0	0.205
8/25/2018	174.2953779	114391	0	0	0	0	0	0	0	37	90	4.49980967	0.187943059	0	2.886	0	2.467	0	0.678
9/1/2018	173.4966987	120689.5	0	0	0	0	0	0	0	38	91	4.510859507	0.331325962	0	3.949	0	2.371	0	0.911
9/8/2018	174.7385276	132231.5	0	0	0	0	0	0	0	39	92	4.521788577	0.698873759	0	3.898	0	2.391	0	0.874
9/15/2018	177.0594001	136401.5	0	0	0	0	0	0	0	40	93	4.532599493	0.121563136	0	3.71	0	2.6	0	0.809
9/22/2018	179.4445933	124869.5	0	0	0	0	0	0	0	41	94	4.543294782	0.180665822	0	3.461	0	2.466	0	0.789
9/29/2018	175.7685433	126119.5	0	0	0	0	0	0	0	42	95	4.553876892	0.270639322	0	2.426	0	2.498	0	0.702
10/6/2018	173.2118858	141321	0	0	0	0	0	0	0	43	96	4.564348191	0.653211926	0	0.61	0	3.005	0	0.429
10/13/2018	172.3725149	128691	0	0	0	0	0	0	0	44	97	4.574710979	0.421372533	0	0.563	0	3.097	0	0.426
10/20/2018	170.7967455	134658.5	0	0	0	0	0	0	0	45	98	4.584967479	0.037977703	1	0.514	0	3.034	0	0.654
10/27/2018	177.4304797	127840.5	0	0	0	0	0	0	0	46	99	4.59511985	0.270806283	0	0.51	0	3.033	0	0.468
11/3/2018	175.007395	146412	0	0	0	0	0	0	0	47	100	4.605170186	0.427733922	0	0.486	0	2.967	0	0.247
11/10/2018	168.8554027	141036.5	0	89	0	0	0	0	0	48	101	4.615120517	0.820103093	0	0.465	0	3.043	0	0.131
11/17/2018	164.0023217	156110	0	0	0	0	0	0	0.285714286	49	102	4.624972813	0.843453121	0	0.449	0	2.619	0	0.128
11/24/2018	162.518717	132397	0	0	0	0	0	0	0.714285714	50	103	4.634728988	0.876910094	0	0.409	0	2.361	0	0.119
12/1/2018	163.3508477	156222.5	0	0	0	0	0	0	0	51	104	4.644390899	0.267219996	0	0.294	0	1.957	0	0.09

Figura 44: **Variables Marca 1**: La siguiente tabla contiene las variables para la regresión de la **Marca 1.**

PBAN1	SBAN1	SBAN2	SBAN3	SBAN4	TBAN1	TBAN2	XBAN1	XBAN2	INTERCEP
1.132	6.075	0	0.259	0	261.992	0	4803	0	1
3.087	7.443	0	0.263	0	0.118	0	4530	0	1
4.385	12.226	0	0.263	0	0	0	5015	0	1
4.811	6.264	0	0.205	0	0	0	4088	0	1
6.443	1.31	0	0.093	0	400.625	0	3833	0	1
6.419	3.148	0	0.06	0	329.966	0	4600	0	1
5.158	1.808	0	0.056	0	348.137	0	5421	0	1
4.472	0.164	0	0.052	0	353.394	0	4543	0	1
6.406	0.441	0	0.058	0	316.491	0	4576	0	1
6.401	0.983	0	0.078	0	314.637	0	4466	0	1
5.059	0.898	0	0.08	0	284.185	0	5855	0	1
3.716	0.93	0	0.081	0	313.141	0	4769	0	1
3.377	1.091	0	0.079	0	326.914	0	5408	0	1
2.984	1.089	0	0.077	0	257.942	0	5318	0	1
5.241	0.902	0	0.06	0	282.105	0	4832	0	1
5.424	0.727	0	0.075	0	302.843	0	4261	0	1
4.705	0.873	0	0.197	0	11.174	0	3868	0	1
4.911	0.9	0	0.098	0	204.898	0	5913	0	1
5.688	0.938	0	0.079	0	180.551	0	4272	0	1
4.945	0.829	0	0.145	0	239.524	0	3428	0	1
4.428	0.821	0	0.095	0	181.667	0	5016	0	1
4.276	0.834	0	0.081	0	207.033	0	4379	0	1
6.713	1.299	0	0.091	0	201.022	0	5640	0	1
6.231	1.005	0	0.105	0	215.223	0	5030	0	1
6.176	0.714	0	0.106	0	189.807	0	5859	0	1
4.654	0.81	0	0.097	0	266.527	0	5417	0	1
5.071	0.458	0	0.099	0	215.57	0	4657	0	1
6.312	0.347	0	0.091	0	247.696	0	6685	0	1
5.077	0.4	0	0.088	0	270.744	0	6102	0	1
3.48	0.375	0	0.102	0	0.483	0	6482	0	1
3.31	0.478	0	0.089	0	193.446	0	5775	0	1
5.36	0.511	0	0.089	0	217.636	0	5757	0	1
5.65	0.649	0	0.09	0	194.034	0	6732	0	1
6.071	0.736	0	0.083	0	195.672	0	7267	0	1
8.195	0.752	0	0.093	0	181.107	0	7129	0	1
6.379	0.532	0	0.095	0	222.353	0	6603	0	1
5.312	0.6	0	0.086	0	196.414	0	7711	0	1
4.687	0.654	0	0.085	0	201.041	0	6527	0	1
3.948	0.705	0	0.081	0	0	0	7008	0	1
2.93	0.995	0	0.088	0	200.569	0	6557	0	1
2.63	0.577	0	0.109	0	165.178	0	6687	0	1
1.905	0.535	0	0.131	0	185.01	0	4954	0	1
1.418	0.542	0	0.11	0	0	0	9669	0	1
1.176	0.589	0	0.106	0	0	0	8984	0	1
1.17	0.978	0	0.075	0	0	0	8605	0	1
1.066	0.456	0	0.061	0	0	0	8137	0	1
0.671	0.468	0	0.045	0	0	0	6595	0	1
0.701	2.038	0	0.043	0	0	0	5657	0	1
0.529	2.237	0	0.075	0	0	0	5484	0	1
0.505	1.772	0	0.083	0	0	0	6825	0	1
0.233	1.409	0	0.065	0	0	0	5090	0	1
0.13	1.761	0	0.08	0	0	0	6663	0	1
0.085	0	1.54	0	0.096	0	0	0	6613	1
0.097	0	1.668	0	0.062	0	0	0	6471	1
0.312	0	1.457	0	0.038	0	0	0	6635	1
0.08	0	1.045	0	0.019	0	0	0	4740	1
0.145	0	1.486	0	0.076	0	195.043	0	2988	1
0.166	0	2.014	0	0.131	0	201.42	0	5198	1
0.113	0	1.773	0	0.117	0	215.426	0	9565	1
0	0	0.81	0	0.04	0	220.669	0	4693	1
0.008	0	0.932	0	0.034	0	225.329	0	6419	1
0.008	0	1.055	0	0.237	0	0.193	0	5176	1
0	0	1.468	0	0.391	0	127.918	0	6177	1
0	0	2.085	0	0.36	0	138.369	0	6944	1
0	0	1.731	0	0.222	0	154.435	0	6609	1
0	0	1.473	0	0.11	0	177.021	0	7280	1
0	0	1.247	0	0.132	0	0	0	7620	1
0	0	1.598	0	0.147	0	0	0	5682	1
0	0	1.209	0	0.128	0	0.23	0	8156	1
0	0	0.626	0	0.088	0	125.561	0	6609	1
0	0	0.432	0	0.052	0	0	0	6741	1
0	0	0.395	0	0.037	0	123.201	0	9144	1
0	0	0.404	0	0.022	0	0.221	0	9002	1
0	0	0.512	0	0.056	0	115.776	0	9159	1
0	0	0.367	0	0.08	0	126.778	0	6805	1
0	0	0.444	0	0.073	0	0.343	0	6748	1
0	0	0.482	0	0.043	0	124.014	0	12359	1
0	0	1.13	0	0.025	0	124.254	0	8508	1
0	0	1.795	0	0.05	0	0	0	9043	1
0	0	1.833	0	0.086	0	0.202	0	11471	1
0	0	1.272	0	0.089	0	186.248	0	10440	1
0	0	1.521	0	0.08	0	149.318	0	10979	1
0	0	1.95	0	0.077	0	125.903	0	8044	1
0	0	1.673	0	0.08	0	119.474	0	11437	1
0	0	2.619	0	0.072	0	131.456	0	11425	1
0	0	2.079	0	0.05	0	139.482	0	11413	1
0	0	1.57	0	0.055	0	0	0	8587	1
0	0	1.928	0	0.056	0	154.801	0	16542	1
0	0	2.152	0	0.068	0	140.732	0	12231	1
0	0	2.137	0	0.073	0	118.701	0	10857	1
0	0	1.812	0	0.083	0	0.217	0	6986	1
0	0	1.971	0	0.101	0	132.119	0	7415	1
0	0	1.663	0	0.152	0	130.182	0	7973	1
0	0	1.752	0	0.225	0	117.138	0	7491	1
0	0	2.215	0	0.195	0	0.065	0	8614	1
0	0	1.766	0	0.135	0	145.265	0	8700	1
0	0	1.691	0	0.093	0	140.911	0	8139	1
0	0	1.846	0	0.092	0	0	0	6556	1
0	0	1.614	0	0.089	0	0	0	6563	1
0	0	1.012	0	0.096	0	0	0	7873	1
0	0	0.878	0	0.099	0	0	0	7830	1
0	0	1.044	0	0.092	0	0	0	7111	1
0	0	0.757	0	0.161	0	0	0	4772	1
0	0	0.767	0	0.296	0	0	0	4546	1

Figura 45: **Variables Marca 1**: La siguiente tabla contiene las variables para la regresión de la **Marca 1.**

Semana	LNRP	SALES	VPC	XMAS	THNXGIV	NEWYEAR	EASTER	TREND	TREND2	LNTREND	RANDOM	HOLDOUT	GCHA1	GCHA2	MCHA1	MCHA2	OCHA10	OCHA11	OCHA12
7/9/2016	15.46705882	37804	0	0	0	0	0	-52	1	0	0.18496257	0	67.67	0	3	0	0	0	13.03896004
7/16/2016	14.48952381	40553	0	0	0	0	0	-51	2	0.693147181	0.970088716	0	118.327	0	0.656	0	0	0	21.4798988
7/23/2016	14.11888889	38315	0	0	0	0	0	-50	3	1.098612289	0.399824306	0	121.302	0	1.735	0	0	0	13.71070568
7/30/2016	14.68380952	37063	0	0	0	0	0	-49	4	1.386294361	0.259398645	0	137.384	0	0.686	0	0	0	12.10481182
8/6/2016	14.79454545	41825	3066	0	0	0	0	-48	5	1.609437912	0.921602578	0	158.962	0	0.981	0	0	2.464714953	1.593959228
8/13/2016	14.6664	37417	1902	0	0	0	0	-47	6	1.791759469	0.96927735	0	155.411	0	3.114	0	0	3.166439062	0
8/20/2016	14.23259259	40910	1487	0	0	0	0	-46	7	1.945910149	0.542979173	0	154.212	0	3.067	0	0	3.078455908	0
8/27/2016	10.47733333	42267	4339	0	0	0	0	-45	8	2.079441542	0.531691723	0	251.782	0	4.554	0	0	4.351416388	0
9/3/2016	7.622051282	47565	2578	0	0	0	0	-44	9	2.197224577	0.049794026	1	224.076	0	5.277	0	0	3.013852809	0
9/10/2016	8.105098039	41026	2185	0	0	0	0	-43	10	2.302585093	0.066566552	1	200.222	0	4.404	0	0	0	0
9/17/2016	5.861521739	48821	1195	0	0	0	0	-42	11	2.397895273	0.819318571	0	193.594	0	2.641	0	0	0	0
9/24/2016	8.649411765	49026	1783	0	0	0	0	-41	12	2.48490665	0.523870521	0	229.224	0	5.522	0	0	0	0
10/1/2016	4.017798165	47568	2331	0	0	0	0	-40	13	2.564949357	0.853394311	0	0	0	0	0	0	0	0
10/8/2016	11.78540541	43383	7546	0	0	0	0	-39	14	2.63905733	0.067184577	1	107.894	0	3.31	0	0	0	0
10/15/2016	5.536703297	46517	1366	0	0	0	0	-38	15	2.708050201	0.957023858	0	139.976	0	3.578	0	0	0	0
10/22/2016	3.985888889	49687	0	0	0	0	0	-37	16	2.772588722	0.297193964	0	182.712	0	3.767	0	0	0	0
10/29/2016	7.858421053	48746	0	0	0	0	0	-36	17	2.833213344	0.272611789	0	187.408	0	4.302	0	0	0	0
11/5/2016	5.469666667	47021	0	0	0	0	0	-35	18	2.890371758	0.689929631	0	202.839	0	4.057	0	0	0	0
11/12/2016	3.115616438	43596	2798	0	0	0	0	-34	19	2.944438979	0.976764862	0	161.409	0	3.046	0	0	0	0
11/19/2016	3.870506329	52556	2019	0	0.285714286	0	0	-33	20	2.995732274	0.226507519	0	153.883	0	2.982	0	0	0	0
11/26/2016	1.406956522	49585	1086	0	0.714285714	0	0	-32	21	3.044522438	0.68823655	0	174.647	0	3.754	0	0	0	0
12/3/2016	4.639402985	51302	1463	0	0	0	0	-31	22	3.091042453	0.412763866	0	14.443	0	1.227	0	0	0	0
12/10/2016	2.093550296	47556	1434	0	0	0	0	-30	23	3.135494216	0.558554113	0	0	0	0	0	0	0	0
12/17/2016	1.465561224	50963	1263	0	0	0	0	-29	24	3.17805383	0.287225611	0	0	0	0	0	0	0	0
12/24/2016	1.463984375	51005	794	0.857142857	0	0	0	-28	25	3.218875825	0.475789305	0	0	0	0	0	0	0	0
12/31/2016	1.407669173	52013	829	0.142857143	0	0.857142857	0	-27	26	3.258096538	0.844986977	0	0	0	0	0	0	0	0
1/7/2017	1.452474747	47432	2381	0	0	0.142857143	0	-26	27	3.295836866	0.634524118	0	3.321	0	0	0	0	0	0
1/14/2017	2.574193548	55020	1037	0	0	0	0	-25	28	3.33220451	0.590364669	0	58.55	0	4.162	0	0	0	0
1/21/2017	3.284725275	54464	175	0	0	0	0	-24	29	3.36729583	0.582581526	0	53.721	0	3.788	0	1.804277458	0	0
1/28/2017	1.720716846	53709	0	0	0	0	0	-23	30	3.401197382	0.377013369	0	95.147	0	2.646	0	3.078141742	0	0
2/4/2017	4.723647059	51076	0	0	0	0	0	-22	31	3.433987204	0.72836156	0	104.892	0	2.304	0	2.514874693	0	0
2/11/2017	2.577784091	57297	0	0	0	0	0	-21	32	3.465735903	0.506603529	0	109.636	0	2.115	0	2.272430423	0	0
2/18/2017	3.118740157	54169	0	0	0	0	0	-20	33	3.496507561	0.931213594	0	85.889	0	1.871	0	1.771711954	0	0
2/25/2017	2.649669811	52817	0	0	0	0	0	-19	34	3.526360525	0.92912005	0	70.941	0	2.712	0	1.312919488	0	0
3/4/2017	6.389716981	53170	0	0	0	0	0	-18	35	3.555348061	0.589660338	0	151.912	0	6.819	0	1.499926761	0	0
3/11/2017	3.660283019	46782	0	0	0	0	0	-17	36	3.583518938	0.297222846	0	141.916	0	5.378	0	1.61406403	0	0
3/18/2017	3.264117647	55831	0	0	0	0	0	-16	37	3.610917913	0.391042433	0	208.516	0	14.653	0	1.476126589	0	0
3/25/2017	2.3426875	58827	0	0	0	0	0	-15	38	3.63758616	0.472429176	0	154.506	0	17.671	0	1.458799533	0	0
4/1/2017	3.413194444	56404	0	0	0	0	0	-14	39	3.663561646	0.679525748	0	161.068	0	12.39	0	1.69043685	0	0
4/8/2017	2.279708029	53750	0	0	0	0	0	-13	40	3.688879454	0.168088351	0	62.341	0	2.089	0	0.466215452	0	0
4/15/2017	2.924537037	53411	0	0	0	0	0.857142857	-12	41	3.713572067	0.166526103	0	50.341	0	2.384	0	1.50239679	0	0
4/22/2017	4.233295455	62666	0	0	0	0	0.142857143	-11	42	3.737669618	0.871104887	0	84.092	0	2.309	0	0.708022176	0	0
4/29/2017	3.611655629	59585	0	0	0	0	0	-10	43	3.761200116	0.298789533	0	103.829	0	2.222	0	0.239529249	0	0
5/6/2017	2.408390805	61720	0	0	0	0	0	-9	44	3.784189634	0.934641764	0	122.48	0	4.214	0	2.41377118	0	0
5/13/2017	5.577701149	67327	0	0	0	0	0	-8	45	3.80666249	0.900470831	0	131.638	0	9.477	0	3.67864441	0	0
5/20/2017	2.383586207	70955	0	0	0	0	0	-7	46	3.828641396	0.568783468	0	135.759	0	7.239	0	3.633443154	0	0
5/27/2017	2.653679245	94821.5	0	0	0	0	0	-6	47	3.850147602	0.049545658	1	149.344	0	6.753	0	2.923183119	0	0
6/3/2017	3.676233766	78074	0	0	0	0	0	-5	48	3.871201011	0.135588261	0	160.427	0	6.713	0	3.664904931	0	0
6/10/2017	2.102755906	76267.5	0	0	0	0	0	-4	49	3.891820298	0.511317883	0	158.479	0	7.088	0	3.390239726	0	0
6/17/2017	3.436052632	79281	0	0	0	0	0	-3	50	3.912023005	0.433204564	0	166.637	0	6.862	0	2.701059237	0	0
6/24/2017	3.351125	75058	0	0	0	0	0	-2	51	3.931825633	0.17610578	0	127.45	0	6.259	0	4.084143765	0	0
7/1/2017	2.457027027	89259	0	0	0	0	0	-1	52	3.951243719	0.665035991	0	124.762	0	5.117	0	2.572480451	0	0
7/8/2017	3.82	79542.5	0	0	0	0	0	0	53	3.970291914	0.404818663	0	0	41.516	0	0.583	0	0	0
7/15/2017	7.457647059	73853	0	0	0	0	0	1	54	3.988984047	0.124548768	0	0	101.055	0	5.075	0	0	0
7/22/2017	6.842807018	80646	0	0	0	0	0	2	55	4.007333185	0.453486754	0	0	120.113	0	6.854	0	0	0
7/29/2017	4.898714286	86023	0	0	0	0	0	3	56	4.025351691	0.199553141	0	0	172.809	0	9.325	0	0	0
8/5/2017	2.666302817	100993	0	0	0	0	0	4	57	4.043051268	0.574837174	0	0	183.821	0	3.26	0	0	0
8/12/2017	13.8865625	93636	0	0	0	0	0	5	58	4.060443011	0.738473961	0	0	191.589	0	4.876	0	0	0
8/19/2017	4.59344	89303.5	0	0	0	0	0	6	59	4.077537444	0.439812204	0	0	174.457	0	5.814	0	0	0
8/26/2017	5.57	82598	0	0	0	0	0	7	60	4.094344562	0.049367048	1	0	168.538	0	6.307	0	0	0
9/2/2017	3.903717949	108575	0	0	0	0	0	8	61	4.110873864	0.522382167	0	0	256.472	0	2.647	0	0	0
9/9/2017	3.034247788	96627	0	0	0	0	0	9	62	4.127134385	0.34336531	0	0	298.35	0	9.465	0	0	0
9/16/2017	2.135113636	100607.5	0	0	0	0	0	10	63	4.143134726	0.022712321	1	0	402.634	0	13.538	0	0	0
9/23/2017	3.871078431	111991	0	0	0	0	0	11	64	4.158883083	0.712887876	0	0	400.571	0	5.899	0	0	0
9/30/2017	4.123636364	104067	0	0	0	0	0	12	65	4.17438727	0.937064602	0	0	350.122	0	1.359	0	0	0
10/7/2017	3.171652174	103715	0	0	0	0	0	13	66	4.189654742	0.445993072	0	0	204.942	0	3.788	0	0	0
10/14/2017	3.524789916	107676	0	0	0	0	0	14	67	4.204692619	0.946937223	0	0	200.587	0	4.075	0	0	0
10/21/2017	3.808023256	100176.5	0	0	0	0	0	15	68	4.219507705	0.712898685	0	0	179.18	0	3.966	0	0	0
10/28/2017	3.301504425	99204.5	0	0	0	0	0	16	69	4.234106505	0.103272743	0	0	187.189	0	3.797	0	0	0
11/4/2017	2.779552239	112799	0	0	0	0	0	17	70	4.248495242	0.17517205	0	0	187.592	0	4.525	0	0	0
11/11/2017	2.256516854	116380	0	0	0	0	0	18	71	4.262679877	0.268905863	0	0	191.202	0	4.286	0	0	0
11/18/2017	2.857826087	118230	0	0	0.285714286	0	0	19	72	4.276666119	0.614856519	0	0	222.714	0	4.34	0	0	0
11/25/2017	3.505272727	116141	0	0	0.714285714	0	0	20	73	4.290459441	0.420707587	0	0	256.106	0	3.247	0	0	0
12/2/2017	4.3047	110084	0	0	0	0	0	21	74	4.304065093	0.071737144	1	0	204.761	0	3.198	0	0	0
12/9/2017	3.704069767	110711.5	0	0	0	0	0	22	75	4.317488114	0.358493834	0	0	240.012	0	3.622	0	0	0
12/16/2017	6.933387097	105896	0	0	0	0	0	23	76	4.33073334	0.711434881	0	0	396.651	0	5.86	0	0	0
12/23/2017	4.566216216	96174	0	0.714285714	0	0	0	24	77	4.343805422	0.189849902	0	0	231.788	0	7.92	0	0	0
12/30/2017	3.463424658	76800	0	0.285714286	0	0.714285714	0	25	78	4.356708827	0.147966351	0	0	127.641	0	3.78	0	0	0
1/6/2018	3.017157895	107653	0	0	0	0.285714286	0	26	79	4.369447852	0.561835524	0	0	41.643	0	7.255	0	0	0
1/13/2018	4.79372549	118362	0	0	0	0	0	27	80	4.382026635	0.270108697	0	0	50.357	0	11.739	0	0	0
1/20/2018	6.968510638	112843	0	0	0	0	0	28	81	4.394449155	0.325199114	0	0	46.697	0	10.984	0	0	0
1/27/2018	6.676779661	109688	0	0	0	0	0	29	82	4.406719247	0.569178363	0	0	42.389	0	10.455	0	0	0
2/3/2018	4.878850575	111521	0	0	0	0	0	30	83	4.418840608	0.042594441	1	0	72.155	0	15.297	0	0	0
2/10/2018	7.793538462	130017	0	0	0	0	0	31	84	4.430816799	0.439210591	0	0	79.471	0	14.687	0	0	0
2/17/2018	4.316956522	124510	0	0	0	0	0	32	85	4.442651256	0.91743514	0	0	70.215	0	8.716	0	0	0
2/24/2018	7.039677419	107218.5	0	0	0	0	0	33	86	4.454347296	0.525841848	0	0	81.648	0	10.203	0	0	0
3/3/2018	6.984782609	117608.5	0	0	0	0	0	34	87	4.465908119	0.731815951	0	0	78.157	0	13.347	0	0	0
3/10/2018	8.45825	124254	0	0	0	0	0	35	88	4.477336814	0.905223561	0	0	75.603	0	11.82	0	0	0
3/17/2018	9.163225806	136341.5	0	0	0	0	0	36	89	4.48863637	0.576003754	0	0	84	0	8.638	0	0	0
3/24/2018	9.182413793	114391	0	0	0	0	0	37	90	4.49980967	0.187943059	0	0	66.787	0	9.764	0	0	0
3/31/2018	11.13205882	120689.5	0	0	0	0	0.857142857	38	91	4.510859507	0.331325962	0	0	65.077	0	10.585	0	0	0
4/7/2018	10.66297297	132231.5	0	0	0	0	0.142857143	39	92	4.521788577	0.698873759	0	0	43.214	0	6.598	0	0	0
4/14/2018	8.951489362	136401.5	0	0	0	0	0	40	93	4.532599493	0.121563136	0	0	73.994	0	12.019	0	0	0
4/21/2018	9.16245614	124869.5	0	0	0	0	0	41	94	4.543294782	0.180665822	0	0	71.631	0	10.275	0	0	0
4/28/2018	9.099245283	126119.5	0	0	0	0	0	42	95	4.553876892	0.270639322	0	0	72.496	0	9.369	0	0	0
5/5/2018	8.943018868	141321	0	0	0	0	0	43	96	4.564348191	0.653211926	0	0	74.593	0	8.184	0	0	0
5/12/2018	9.245714286	128691	0	0	0	0	0	44	97	4.574710979	0.421372533	0	0	69.749	0	7.235	0	0	0
5/19/2018	8.973333333	134658.5	0	0	0	0	0	45	98	4.584967479	0.037977703	1	0	57.972	0	8.456	0	0	0
5/26/2018	9.407692308	127840.5	0	0	0	0	0	46	99	4.59511985	0.270806283	0	0	47.984	0	11.066	0	0	0
6/2/2018	8.705454545	146412	0	0	0	0	0	47	100	4.605170186	0.427733922	0	0	11.596	0	11.151	0	0	0
6/9/2018	8.874615385	141036.5	0	0	0	0	0	48	101	4.615120517	0.820103093	0	0	58.954	0	6.47	0	0	0
6/16/2018	10.55	156110	0	0	0	0	0	49	102	4.624972813	0.843453121	0	0	89.51	0	11.214	0	0	0
6/23/2018	9.062307692	132397	0	0	0	0	0	50	103	4.634728988	0.876910094	0	0	193.403	0	27.457	0	0	0
6/30/2018	8.675454545	156222.5	0	0	0	0	0	51	104	4.644390899	0.267219996	0	0	204.202	0	21.097	0	0	0

Figura 46: **Resultado Marca 2**: La siguiente tabla compara los distintos resultados obtenidos por los modelos de la **Marca 2.**

OCHA13	OCHA14	OCHA15	OCHA16	OCHA3	OCHA4	OCHA5	OCHA6	OCHA8	OCHA9	SCHA1	SCHA2	SCHA4	SCHA5	TCHA1	TCHA2	UCHA0	XCHA1	XCHA2	INTERCEP
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.133	0	0	0	185.516	0	0	1.568	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.075	0	0	0	0	0	0	2.072	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.483	0	0	0	0	0	0	1.574	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.219	0	0	0	151.375	0	0	5.929	0	1
0	0	0	0	2.787781119	0	0	0	0	0	2.571	0	0	0	238.256	0	0	12.452	0	1
0	0	0	0	3.674650536	0	0.009773244	0	0	0	2.803	0	0	0	232.206	0	0	9.296	0	1
0	0	0	0	3.634912642	0	0.770786343	0	0	0	3.268	0	0	0	41.191	0	0	22.193	0	1
0	0	0	0	3.54659321	0	2.199176234	0	0	0	5.311	0	0	0	0.136	0	0	26.301	0	1
0	0	0	0	3.972357675	0	2.190665183	0	0	0	5.622	0	0	0	167.781	0	0	25.353	0	1
0	0	0	0	3.526803496	0	2.441261193	0	0	0	8.042	0	0	0	0	0	0	30.519	0	1
0	0	0	0	3.047132328	0	2.741964429	0	0	0	8.066	0	0	0	173.633	0	0	32.298	0	1
0	0	0	0	2.96252485	0	2.7773215	0	0	0	6.028	0	0	0	1.621	0	0	42.115	0	1
0	0	0	0	0.882560455	0	2.239578391	0	0	0	6.878	0	0	0	218.171	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0.496422406	0	0	0	6.246	0	0	0	0.11	0	0	25.088	0	1
0	0	0	0	0	0	0.511727189	0	0	0	5.548	0	0	0	170.109	0	0	34.159	0	1
0	0	0	0	0	0	0.627149684	0	0	0	5.275	0	0	0	9.795	0	0	32.698	0	1
0	0	0	0	0	0	0.043108963	0	0	0	4.805	0	0	0	147.963	0	0	53.299	0	1
0	0	0	0	0	0	1.102847247	0	0	0	6.118	0	0	0	0.027	0	0	52.352	0	1
0	0	0	0	0	0	2.18050591	0	0	0	5.971	0	0	0	103.631	0	0	47.324	0	1
0	0	0	0	0	0	1.1661513	0	0	0	6.176	0	0	0	0.036	0	0	41.744	0	1
0	0	0	0	0	0	0.581292457	0.033332955	0	0	5.958	0	0	0	158.722	0	0	25.51	0	1
0	0	0	0	0	0	0.130018792	3.748783654	0	0	6.062	0	0	0	0.073	0	0	2.864	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.951	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.868	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.74	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.822	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.04	0	0	0	208.783	0	0	8.184	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.794	0	0	0	0.028	0	0	22.823	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.672	0	0	0	0	0	0	28.182	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.317	0	0.66652274	0	274.535	0	0	27.18	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.668	0	2.722443737	0	165.494	0	0	20.896	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11.306	0	8.297986628	0	187	0	0	16.65	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.609	0	1.919313926	0	0.009	0	0	24.604	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.96	0	0.984668195	0	0	0	0	18.741	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.381	0	1.264342556	0	169.172	0	0	18.681	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.884	0	0.822937031	0	158.549	0	0	36.823	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.326	0	0.629564435	0	0.002	0	0	48.152	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.598	0	0.574998075	0	0	0	0	69.503	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.878	0	0.520142424	0	0.005	0	0	83.348	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.947	0	0.537006061	0	164.482	0	0	30.965	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.707	0	0.588125805	0	177.037	0	0	32.461	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.599	0	0.640106972	0	0.299	0	0	38.863	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.075	0	0.635609142	0	161.309	0	0	39.942	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.744	0	0.538242458	0	0.856	0	0	42.107	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.022	0	0.555932509	0	141.888	0	0	45.495	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.841	0	0.428694227	0	1.137	0	0	43.666	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.554	0	0.547409481	0	157.15	0	0	49.761	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.76	0	0.656475867	0	3.126	0	0	53.442	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.574	0	0.699922029	0	150.735	0	0	60.699	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.465	0	0.705970421	0	2.179	0	0	56.31	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.388	0	0.747079223	0	156.578	0	0	59.516	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10.063	0	2.064551819	0	4.967	0	0	53.469	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.144	0	0.899692194	0	175.559	0	0	22.513	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.172	0	1.008340305	0	0.047	0	0	20.498	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.956	0	0.55905114	0	164.65	0	0	27.989	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.672	0	0.755514727	0	2.285	0	0	38.797	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.753	0	0.759858698	0	197.687	0	0	16.461	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.175	0	0.808573826	0	0.011	0	0	46.975	1
0	0.513382781	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.651	0	0.897266387	0	181.832	0	0	56.192	1
0	4.439023647	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.06	0	0.876000736	0	0.558	0	0	52.093	1
0	5.729991109	0	0	0	0.774595955	0	0	0	0	0	5.624	0	0.894645264	0	200.536	0	0	43.472	1
0	5.852551905	0	0	0	4.005211549	0	0	0	0	0	5.057	0	0.651289819	0	0.124	0	0	81.575	1
0	7.722476305	0	0	0	3.827915793	0	0	0	0	0	4.714	0	0.572443285	0	166.307	0	0	87.446	1
0	11.61817095	0	0	0	4.249462506	0	0	0	0	0	4.537	0	0.487069278	0	0.031	0	0	85.202	1
0	7.521004483	0	0	0	4.038164004	0	0	0	0	0	5.3	0	0.280448261	0	136.507	0	0	82.814	1
1.492775561	0.098512793	0	0	0	5.410296012	0	0	0	3.322149473	0	4.164	0	0.374885183	0	0.792	0	0	17.172	1
4.751721403	0	0	0	0	5.606324741	0	0	0	3.304908099	0	4.446	0	0.795129165	0	141.523	0	0	24.376	1
7.013951095	0	0	0	0	0.883508482	0	0	0	2.732465735	0	10.019	0	1.182959659	0	0	0	0	40.445	1
5.284713322	0	0	0	0	0	0	0	0	2.62330814	0	7.918	0	1.294956729	0	148.734	0	0	50.5	1
5.069029389	0	0	0	0	0	0	0	0	2.657111883	0	5.186	0	0.975753611	0	1.347	0	0	57.047	1
4.346925928	0	0	0	0	0	0	0	0	2.423714866	0	10.022	0	0.265990161	0	132.869	0	0	85.925	1
3.568207116	0	0	0	0	0	0	0	0	2.473218634	0	7.15	0	0.778602727	0	0.001	0	0	103.718	1
2.058236247	0	0	0	0	0	0	0	0	1.987329552	0	6.833	0	1.391388285	0	166.158	0	0	110.98	1
1.481333826	0	0	0	0	0	0	0	0	2.620139758	0	7.304	0	1.541255755	0	1.494	0	0	136.441	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.928	0	0.81829087	0	122.032	0	0	86.878	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.598	0	0.509976702	0	1.068	0	0	99.249	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.026	0	0.264392611	0	188.475	0	0	134.566	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	41.654	0	0.126768414	0	8.543	0	0	74.602	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.221631903	0	316.524	0	0	25.553	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.395822848	0	17.63	0	0	31.969	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.493429995	0	262.286	0	0	38.147	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.543672652	0	0.193	0	0	36.889	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.536888134	0	275.189	0	0	31.245	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.549603117	0	0.271	0	0	33.667	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.342312308	0	146.079	66.493	0	50.581	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.308470791	0	0.77	59.135	0	66.562	1
0	0	0	0	0	0	0	0	10.75021969	0	0	0	0	0.239831438	0	199.855	65.001	0	114.323	1
0	0	0	0	0	0	0	0	13.24753423	0	0	0	0	0.259218541	0	152.921	71.796	0	104.647	1
0	0	0	0	0	0	0	0	14.78435481	0	0	0	0	0.23184369	0	128.862	12.804	0	128.651	1
0	0	0	0	0	0	0	0	14.91905569	0	0	0	0	0.584445176	0	0.574	12.76	0	125.493	1
0	0	0	0	0	0	0	0	15.45346182	0	0	0	0	1.127787999	0	157.728	12.463	0	118.889	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0.385173439	0	0	0	0	0.35312571	0	0.559	0	0	19.291	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.349368613	0	206.716	0	0	28.608	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.413064222	0	0.66	0	0	32.714	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.410277263	0	218.985	0	0	34.468	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.442164684	0	0.978	0	0	45.807	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.535016955	0	231.158	0	0	49.96	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.648567351	0	0.119	0	0	45.288	1
0	0	1.588318976	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.605570788	0	214.565	0	0	35.272	1
0	0	6.499974991	1.339590458	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.51055989	0	0.021	0	0	51.235	1
0	0	4.494953545	1.932992598	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.22587453	0	255.37	0	0	48.293	1
0	0	5.091404296	2.158561254	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.459920149	0	0.108	0	0	53.798	1
0	0	7.125437759	3.032892578	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.618350263	0	255.499	0	0	58.912	1
0	0	7.051981803	1.477161219	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.632127516	0	0.148	0	0	65.348	1

Figura 47: **Variables Marca 2**: La siguiente tabla contiene las variables para la regresión de la **Marca 2.**

6.4 Resultados de las Regresiones.

Modelo 1 Marca 1			Modelo 2 Marca 1			Modelo 3 Marca 1		
x	b - (A*x)	b - (A*x)	x	b - (A*x)	b - (A*x)	x	b - (A*x)	b - (A*x)
4.67811	0.01379	0.01887	3.32501	0.72259	1.27352	3.36878	1.48425	1.27587
-0.15206	0.04952	-0.07272	-0.24014	0.77101	1.19803	-0.24232	1.51807	1.18578
-0.14336	-0.05439	0.00210	-1.24669	0.71745	1.29551	-1.12815	1.44995	1.26870
0.00000	-0.07536	0.04287	0.49989	-0.59343	0.40548	0.50000	-0.30204	0.00865
0.00000	0.05998	0.08892	2.09983	0.34057	0.59631	2.10000	0.97273	0.39810
0.00000	-0.05678	-0.00946	0.01009	0.43100	0.83224	0.01022	1.11964	0.76159
0.00000	0.03351	-0.06046	0.00000	0.47079	0.73373	0.06652	1.14482	0.64847
0.89771	0.07201	-0.15191	0.13036	0.45444	0.75357	0.12824	1.11387	0.65370
0.00000	0.18592	0.10139	5.00003	0.52056	1.00380	5.00000	1.16538	0.88933
0.16232	-0.05336	-0.04823	0.27815	0.31373	0.82378	0.27807	0.94394	0.69471
2.49311	0.06927	-0.03657	0.87996	0.43295	0.74259	0.88000	1.04856	0.59891
0.00000	0.05327	0.05988	0.10169	0.38582	0.68226	0.10161	0.98683	0.52398
0.00000	0.02056	0.00856	0.08548	0.30563	0.57626	0.08546	0.89204	0.40338
0.24032	-0.07453	0.04885	11.99983	0.16287	0.57044	12.00000	0.73467	0.38295
0.03306	-0.00670	0.02225	0.00024	0.18039	0.60195	0.00028	0.73758	0.39986
0.16226	0.04039	-0.04196	0.03267	0.19340	0.44121	0.03000	0.73599	0.22451
0.00000	-0.00027	-0.06661	0.09679	0.12281	0.43008	0.10000	0.65079	0.19877
0.00000	-0.05373	0.05275	0.99894	0.03446	0.62074	1.00000	0.54784	0.37481
0.33442	-0.14208	0.05548	1.99787	-0.09361	0.67181	2.00000	0.40517	0.41127
0.00000	0.05973	0.09330	0.70283	0.04321	0.71140	0.70000	0.52738	0.43614
0.53832	-0.01043	0.07387	6.39760	-0.06643	0.65205	6.40000	0.40314	0.36219
	0.02783	0.04729		-0.08273	0.53335		0.37223	0.22889
	-0.03829	0.06883		-0.21036	0.50585		0.23001	0.18678
	0.02824	0.02843		-0.19308	0.40542		0.23267	0.07176
	0.01599	-0.07487		-0.24462	0.24837		0.16653	-0.09990
	0.00580	-0.30708		-0.27807	-0.13460		0.11848	-0.49748
	-0.09905	0.02178		-0.42203	0.01611		-0.04009	-0.36137
	0.04638	0.11028		-0.32561	0.01435		0.04173	-0.37773
	0.03310	0.05056		-0.38681	-0.01798		-0.03408	-0.42466
	0.00927	0.00463		-0.52756	-0.17276		-0.18944	-0.59407
	-0.08828	0.00841		-0.61326	-0.29853		-0.28974	-0.73445
	-0.07887	0.14405		-0.50078	-0.09926		-0.19186	-0.54976
	-0.08995	0.08565		-0.60549	-0.33107		-0.31117	-0.79617
	-0.07633	-0.07889		-0.67973	-0.49469		-0.40002	-0.97440
	-0.07403	-0.01339		-0.72635	-0.36590		-0.46123	-0.86021
	-0.19435	0.01569		-0.90535	-0.39039		-0.65484	-0.89931
	-0.01315	0.08771		-0.77878	-0.39212		-0.54288	-0.91564
	0.04149	-0.09952		-0.77659	-0.63725		-0.55529	-1.17537
	-0.04951	-0.05506		-0.86560	-0.59813		-0.65891	-1.15086
	-0.13921	0.02696		-0.97070	-0.57402		-0.77860	-1.14135
	-0.16136	0.04665		-1.02795	-0.55456		-0.85046	-1.13649
	-0.00623	-0.04693		-0.91832	-0.69595		-0.75543	-1.29249
	-0.05256	-0.04746		-1.00124	-0.80534		-0.85296	-1.41648
	-0.04168	0.04205		-0.94848	-0.69114		-0.81480	-1.31689
	0.02924	-0.07547		-0.74312	-0.80685		-0.62403	-1.44720
	0.05270	-0.04825		-0.44811	-0.82735		-0.34362	-1.48231
	0.32316	-0.11586		0.18654	-0.89755		0.27644	-1.56711
	0.10094	0.00762		0.38178	-0.70565		0.45709	-1.38982
	0.06165	-0.04232		0.73918	-0.73349		0.79990	-1.43226
	0.09201	0.05550		1.10884	-0.68451		1.15497	-1.39788
	0.03037	-0.10494		1.31925	-0.84662		1.35080	-1.57459
	0.17435	0.07677		1.70131	-0.69086		1.71825	-1.43345

Figura 48: **Resultado Marca 1**: La siguiente tabla compara los distintos resultados obtenidos por los modelos de la **Marca 1.**

Modelo 1 Marca 2			Modelo 2 Marca 2			Modelo 3 Marca 2		
x	b - (A*x)	b - (A*x)	x	b - (A*x)	b - (A*x)	x	b - (A*x)	b - (A*x)
4.67811	-0.02999	-0.69899	3.32501	2.69062	0.43079	3.36878	6.14379	0.39597
-0.15206	0.04163	-0.18377	-0.24014	2.71817	0.97398	-0.24232	6.10210	0.88016
-0.14336	-0.13479	-0.19043	-1.24669	2.56567	0.50129	-1.12815	5.88150	0.33811
0.00000	0.06272	-0.30604	0.49989	2.72708	-0.28109	0.50000	5.97887	-0.51526
0.00000	0.13104	0.81455	2.09983	2.63139	0.76879	2.10000	5.81735	0.46239
0.00000	0.24370	0.33056	0.01009	2.63936	0.71973	0.01022	5.75858	0.37107
0.00000	0.25974	0.28553	0.00000	2.58024	-0.66535	0.06652	5.63190	-1.10166
0.89771	-0.18742	0.14352	0.13036	1.73783	-0.95906	0.12824	4.71442	-1.45960
0.00000	-0.37701	-0.22421	5.00003	1.31006	-1.54305	5.00000	4.21429	-2.11436
0.16232	-0.01609	0.00634	0.27815	1.86614	-1.83687	0.27807	4.70447	-2.47648
2.49311	0.21325	0.31611	0.87996	1.95865	-1.88466	0.88000	4.72602	-2.59330
0.00000	-0.33991	0.04458	0.10169	1.70590	-2.11620	0.10161	4.41238	-2.88722
0.00000	0.10014	-0.05427	0.08548	1.73807	-2.26864	0.08546	4.36845	-3.10608
0.24032	0.21566	0.10372	11.99983	2.56405	-1.86529	12.00000	5.14446	-2.77074
0.03306	0.15243	0.14352	0.00024	1.94579	-1.45052	0.00028	4.44640	-2.42211
0.16226	-0.07919	-0.18984	0.03267	1.59734	-1.62382	0.03000	4.02770	-2.66074
0.00000	-0.36590	0.02489	0.09679	1.64341	-1.54734	0.10000	4.01598	-2.65247
0.00000	-0.94499	0.11407	0.99894	0.87475	-1.60403	1.00000	3.17512	-2.77633
0.33442	-0.42707	0.30576	1.99787	1.18167	-1.78854	2.00000	3.41067	-3.02912
0.00000	-0.20762	-0.04187	0.70283	1.36022	-2.44967	0.70000	3.52368	-3.75503
0.53832	-0.23828	-0.65541	6.39760	0.86432	-3.37991	6.40000	2.95661	-4.75112
	-0.26502	0.07537		1.51462	-2.30468		3.54694	-3.74013
	0.30264	-0.12700		1.90514	-2.58018		3.86464	-4.08383
	0.38432	0.73679		1.98289	-1.42352		3.87381	-2.98610
	0.11198	-0.03874		2.69783	-1.67852		4.42008	-3.39817
	0.07859	-0.27839		0.09311	-3.94377		1.83281	-5.68123
	0.40231	-0.10885		1.55120	-3.08671		3.24411	-4.85819
	0.29998	-0.44078		1.94471	-2.44676		3.57305	-4.28056
	-0.11127	-0.17453		1.66055	-1.81504		3.22319	-3.71073
	0.69893	0.02518		2.17494	-1.46100		3.66946	-3.42350
	-0.03894	0.16074		1.69003	-1.28071		3.12464	-3.31380
	0.36026	0.32624		1.89506	-0.71113		3.25853	-2.80408
	0.12632	-0.15471		1.71577	-2.09940		3.01367	-4.26712
	0.59233	-0.56541		2.15869	-2.67427		3.38850	-4.90242
	0.43705	0.16136		2.32042	-3.58530		3.49248	-5.88090
	0.01857	-0.18221		1.65347	-4.48774		2.75318	-6.84681
	-0.06442	-0.34477		1.54876	-4.86375		2.58072	-7.28775
	0.27314	0.27953		1.83414	-4.26765		2.79693	-6.75766
	-0.33643	0.03950		1.36783	-4.35981		2.26571	-6.91247
	0.07147	0.09027		1.62605	-2.85813		2.45640	-5.47755
	-0.07455	0.09965		1.49532	-2.19189		2.26070	-4.88186
	-0.06466	0.34962		1.65179	-1.42966		2.35319	-4.18509
	0.36731	0.28755		2.00791	-1.18943		2.64181	-4.01178
	-0.34844	0.26814		1.21099	-1.09492		1.77529	-3.98368
	0.11702	0.23411		1.93735	-1.09160		2.44242	-4.04658
	0.16343	-0.19884		1.73164	-1.47107		2.16272	-4.49276
	-0.13104	0.04865		1.43307	-1.02803		1.79877	-4.11553
	-0.27536	-0.63910		1.40816	-1.83778		1.70905	-4.99299
	-0.03379	-0.44866		1.48369	-1.65759		1.71514	-4.87934
	-0.32400	0.03706		1.34183	-1.08399		1.50914	-4.36834
	-0.30654	-0.03187		1.32069	-1.38838		1.42183	-4.74283
	-0.09588	0.01842		1.48217	-1.47872		1.51436	-4.90028

Figura 49: **Resultado Marca 2**: La siguiente tabla compara los distintos resultados obtenidos por los modelos de la **Marca 2.**

7 Anexo B: Capítulo 5

7.1 Series.

Fecha	Apertura	Último	Variación Fecha	Apertura	Último	Variación Fecha	Apertura	Último	Variación Fecha	Apertura	Último	Variación Fecha	Apertura	Último	Variación Fecha	Apertura	Último	Variación Fecha	Apertura	Último	Variación
9/6/2019	55.50	55.99	-0.0006 4/22/2019	41.86	42.49	0.0154 12/3/2018	37.26	36.54	-0.0316 7/16/2018	27.25	27.34	0.0031 2/26/2018	19.91	20.18	0.0107 10/9/2017	17.44	17.46	0.0011 5/22/2017	16.01	16.17	0.0098
9/5/2019	55.85	56.02	0.0016 4/19/2019	41.84	41.84	0 11/30/2018	37.73	37.73	-0.0001 7/13/2018	27.24	27.26	0.002 2/23/2018	19.92	19.97	0.001 10/6/2017	17.41	17.44	0.0024 5/19/2017	15.87	16.02	0.0003
9/4/2019	55.93	55.93	-0.0002 4/18/2019	41.67	41.84	0.0051 11/29/2018	38.45	37.74	-0.0186 7/12/2018	27.35	27.20	-0.0077 2/22/2018	19.87	19.95	0.0021 10/5/2017	17.29	17.40	0.0025 5/18/2017	15.62	16.01	0.0254
9/3/2019	53.01	55.94	-0.0397 4/17/2019	42.31	41.63	-0.0165 11/28/2018	39.08	38.45	-0.0024 7/11/2018	27.38	27.41	-0.0007 2/21/2018	19.86	19.90	0.0022 10/4/2017	17.41	17.35	-0.0033 5/17/2017	15.57	15.62	0.0026
9/2/2019	60.25	58.25	-0.021 4/16/2019	41.65	42.33	0.0171 11/27/2018	39.06	38.54	-0.0137 7/10/2018	27.98	27.43	-0.0175 2/20/2018	19.89	19.86	-0.002 10/3/2017	17.39	17.41	0.0019 5/16/2017	15.56	15.58	0.003
8/30/2019	56.00	59.50	0.028 4/15/2019	42.18	41.62	-0.0132 11/26/2018	37.51	39.08	0.0407 7/9/2018	27.99	27.92	0 2/19/2018	19.81	19.90	0.0067 10/2/2017	17.26	17.38	0.0036 5/15/2017	15.43	15.53	0.0061
8/29/2019	58.01	57.88	-0.0012 4/12/2019	42.71	42.17	-0.0127 11/23/2018	36.41	37.55	0.0307 7/6/2018	28.07	27.92	-0.0052 2/16/2018	19.61	19.77	0.0057 9/29/2017	17.57	17.31	-0.0122 5/12/2017	15.42	15.44	-0.0006
8/28/2019	56.14	57.95	0.0297 4/11/2019	42.98	42.72	-0.0065 11/22/2018	36.29	36.43	0.0047 7/5/2018	28.07	28.07	-0.0001 2/15/2018	19.89	19.66	-0.0122 9/28/2017	17.51	17.53	-0.0016 5/11/2017	15.51	15.45	-0.0042
8/27/2019	55.29	56.28	0.0177 4/10/2019	43.44	43.00	-0.009 11/21/2018	36.18	36.26	0.0022 7/4/2018	27.90	28.07	0.0041 2/14/2018	19.99	19.90	-0.0048 9/27/2017	17.63	17.56	-0.0006 5/10/2017	15.51	15.51	-0.0004
8/26/2019	55.17	55.30	0.0024 4/9/2019	43.70	43.39	-0.0069 11/20/2018	35.93	36.18	0.0075 7/3/2018	28.29	27.95	-0.0116 2/13/2018	19.99	19.99	0.0007 9/26/2017	17.49	17.57	0.0039 5/9/2017	15.47	15.52	0.0026
8/23/2019	55.07	55.17	0.0011 4/8/2019	43.88	43.69	-0.005 11/19/2018	35.91	35.91	-0.0004 7/2/2018	28.93	28.28	-0.0226 2/12/2018	19.99	19.98	-0.0011 9/25/2017	17.33	17.50	0.0117 5/8/2017	15.38	15.47	0.0078
8/22/2019	55.26	55.11	0.002 4/5/2019	43.26	43.91	0.0116 11/16/2018	35.53	35.93	-0.0033 6/29/2018	28.08	28.94	0.0312 2/9/2018	19.98	20.00	0.0013 9/22/2017	17.27	17.30	0.0016 5/5/2017	15.28	15.36	0.0007
8/21/2019	54.70	55.00	0.005 4/4/2019	42.85	43.41	0.0131 11/15/2018	35.92	36.04	0.0043 6/28/2018	27.49	28.06	0.0226 2/8/2018	19.66	19.98	0.0148 9/21/2017	17.18	17.27	0.0044 5/4/2017	15.30	15.35	0.0043
8/20/2019	54.68	54.73	-0.002 4/3/2019	42.71	42.85	0.003 11/14/2018	35.98	35.89	-0.0036 6/27/2018	27.05	27.44	0.0133 2/7/2018	19.57	19.68	0.0057 9/20/2017	17.11	17.19	0.0051 5/3/2017	15.29	15.28	-0.0004
8/19/2019	54.84	54.84	0 4/2/2019	42.72	42.72	0 11/13/2018	35.53	36.02	0.0132 6/26/2018	27.03	27.08	-0.0004 2/6/2018	19.46	19.57	0.0052 9/19/2017	17.11	17.11	0.0004 5/2/2017	15.33	15.29	-0.0065
8/16/2019	57.07	54.84	-0.0421 4/1/2019	43.30	42.71	-0.0149 11/12/2018	35.60	35.55	0.0048 6/25/2018	26.99	27.09	0.0026 2/5/2018	19.49	19.47	0.0005 9/18/2017	16.99	17.10	0.0073 5/1/2017	15.38	15.39	-0.0002
8/15/2019	60.21	57.25	-0.0497 3/29/2019	43.18	43.36	-0.0059 11/9/2018	35.45	35.38	-0.0025 6/22/2018	27.49	27.02	-0.0173 2/2/2018	19.35	19.46	0.0054 9/15/2017	17.03	16.98	-0.001 4/28/2017	15.41	15.39	-0.0011
8/14/2019	55.24	60.24	0.084 3/28/2019	43.90	43.62	-0.0058 11/8/2018	35.66	35.47	-0.0052 6/21/2018	27.75	27.49	-0.0085 2/1/2018	19.56	19.36	-0.0143 9/14/2017	17.04	16.99	-0.0043 4/27/2017	15.45	15.41	-0.005
8/13/2019	52.00	55.57	0.0486 3/27/2019	42.63	43.87	0.0293 11/7/2018	35.61	35.66	0.0013 6/20/2018	27.73	27.73	-0.001 1/31/2018	19.62	19.64	0.0002 9/13/2017	17.05	17.07	0 4/26/2017	15.42	15.48	0.0042
8/12/2019	46.09	53.00	0.1713 3/26/2019	42.04	42.63	0.0141 11/6/2018	35.59	35.61	-0.0005 6/19/2018	27.43	27.75	0.0052 1/30/2018	19.53	19.63	0.0034 9/12/2017	17.13	17.07	-0.0039 4/25/2017	15.39	15.42	0.0018
8/9/2019	45.13	45.25	0.0017 3/25/2019	41.77	42.04	0.0062 11/5/2018	35.47	35.63	0.004 6/18/2018	27.54	27.61	-0.0158 1/29/2018	19.55	19.57	0.0002 9/11/2017	17.20	17.13	-0.0062 4/24/2017	15.47	15.39	-0.0055
8/8/2019	45.51	45.17	-0.0074 3/22/2019	41.02	41.78	0.0184 11/2/2018	35.67	35.49	-0.0052 6/15/2018	27.01	28.06	0.0126 1/26/2018	19.57	19.56	-0.0005 9/8/2017	17.25	17.24	0.0026 4/21/2017	15.38	15.48	0.0056
8/7/2019	45.16	45.51	0.0053 3/21/2019	40.81	41.03	0.0042 11/1/2018	35.86	35.67	-0.0063 6/14/2018	26.01	27.71	0.0574 1/25/2018	19.57	19.57	-0.0038 9/7/2017	17.26	17.20	-0.0028 4/20/2017	15.39	15.39	0
8/6/2019	45.28	45.27	-0.0029 3/20/2019	40.53	40.85	0.0082 10/31/2018	36.87	35.90	-0.0226 6/13/2018	25.92	26.20	0.0177 1/24/2018	19.32	19.65	0.0161 9/6/2017	17.29	17.24	0.0001 4/19/2017	15.47	15.39	0.0069
8/5/2019	44.59	45.40	0.0182 3/19/2019	40.02	40.52	0.0121 10/30/2018	36.87	36.73	-0.0043 6/12/2018	26.03	25.74	-0.0124 1/23/2018	19.14	19.33	0.0103 9/5/2017	17.25	17.24	0.0001 4/18/2017	15.21	15.28	0.0058
8/2/2019	44.19	44.59	0.0066 3/18/2019	39.99	40.04	0.0011 10/29/2018	36.81	36.89	0.0014 6/11/2018	25.35	26.07	0.0305 1/22/2018	18.98	19.14	0.008 9/4/2017	17.21	17.24	0.0017 4/17/2017	15.16	15.20	0.0034
8/1/2019	43.74	44.30	0.0109 3/15/2019	40.71	39.99	-0.0184 10/26/2018	37.03	36.84	0.0016 6/8/2018	24.96	25.30	0.0124 1/19/2018	18.87	18.99	0.0056 9/1/2017	17.28	17.21	-0.0073 4/14/2017	15.15	15.15	-0.001
7/31/2019	43.86	43.82	-0.0012 3/14/2019	41.25	40.74	-0.0122 10/25/2018	37.02	36.78	-0.0067 6/7/2018	24.88	24.99	0.0034 1/18/2018	18.88	18.88	0.0005 8/31/2017	17.41	17.34	-0.0033 4/13/2017	15.17	15.16	-0.0021
7/30/2019	43.69	43.87	0.0029 3/13/2019	41.52	41.24	-0.006 10/24/2018	36.61	37.03	0.0122 6/6/2018	24.92	24.90	-0.001 1/17/2018	18.88	18.87	-0.0008 8/30/2017	17.38	17.40	0.0006 4/12/2017	15.14	15.19	-0.0039
7/29/2019	43.28	43.75	0.0109 3/12/2019	41.24	41.49	0.0058 10/23/2018	36.45	36.58	0.0036 6/5/2018	24.94	24.93	-0.0013 1/16/2018	18.75	18.89	0.0081 8/29/2017	17.24	17.39	0.009 4/11/2017	15.21	15.25	0.0028
7/26/2019	43.35	43.28	-0.0014 3/11/2019	41.16	41.25	0.0019 10/22/2018	36.52	36.45	-0.0024 6/4/2018	24.97	24.96	-0.0004 1/15/2018	18.69	18.74	0.003 8/28/2017	17.22	17.23	0.0004 4/10/2017	15.33	15.21	-0.0087
7/25/2019	42.74	43.34	0.0118 3/8/2019	42.35	41.18	-0.0297 10/19/2018	36.48	36.54	-0.0053 6/1/2018	24.96	24.97	0.0003 1/12/2018	18.62	18.68	-0.0012 8/25/2017	17.21	17.22	0.0006 4/7/2017	15.43	15.34	-0.0043
7/24/2019	42.61	42.83	0.005 3/7/2019	40.78	42.43	0.042 10/18/2018	36.19	36.73	0.0147 5/31/2018	24.92	24.96	0.0014 1/11/2018	18.62	18.70	0.0034 8/24/2017	17.25	17.21	-0.001 4/6/2017	15.40	15.41	0.0009
7/23/2019	42.44	42.62	0.0038 3/6/2019	40.11	40.73	0.0225 10/17/2018	35.87	36.20	0.008 5/30/2018	24.92	24.93	0.0026 1/10/2018	18.77	18.64	-0.0159 8/23/2017	17.21	17.23	0.0013 4/5/2017	15.40	15.40	0.0013
7/22/2019	42.11	42.46	0.0018 3/5/2019	39.80	39.83	0.0001 10/16/2018	36.73	35.91	-0.0212 5/29/2018	24.72	24.86	0.0046 1/9/2018	19.02	18.94	-0.0053 8/22/2017	17.22	17.21	-0.0068 4/4/2017	15.40	15.38	-0.0009
7/19/2019	42.21	42.38	0.0003 3/4/2019	39.79	39.83	-0.0001 10/15/2018	36.65	36.69	0 5/28/2018	24.60	24.75	0.0059 1/8/2018	18.87	19.04	0.0085 8/21/2017	17.34	17.33	-0.0009 4/3/2017	15.38	15.39	0.0006
7/18/2019	42.54	42.37	-0.0031 3/1/2019	39.12	39.83	0.018 10/12/2018	36.58	36.69	0.0025 5/25/2018	24.58	24.60	0.0009 1/5/2018	18.55	18.88	0.014 8/18/2017	17.35	17.34	-0.0004 3/31/2017	15.38	15.38	-0.0027
7/17/2019	42.67	42.50	-0.0043 2/28/2019	38.78	39.13	0.0091 10/11/2018	37.16	36.60	-0.0156 5/24/2018	24.47	24.58	0.0043 1/4/2018	18.46	18.62	0.0092 8/17/2017	17.18	17.35	0.0083 3/30/2017	15.45	15.42	-0.0005
7/16/2019	42.26	42.68	0.0065 2/27/2019	38.87	38.77	-0.0027 10/10/2018	36.88	37.18	-0.0046 5/23/2018	24.28	24.47	0.0081 1/3/2018	18.39	18.45	0.0029 8/16/2017	17.07	17.20	0.0079 3/29/2017	15.52	15.43	-0.01
7/15/2019	41.65	42.40	0.0195 2/26/2019	39.11	38.88	-0.0037 10/9/2018	37.77	37.35	-0.004 5/22/2018	24.32	24.28	-0.0038 1/2/2018	18.62	18.40	-0.0117 8/15/2017	17.12	17.07	-0.0033 3/28/2017	15.65	15.59	-0.0009
7/12/2019	41.38	41.59	-0.0027 2/25/2019	38.91	39.03	-0.0041 10/8/2018	37.50	37.50	-0.0089 5/21/2018	24.40	24.37	-0.0013 1/1/2018	18.61	18.61	0 8/14/2017	17.27	17.13	-0.0328 3/27/2017	15.63	15.60	0
7/11/2019	41.48	41.71	-0.0033 2/22/2019	39.47	39.19	-0.0087 10/5/2018	38.34	37.84	-0.0197 5/18/2018	24.31	24.40	0.0037 12/29/2017	19.02	18.61	-0.0295 8/11/2017	17.68	17.71	0.0003 3/24/2017	15.61	15.60	-0.0004
7/10/2019	41.85	41.85	0.001 2/21/2019	39.65	39.53	-0.0036 10/4/2018	36.86	38.60	0.0225 5/17/2018	24.28	24.31	0.0017 12/28/2017	18.45	19.18	0.0403 8/10/2017	17.65	17.70	-0.0001 3/23/2017	15.63	15.61	-0.0012
7/9/2019	41.76	41.81	0 2/20/2019	39.27	39.67	0.0099 10/3/2018	37.06	37.75	-0.0085 5/16/2018	24.05	24.27	0.0086 12/27/2017	18.32	18.44	0.006 8/9/2017	17.76	17.71	-0.0005 3/22/2017	15.62	15.63	0.0018
7/8/2019	41.80	41.80	0 2/19/2019	38.66	39.28	0.0143 10/2/2018	39.11	38.08	-0.0355 5/15/2018	24.99	24.06	-0.0377 12/26/2017	18.08	18.33	0.0156 8/8/2017	17.69	17.71	0.0011 3/21/2017	15.61	15.60	-0.002
7/5/2019	42.01	41.81	0.0013 2/18/2019	38.33	38.73	0.003 10/1/2018	41.30	39.48	-0.044 5/14/2018	23.03	25.01	0.0868 12/25/2017	18.05	18.05	0 8/7/2017	17.67	17.69	0.0019 3/20/2017	15.57	15.63	0.0046
7/4/2019	42.28	41.75	-0.0068 2/15/2019	38.19	38.61	0.0109 9/28/2018	39.54	41.29	0.0394 5/11/2018	22.68	23.01	0.0137 12/22/2017	17.94	18.05	0.0062 8/4/2017	17.62	17.66	0 3/17/2017	15.50	15.56	0.0005
7/3/2019	42.16	42.04	-0.0028 2/14/2019	38.18	38.19	0.0001 9/27/2018	38.68	39.73	0.0311 5/10/2018	22.51	22.70	0.0007 12/21/2017	17.75	17.93	0.0112 8/3/2017	17.58	17.66	0.0046 3/16/2017	15.58	15.55	-0.0009
7/2/2019	42.40	42.16	-0.0048 2/13/2019	37.94	38.19	0.006 9/26/2018	38.54	38.53	0.0063 5/9/2018	22.37	22.68	0.0093 12/20/2017	17.81	17.74	0.0065 8/2/2017	17.57	17.58	0.0003 3/15/2017	15.55	15.56	0.0017
7/1/2019	42.48	42.36	-0.0028 2/12/2019	37.92	37.96	0.0006 9/25/2018	37.30	38.29	0.0264 5/8/2018	22.04	22.48	0.0242 12/19/2017	17.49	17.62	0.0033 8/1/2017	17.62	17.57	-0.0041 3/14/2017	15.51	15.54	0.0004
6/28/2019	42.66	42.48	-0.0052 2/11/2019	37.60	37.94	0.0029 9/24/2018	37.03	37.30	0.0019 5/7/2018	21.85	21.94	0.0041 12/18/2017	17.52	17.56	0.0031 7/31/2017	17.68	17.65	-0.0086 3/13/2017	15.47	15.53	0.004
6/27/2019	42.68	42.70	0.0004 2/8/2019	37.77	37.83	0.0001 9/21/2018	38.22	37.23	-0.0256 5/4/2018	21.50	21.85	-0.018 12/15/2017	17.49	17.51	0.0044 7/28/2017	17.62	17.80	0.0093 3/10/2017	15.51	15.47	-0.0043
6/26/2019	42.42	42.69	0.0075 2/7/2019	37.31	37.82	0.008 9/20/2018	39.23	38.21	-0.0279 5/3/2018	21.15	22.26	0.0506 12/14/2017	17.30	17.43	0.0075 7/27/2017	17.49	17.64	0.0076 3/9/2017	15.64	15.54	-0.0066
6/25/2019	42.41	42.37	-0.0012 2/6/2019	37.23	37.52	0.0083 9/19/2018	39.77	39.31	-0.0115 5/2/2018	20.54	21.18	0.0317 12/13/2017	17.35	17.30	-0.0026 7/26/2017	17.49	17.50	0.002 3/8/2017	15.57	15.64	0.0046
6/24/2019	42.78	42.42	-0.0087 2/5/2019	37.13	37.21	0.0016 9/18/2018	39.55	39.76	0.0057 5/1/2018	20.53	20.53	0 12/12/2017	17.26	17.35	0.0064 7/25/2017	17.44	17.47	0.0017 3/7/2017	15.50	15.57	0.0062
6/21/2019	43.30	42.79	-0.0127 2/4/2019	37.15	37.15	-0.0001 9/17/2018	39.77	39.54	-0.0102 4/30/2018	20.53	20.53	0 12/11/2017	17.28	17.24	-0.002 7/24/2017	17.42	17.44	0.002 3/6/2017	15.44	15.47	0.0023
6/20/2019	43.31	43.34	0 2/1/2019	37.30	37.15	-0.0039 9/14/2018	39.77	39.95	0.0119 4/27/2018	20.54	20.53	-0.0009 12/8/2017	17.27	17.27	-0.0002 7/21/2017	17.20	17.41	0.0117 3/3/2017	15.41	15.44	0.0019
6/19/2019	43.41	43.34	-0.0024 1/31/2019	37.53	37.30	-0.0055 9/13/2018	38.54	39.48	0.0298 4/26/2018	20.25	20.55	0.0149 12/7/2017	17.25	17.27	0.0015 7/20/2017	17.15	17.20	0.0035 3/2/2017	15.41	15.41	-0.0029
6/18/2019	43.92	43.45	-0.0123 1/30/2019	37.64	37.51	-0.0033 9/12/2018	38.09	38.33	0.0101 4/25/2018	20.25	20.25	-0.0006 12/6/2017	17.29	17.25	-0.0023 7/19/2017	17.29	17.14	0.0032 3/1/2017	15.51	15.45	-0.0016
6/17/2019	43.96	43.99	-0.0001 1/29/2019	37.13	37.63	0.0138 9/11/2018	37.32	37.95	0.0131 4/24/2018	20.24	20.26	0.0004 12/5/2017	17.33	17.29	-0.0031 7/18/2017	16.92	17.09	0.0101 2/28/2017	15.48	15.48	0
6/14/2019	43.49	43.99	0.011 1/28/2019	37.04	37.12	0.0021 9/10/2018	37.07	37.46	0.0099 4/23/2018	20.19	20.25	0.003 12/4/2017	17.21	17.34	0.0071 7/17/2017	16.85	16.92	0.0043 2/27/2017	15.48	15.48	0
6/13/2019	43.75	43.51	-0.0038 1/25/2019	37.58	37.04	-0.0091 9/7/2018	37.54	37.09	-0.0087 4/20/2018	20.16	20.19	0.0016 12/1/2017	17.28	17.22	-0.005 7/14/2017	16.95	16.85	-0.0062 2/24/2017	15.50	15.48	-0.0019
6/12/2019	44.66	43.68	-0.0224 1/24/2019	37.21	37.38	-0.0043 9/6/2018	38.04	37.42	-0.0311 4/19/2018	20.12	20.16	0.0017 11/30/2017	17.36	17.31	-0.0067 7/13/2017	16.95	16.95	-0.0005 2/23/2017	15.55	15.51	-0.0049
6/11/2019	44.86	44.68	-0.0042 1/23/2019	37.49	37.54	0.0009 9/5/2018	39.10	38.62	-0.0092 4/18/2018	20.17	20.12	-0.0024 11/29/2017	17.36	17.42	0.003 7/12/2017	17.02	16.96	-0.0023 2/22/2017	15.60	15.58	-0.0009
6/10/2019	44.84	44.87	0.0005 1/22/2019	37.58	37.51	-0.008 9/4/2018	38.08	38.98	0.0238 4/17/2018	20.22	20.17	-0.0023 11/28/2017	17.32	17.37	0.0033 7/11/2017	16.97	17.00	0.0006 2/21/2017	15.66	15.60	-0.0061
6/7/2019	44.86	44.85	-0.001 1/21/2019	37.81	37.81	0.0061 9/3/2018	36.83	38.08	0.0318 4/16/2018	20.19	20.22	0.0004 11/27/2017	17.37	17.31	-0.002 7/10/2017	16.99	16.99	0.0014 2/20/2017	15.71	15.69	0.0022
6/6/2019	44.86	44.89	-0.0003 1/18/2019	37.66	37.58	-0.0027 8/31/2018	38.06	36.90	-0.0473 4/13/2018	20.20	20.21	0.0004 11/24/2017	17.40	17.35	-0.0027 7/7/2017	17.02	16.97	-0.0071 2/17/2017	15.41	15.66	0.0151
6/5/2019	44.72	44.90	0.0047 1/17/2019	37.47	37.68	0.0055 8/30/2018	34.67	38.73	0.1392 4/12/2018	20.16	20.20	0.0022 11/23/2017	17.43	17.40	-0.0017 7/6/2017	17.18	17.09	-0.0031 2/16/2017	15.33	15.42	0.0036
6/4/2019	44.88	44.69	-0.0036 1/16/2019	37.14	37.48	0.0098 8/29/2018	31.54	34.00	0.0804 4/11/2018	20.15	20.16	0.0005 11/22/2017	17.47	17.42	-0.0035 7/5/2017	16.93	17.14	0.0148 2/15/2017	15.44	15.37	-0.0071
6/3/2019	44.73	44.86	0.0019 1/15/2019	36.98	37.11	0.0038 8/28/2018	30.95	31.47	0.0167 4/10/2018	20.18	20.15	-0.0021 11/21/2017	17.45	17.49	0.0011 7/4/2017	16.81	16.89	0.0024 2/14/2017	15.49	15.48	-0.0003
5/31/2019	44.63	44.77	0.0049 1/14/2019	36.89	36.97	0.0019 8/27/2018	30.74	30.95	0.0037 4/9/2018	20.16	20.19	0.0007 11/20/2017	17.47	17.47	-0.0006 7/3/2017	16.81	16.85	0.0137 2/13/2017	15.53	15.48	-0.0028
5/30/2019	44.44	44.55	0.0024 1/11/2019	37.08	36.90	-0.012 8/24/2018	30.43	30.84	0.0123 4/6/2018	20.19	20.18	-0.0007 11/17/2017	17.47	17.48	-0.0001 6/30/2017	16.50	16.62	0.008 2/10/2017	15.60	15.53	-0.008
5/29/2019	44.63	44.45	-0.005 1/10/2019	37.82	37.35	-0.0002 8/23/2018	30.22	30.47	0.0077 4/5/2018	20.17	20.19	0.001 11/16/2017	17.51	17.48	-0.0023 6/29/2017	16.40	16.49	0.0048 2/9/2017	15.66	15.65	-0.0013
5/28/2019	44.73	44.67	-0.0062 1/9/2019	37.55	37.36	-0.005 8/22/2018	30.00	30.23	0.0082 4/4/2018	20.17	20.17	-0.0001 11/15/2017	17.50	17.52	0.002 6/28/2017	16.42	16.41	0.0013 2/8/2017	15.67	15.67	-0.0004
5/27/2019	44.95	44.95	0.0026 1/8/2019	37.33	37.55	0.0066 8/21/2018	29.85	29.99	0.0043 4/3/2018	20.13	20.17	0.0019 11/14/2017	17.50	17.48	-0.0007 6/27/2017	16.31	16.39	0.0052 2/7/2017	15.78	15.68	-0.0058
5/24/2019	45.09	44.84	-0.0053 1/7/2019	37.35	37.30	-0.0013 8/20/2018	29.86	29.86	-0.0001 4/2/2018	20.13	20.13	0.0009 11/13/2017	17.49	17.50	0.0003 6/26/2017	16.19	16.31	0.0079 2/6/2017	15.63	15.77	0.0098
5/23/2019	44.74	45.07	0.0046 1/4/2019	37.26	37.35	-0.0026 8/17/2018	29.69	29.86	0.0046 3/30/2018	20.12	20.12	-0.001 11/10/2017	17.51	17.49	-0.0008 6/23/2017	16.14	16.18	0.0019 2/3/2017	15.68	15.62	-0.0038
5/22/2019	44.83	44.87	0.0017 1/3/2019	37.69	37.44	-0.0086 8/16/2018	29.78	29.72	-0.0051 3/29/2018	20.15	20.14	-0.0005 11/9/2017	17.53	17.50	-0.0009 6/22/2017	16.23	16.15	-0.0046 2/2/2017	15.79	15.68	-0.0076
5/21/2019	45.15	44.79	-0.0088 1/2/2019	37.69	37.77	0.0031 8/15/2018	29.76	29.88	0.004 3/28/2018	20.15	20.15	-0.0005 11/8/2017	17.64	17.52	-0.0074 6/21/2017	16.15	16.22	0.0049 2/1/2017	15.90	15.80	-0.0065
5/20/2019	44.98	45.19	0.0042 1/1/2019	37.65	37.65	0 8/14/2018	30.01	29.76	-0.006 3/27/2018	20.18	20.16	-0.0005 11/7/2017	17.66	17.65	0.0007 6/20/2017	16.14	16.14	0.0003 1/31/2017	15.90	15.90	0.0005
5/17/2019	44.71	45.00	0.0056 12/31/2018	37.68	37.65	-0.0008 8/13/2018	29.22	29.94	0.0242 3/26/2018	20.17	20.17	-0.0009 11/6/2017	17.65	17.64	0.0002 6/19/2017	16.04	16.14	0.0071 1/30/2017	15.89	15.89	0.0003
5/16/2019	44.98	44.75	-0.0051 12/28/2018	38.26	37.69	-0.0162 8/10/2018	28.07	29.23	0.0413 3/23/2018	20.24	20.18	-0.0017 11/3/2017	17.47	17.64	0.0066 6/16/2017	15.92	16.03	0.0036 1/27/2017	15.92	15.89	-0.0039
5/15/2019	44.95	44.98	0.0008 12/27/2018	38.62	38.31	-0.0062 8/9/2018	27.61	28.07	0.0162 3/22/2018	20.26	20.22	-0.0024 11/2/2017	17.61	17.52	-0.0051 6/15/2017	15.87	15.97	0.004 1/26/2017	15.91	15.95	-0.0004
5/14/2019	45.15	44.94	-0.0044 12/26/2018	37.88	38.55	0.0151 8/8/2018	27.38	27.62	0.0085 3/21/2018	20.23	20.27	0.0008 11/1/2017	17.64	17.61	-0.0014 6/14/2017	15.89	15.90	0.0013 1/25/2017	15.91	15.95	0.0015
5/13/2019	44.77	45.14	0.0072 12/25/2018	37.97	37.97	0 8/7/2018	27.32	27.39	0.0022 3/20/2018	20.21	20.25	0.0027 10/31/2017	17.62	17.64	-0.0034 6/13/2017	15.94	15.88	-0.0021 1/24/2017	15.91	15.93	-0.0005
5/10/2019	45.28	44.82	-0.0092 12/24/2018	37.97	37.97	0 8/6/2018	27.29	27.33	0.0014 3/19/2018	20.19	20.20	0.0005 10/30/2017	17.57	17.70	0.0052 6/12/2017	15.92	15.92	0.0002 1/23/2017	15.91	15.94	0.002
5/9/2019	44.97	45.23	0.0034 12/21/2018	37.56	37.97	-0.0016 8/3/2018	27.43	27.29	-0.0055 3/16/2018	20.32	20.19	-0.0064 10/27/2017	17.72	17.60	-0.0029 6/9/2017	15.91	15.92	-0.0013 1/20/2017	15.87	15.91	0.0003
5/8/2019	45.32	45.08	-0.0043 12/20/2018	38.36	38.04	-0.0084 8/2/2018	27.46	27.44	-0.0021 3/15/2018	20.21	20.32	0.0044 10/26/2017	17.49	17.66	0.0097 6/8/2017	16.00	15.94	-0.0035 1/19/2017	15.96	15.90	-0.0045
5/7/2019	44.66	45.27	0.0134 12/19/2018	38.26	38.36	0.0027 8/1/2018	27.19	27.50	0.0029 3/14/2018	20.20	20.23	0.0012 10/25/2017	17.39	17.49	-0.001 6/7/2017	16.03	15.99	-0.0014 1/18/2017	15.90	15.97	0.0042
5/6/2019	44.44	44.67	0.0045 12/18/2018	38.25	38.26	-0.0001 7/31/2018	27.26	27.42	0.0063 3/13/2018	20.19	20.20	0.0004 10/24/2017	17.42	17.50	0.0052 6/6/2017	16.00	16.02	-0.0009 1/17/2017	15.86	15.91	0.0019
5/3/2019	44.76	44.47	-0.0066 12/17/2018	38.12	38.26	0.0027 7/30/2018	27.32	27.25	-0.0026 3/12/2018	20.23	20.20	-0.0021 10/23/2017	17.41	17.41	-0.0001 6/5/2017	16.06	16.03	-0.0006 1/16/2017	15.86	15.88	0.0019
5/2/2019	44.14	44.76	0.0118 12/14/2018	37.90	38.15	0.0092 7/27/2018	27.40	27.32	-0.0027 3/9/2018	20.27	20.24	-0.0048 10/20/2017	17.42	17.42	-0.0017 6/2/2017	16.07	16.04	-0.0008 1/13/2017	15.81	15.85	0.002
5/1/2019	44.33	44.24	-0.0014 12/13/2018	37.58	37.81	0.0062 7/26/2018	27.37	27.40	0.0008 3/8/2018	20.31	20.34	-0.002 10/19/2017	17.34	17.45	0.0062 6/1/2017	16.09	16.05	-0.0026 1/12/2017	15.84	15.81	-0.002
4/30/2019	44.36	44.30	-0.0014 12/12/2018	37.88	37.57	-0.006 7/25/2018	27.48	27.37	-0.0038 3/7/2018	20.30	20.38	0.0031 10/18/2017	17.34	17.34	0.0001 5/31/2017	16.16	16.09	-0.0047 1/11/2017	15.84	15.85	-0.0001
4/29/2019	44.26	44.36	-0.0334 12/11/2018	37.51	37.80	0.0037 7/24/2018	27.60	27.48	-0.0048 3/6/2018	20.20	20.31	0.0055 10/17/2017	17.33	17.34	0.0006 5/30/2017	16.04	16.17	0.0119 1/10/2017	15.84	15.85	-0.0024
4/26/2019	45.13	45.89	0.0188 12/10/2018	37.38	37.66	0.0076 7/23/2018	27.60	27.61	0.0004 3/5/2018	20.28	20.20	-0.0029 10/16/2017	17.33	17.33	-0.0008 5/29/2017	16.03	15.98	-0.0017 1/9/2017	15.81	15.88	0.0047
4/25/2019	43.98	45.05	0.0256 12/7/2018	37.70	37.38	-0.0086 7/20/2018	27.75	27.60	-0.0047 3/2/2018	20.14	20.26	0.0056 10/13/2017	17.41	17.34	-0.0043 5/26/2017	16.09	16.01	-0.0046 1/6/2017	15.93	15.81	-0.0093
4/24/2019	42.43	43.92	0.0358 12/6/2018	37.46	37.70	0.0053 7/19/2018	27.58	27.73	0.0038 3/1/2018	20.16	20.15	0.0016 10/12/2017	17.42	17.41	0.0002 5/25/2017	16.10	16.08	-0.0003 1/5/2017	16.05	15.96	-0.0073
4/23/2019	42.38	42.41	-0.0019 12/5/2018	37.39	37.50	0.0033 7/18/2018	27.51	27.63	0.0035 2/28/2018	20.20	20.12	-0.0051 10/11/2017	17.41	17.41	-0.001 5/24/2017	16.11	16.09	-0.0002 1/4/2017	15.92	16.08	0.0086

Figura 50: **Serie Dolar**: La siguiente tabla muestra el precio y la variación porcentual del dolar Banco Nación.

Fecha	Riesgo País	Fecha	Riesgo Pais	Fecha	Riesgo Pais	Fecha	Riesgo Pais Fecha	Riesgo Pais
1/2/2017	455	6/12/2017	399	11/17/2017	366	4/25/2018	402 10/25/2018	667
1/3/2017	474	6/13/2017	396	11/21/2017	363	4/26/2018	418 10/26/2018	670
1/4/2017	477	6/19/2017	411	11/22/2017	363	4/27/2018	419 10/29/2018	672
1/5/2017	475	6/21/2017	431	11/23/2017	363	5/2/2018	443 10/30/2018	665
1/6/2017	468	6/22/2017	423	11/24/2017	363	5/3/2018	470 10/31/2018	652
1/9/2017	470	6/26/2017	414	11/27/2017	361	5/4/2018	454 11/1/2018	635
1/10/2017	482	6/28/2017	424	11/28/2017	356	5/7/2018	471 11/2/2018	609
1/11/2017	483	6/29/2017	435	11/29/2017	358	5/8/2018	489 11/8/2018	607
1/12/2017	473	7/3/2017	430	11/30/2017	357	5/9/2018	491 11/9/2018	617
1/13/2017	453	7/4/2017	430	12/1/2017	359	5/10/2018	469 11/12/2018	617
1/16/2017	453	7/5/2017	436	12/4/2017	355	5/11/2018	480 11/14/2018	642
1/17/2017	455	7/6/2017	445	12/5/2017	356	5/14/2018	500 11/15/2018	649
1/18/2017	459	7/7/2017	443	12/6/2017	363	5/15/2018	482 11/16/2018	656
1/19/2017	461	7/10/2017	435	12/7/2017	365	5/16/2018	450 11/22/2018	686
1/20/2017	462	7/11/2017	433	12/11/2017	366	5/17/2018	453 11/23/2018	688
1/24/2017	464	7/12/2017	430	12/12/2017	364	5/18/2018	461 11/26/2018	695
1/25/2017	463	7/13/2017	429	12/13/2017	363	5/21/2018	459 11/27/2018	714
1/26/2017	463	7/14/2017	426	12/14/2017	361	5/22/2018	456 11/28/2018	705
1/27/2017	457	7/17/2017	425	12/15/2017	361	5/23/2018	454 11/29/2018	709
1/30/2017	469	7/18/2017	435	12/18/2017	355	5/28/2018	463 12/3/2018	698
1/31/2017	469	7/19/2017	436	12/19/2017	350	5/29/2018	499 12/4/2018	724
2/1/2017	461	7/20/2017	437	12/20/2017	346	5/31/2018	524 12/5/2018	724
2/2/2017	448	7/21/2017	440	12/21/2017	347	6/1/2018	515 12/6/2018	729
2/3/2017	440	7/24/2017	444	12/22/2017	347	6/4/2018	483 12/7/2018	729
2/6/2017	443	7/25/2017	442	12/26/2017	348	6/5/2018	475 12/11/2018	757
2/7/2017	458	7/26/2017	436	12/27/2017	350	6/6/2018	468 12/12/2018	741
2/8/2017	460	7/27/2017	433	12/28/2017	349	6/7/2018	481 12/13/2018	746
2/9/2017	456	7/28/2017	440	12/29/2017	351	6/11/2018	487 12/14/2018	763
2/10/2017	446	7/31/2017	439	1/2/2018	347	6/12/2018	503 12/17/2018	775
2/13/2017	441	8/1/2017	441	1/3/2018	355	6/13/2018	507 12/18/2018	781
2/14/2017	442	8/2/2017	443	1/4/2018	356	6/14/2018	539 12/19/2018	787
2/15/2017	448	8/3/2017	446	1/5/2018	362	6/15/2018	551 12/20/2018	802
2/16/2017	459	8/4/2017	447	1/8/2018	365	6/18/2018	566 12/21/2018	815
2/17/2017	460	8/7/2017	447	1/9/2018	361	6/21/2018	545 12/26/2018	820
2/20/2017	460	8/8/2017	440	1/10/2018	364	6/22/2018	535 12/27/2018	829
2/21/2017	456	8/9/2017	445	1/11/2018	363	6/26/2018	559 12/28/2018	813
2/22/2017	456	8/10/2017	453	1/12/2018	364	6/28/2018	595 1/2/2019	791
2/23/2017	458	8/11/2017	444	1/15/2018	364	6/29/2018	610 1/3/2019	768
2/24/2017	466	8/14/2017	418	1/16/2018	362	7/2/2018	607 1/4/2019	730
3/1/2017	454	8/15/2017	409	1/17/2018	360	7/4/2018	590 1/7/2019	713
3/2/2017	451	8/16/2017	406	1/18/2018	359	7/5/2018	581 1/8/2019	727
3/3/2017	445	8/17/2017	417	1/19/2018	363	7/6/2018	567 1/9/2019	708
3/6/2017	447	8/18/2017	410	1/22/2018	365	7/12/2018	575 1/10/2019	706
3/7/2017	442	8/22/2017	409	1/23/2018	367	7/18/2018	578 1/11/2019	703
3/8/2017	452	8/23/2017	408	1/24/2018	369	7/19/2018	585 1/14/2019	697
3/9/2017	456	8/24/2017	403	1/25/2018	373	7/20/2018	575 1/15/2019	695
3/10/2017	451	8/25/2017	395	1/26/2018	372	7/23/2018	575 1/16/2019	689
3/13/2017	456	8/28/2017	396	1/29/2018	376	7/25/2018	576 1/17/2019	690
3/14/2017	463	8/30/2017	387	1/30/2018	379	7/26/2018	556 1/18/2019	672
3/15/2017	452	8/31/2017	393	2/1/2018	373	7/31/2018	558 1/23/2019	670
3/16/2017	449	9/4/2017	388	2/2/2018	376	8/1/2018	562 1/24/2019	663
3/17/2017	443	9/5/2017	393	2/5/2018	396	8/2/2018	571 1/25/2019	663
3/20/2017	444	9/6/2017	393	2/6/2018	394	8/7/2018	593 1/28/2019	685
3/21/2017	453	9/7/2017	392	2/7/2018	383	8/8/2018	610 1/29/2019	696
3/22/2017	458	9/8/2017	390	2/8/2018	405	8/9/2018	634 1/30/2019	689
3/23/2017	456	9/11/2017	385	2/9/2018	426	8/10/2018	700 1/31/2019	676
3/27/2017	461	9/12/2017	384	2/14/2018	415	8/13/2018	748 2/1/2019	654
3/28/2017	457	9/13/2017	374	2/15/2018	397	8/14/2018	696 2/4/2019	648
3/29/2017	453	9/14/2017	375	2/16/2018	391	8/15/2018	699 2/5/2019	635
3/30/2017	450	9/15/2017	373	2/19/2018	391	8/16/2018	663 2/6/2019	652
3/31/2017	452	9/18/2017	370	2/20/2018	397	8/17/2018	671 2/7/2019	667
4/3/2017	454	9/19/2017	371	2/21/2018	393	8/21/2018	686 2/11/2019	683
4/4/2017	447	9/20/2017	370	2/22/2018	402	8/22/2018	690 2/12/2019	670
4/5/2017	439	9/21/2017	370	2/23/2018	404	8/23/2018	696 2/13/2019	665
4/6/2017	439	9/22/2017	368	2/26/2018	397	8/24/2018	700 2/14/2019	674
4/7/2017	437	9/25/2017	375	2/27/2018	397	8/28/2018	689 2/15/2019	690
4/11/2017	439	9/26/2017	377	2/28/2018	404	8/29/2018	728 2/18/2019	690
4/12/2017	443	9/27/2017	379	3/1/2018	417	8/30/2018	776 2/19/2019	703
4/17/2017	438	9/28/2017	375	3/2/2018	412	8/31/2018	771 2/20/2019	715
4/18/2017	440	9/29/2017	367	3/5/2018	410	9/3/2018	771 2/21/2019	711
4/19/2017	433	10/3/2017	365	3/6/2018	408	9/5/2018	744 2/22/2019	699
4/21/2017	424	10/4/2017	362	3/7/2018	414	9/7/2018	725 2/25/2019	692
4/24/2017	414	10/5/2017	359	3/8/2018	407	9/10/2018	745 2/27/2019	686
4/25/2017	407	10/9/2017	362	3/9/2018	388	9/11/2018	741 2/28/2019	697
4/26/2017	417	10/10/2017	363	3/12/2018	392	9/12/2018	699 3/6/2019	747
4/28/2017	415	10/11/2017	358	3/13/2018	399	9/13/2018	695 3/7/2019	777
5/2/2017	405	10/12/2017	354	3/14/2018	403	9/14/2018	661 3/8/2019	764
5/3/2017	404	10/13/2017	348	3/16/2018	409	9/17/2018	649 3/11/2019	738
5/4/2017	405	10/17/2017	343	3/19/2018	420	9/18/2018	656 3/12/2019	741
5/5/2017	407	10/18/2017	342	3/20/2018	411	9/19/2018	622 3/14/2019	737
5/9/2017	410	10/19/2017	350	3/21/2018	409	9/20/2018	601 3/15/2019	724
5/10/2017	403	10/20/2017	349	3/22/2018	419	9/21/2018	588 3/18/2019	725
5/12/2017	407	10/23/2017	342	3/23/2018	425	9/24/2018	612 3/19/2019	724
5/15/2017	400	10/24/2017	348	3/26/2018	418	9/26/2018	614 3/20/2019	723
5/16/2017	404	10/25/2017	349	3/27/2018	420	9/27/2018	593 3/21/2019	731
5/17/2017	419	10/26/2017	361	3/28/2018	418	9/28/2018	623 3/22/2019	764
5/18/2017	431	10/27/2017	355	4/3/2018	417	10/1/2018	629 3/25/2019	768
5/19/2017	422	10/30/2017	344	4/5/2018	408	10/2/2018	632 3/26/2019	768
5/22/2017	426	10/31/2017	361	4/6/2018	419	10/3/2018	626 3/27/2019	781
5/23/2017	420	11/1/2017	365	4/9/2018	415	10/4/2018	656 3/28/2019	787
5/24/2017	415	11/2/2017	361	4/10/2018	408	10/5/2018	669 3/29/2019	774
5/26/2017	418	11/3/2017	368	4/11/2018	406	10/9/2018	661 4/1/2019	761
5/29/2017	418	11/7/2017	384	4/12/2018	397	10/10/2018	681 4/3/2019	753
5/30/2017	416	11/8/2017	383	4/13/2018	398	10/11/2018	686 4/4/2019	767
5/31/2017	407	11/9/2017	386	4/16/2018	401	10/12/2018	657 4/5/2019	782
6/1/2017	402	11/10/2017	381	4/17/2018	401	10/16/2018	636 4/8/2019	803
6/2/2017	398	11/13/2017	380	4/18/2018	398	10/17/2018	655 4/9/2019	815
6/5/2017	397	11/14/2017	381	4/19/2018	399	10/19/2018	661 4/10/2019	816
6/6/2017	395	11/15/2017	388	4/20/2018	400	10/22/2018	665 4/15/2019	808
6/8/2017	395	11/16/2017	373	4/24/2018	403	10/24/2018	676 4/16/2019	801

Figura 51: **Serie Riesgo Pais**: La siguiente tabla muestra la serie de Riesgo País.

Fecha	Cierre	Fecha	Cierre	Fecha	Cierre	Fecha	Cierre	Fecha	Cierre	Fecha	Cierre
1/2/2017	17504.82	5/31/2017	22348.61	10/23/2017	27782.6	3/21/2018	32369.59	8/21/2018	26045.93	1/17/2019	34262.74
1/3/2017	17911.22	6/1/2017	22518.66	10/24/2017	28009.54	3/22/2018	31908.22	8/22/2018	26844.35	1/18/2019	35100.45
1/4/2017	18143.1	6/2/2017	22518.99	10/25/2017	27878.24	3/23/2018	31461.26	8/23/2018	26523.2	1/21/2019	35303.25
1/5/2017	18222.7	6/5/2017	22443.6	10/26/2017	27828.65	3/26/2018	31636.56	8/24/2018	25167.96	1/22/2019	34042.76
1/6/2017	18284.28	6/6/2017	22355.6	10/27/2017	27479.39	3/27/2018	31236.12	8/27/2018	25435.39	1/23/2019	34819.13
1/9/2017	18509.93	6/7/2017	22218.66	10/30/2017	27405.83	3/28/2018	31114.93	8/28/2018	25032.95	1/24/2019	34939.05
1/10/2017	18783.32	6/8/2017	21928.76	10/31/2017	27935.28	4/3/2018	31341.06	8/29/2018	25398.41	1/25/2019	34810.51
1/11/2017	18467.76	6/9/2017	21614.25	11/1/2017	27979.83	4/4/2018	31318.47	8/30/2018	26754.85	1/28/2019	34840.8
1/12/2017	18591.28	6/12/2017	21145.05	11/2/2017	27944.45	4/5/2018	31866.63	8/31/2018	29293.52	1/29/2019	35511.21
1/13/2017	18885.09	6/13/2017	21394.92	11/3/2017	27978.33	4/6/2018	31738.77	9/3/2018	28807.29	1/30/2019	36039.11
1/16/2017	18997.45	6/14/2017	21178.35	11/7/2017	28120.22	4/9/2018	31844.43	9/4/2018	27625.35	1/31/2019	36326.92
1/17/2017	18875.55	6/15/2017	21009.41	11/8/2017	28081.57	4/10/2018	32222.4	9/5/2018	28769.09	2/1/2019	36599.88
1/18/2017	18870.09	6/16/2017	21291.38	11/9/2017	27951.54	4/11/2018	32030.85	9/6/2018	29948.35	2/4/2019	37145
1/19/2017	18633.46	6/19/2017	21657.19	11/10/2017	27080.55	4/12/2018	32038.79	9/7/2018	29811.22	2/5/2019	37471.67
1/20/2017	19039.49	6/21/2017	20614.35	11/13/2017	26714.9	4/13/2018	31593.11	9/10/2018	29455.22	2/6/2019	36731.67
1/23/2017	19470.59	6/22/2017	20996.86	11/14/2017	25611.01	4/16/2018	31007.8	9/11/2018	29163.63	2/7/2019	35928.99
1/24/2017	19366.94	6/23/2017	21066.14	11/15/2017	26312.68	4/17/2018	31402.77	9/12/2018	29744.67	2/8/2019	36664.24
1/25/2017	19406.63	6/26/2017	21297.04	11/16/2017	27267.3	4/18/2018	31531.9	9/13/2018	30023.76	2/11/2019	37023.74
1/26/2017	19180.4	6/27/2017	21226.89	11/17/2017	27128.5	4/19/2018	31281.32	9/14/2018	30177.43	2/12/2019	37685.96
1/27/2017	19215.78	6/28/2017	21394.31	11/21/2017	27266.05	4/20/2018	31161.7	9/17/2018	31157.4	2/13/2019	37038.92
1/30/2017	18777.5	6/29/2017	21460.77	11/22/2017	27327.97	4/23/2018	30941.08	9/18/2018	32106.34	2/14/2019	37385.75
1/31/2017	19062.59	6/30/2017	21912.63	11/23/2017	27293.31	4/24/2018	30568.86	9/19/2018	33118.35	2/15/2019	37469.97
2/1/2017	19200.76	7/3/2017	22217.01	11/24/2017	27464.78	4/25/2018	29946.83	9/20/2018	34514.24	2/18/2019	37355.24
2/2/2017	19374.99	7/4/2017	22385.79	11/27/2017	27122.35	4/26/2018	29487.82	9/21/2018	34327.12	2/19/2019	36292.29
2/3/2017	19200.5	7/5/2017	22415.77	11/28/2017	26912.15	4/27/2018	30006.35	9/24/2018	33163.61	2/20/2019	36503.51
2/6/2017	19248.66	7/6/2017	22225.15	11/29/2017	26902.88	5/2/2018	29613.98	9/25/2018	34052.62	2/21/2019	35852.14
2/7/2017	19194.32	7/7/2017	22027.84	11/30/2017	26905.26	5/3/2018	29503.4	9/26/2018	33943.28	2/22/2019	36646.79
2/8/2017	19147.92	7/10/2017	21956.55	12/1/2017	26941.63	5/4/2018	28553.27	9/27/2018	33651.33	2/25/2019	36332.03
2/9/2017	19302.25	7/11/2017	22127.33	12/4/2017	26834.3	5/7/2018	27512.56	9/28/2018	33461.77	2/26/2019	36026.63
2/10/2017	19502.93	7/12/2017	22262.64	12/5/2017	26483	5/8/2018	26276.52	10/1/2018	32584.94	2/27/2019	35345.47
2/13/2017	19507.54	7/13/2017	21976.37	12/6/2017	26470.45	5/9/2018	27907.92	10/2/2018	32730.38	2/28/2019	34485.8
2/14/2017	19606.38	7/14/2017	21880.16	12/7/2017	26841.5	5/10/2018	29600.66	10/3/2018	32201.47	3/1/2019	33834.86
2/15/2017	19657.07	7/17/2017	21296.5	12/11/2017	27307.06	5/11/2018	29852.06	10/4/2018	30928.83	3/6/2019	32340.43
2/16/2017	19563.21	7/18/2017	21046.43	12/12/2017	27341.58	5/14/2018	30441.6	10/5/2018	30168.72	3/7/2019	33189.91
2/17/2017	19681.34	7/19/2017	21450.4	12/13/2017	27034.57	5/15/2018	30676.94	10/8/2018	30547.13	3/8/2019	33020.07
2/20/2017	20038.39	7/20/2017	21465.2	12/14/2017	27139.1	5/16/2018	31660.57	10/9/2018	29612.45	3/11/2019	33790.68
2/21/2017	20072.92	7/21/2017	21498.58	12/15/2017	27021.94	5/17/2018	31806.18	10/10/2018	28549.77	3/12/2019	33640.59
2/22/2017	19915.25	7/24/2017	21310.37	12/18/2017	27137.32	5/18/2018	31869.82	10/11/2018	27613.09	3/13/2019	34023.02
2/23/2017	19538.09	7/25/2017	21243.25	12/19/2017	27706.71	5/21/2018	31632.45	10/12/2018	29598.18	3/14/2019	33530.45
2/24/2017	19117.45	7/26/2017	21202.91	12/20/2017	28068.96	5/22/2018	30991.35	10/16/2018	29430.59	3/15/2019	33933.08
3/1/2017	19358.97	7/27/2017	21294.02	12/21/2017	28480.71	5/23/2018	30233.95	10/17/2018	28721.37	3/18/2019	34939.3
3/2/2017	18966.51	7/28/2017	21689.22	12/22/2017	28931.54	5/24/2018	29664.9	10/18/2018	28370.45	3/19/2019	34373.2
3/3/2017	19265.45	7/31/2017	21582.4	12/26/2017	29185.62	5/28/2018	28653.75	10/19/2018	28673.28	3/20/2019	34743.9
3/6/2017	19197.34	8/1/2017	21522.3	12/27/2017	29193.48	5/29/2018	28325.59	10/22/2018	28567.78	3/21/2019	34186.08
3/7/2017	19248.16	8/2/2017	21798.64	12/28/2017	29974.54	5/30/2018	28389.4	10/23/2018	28359.72	3/22/2019	32827.98
3/8/2017	19232.61	8/3/2017	21779.54	12/29/2017	30065.61	5/31/2018	28558.83	10/24/2018	28157.43	3/25/2019	33166.32
3/9/2017	18785.49	8/4/2017	21703.9	1/2/2018	31084.42	6/1/2018	28436.75	10/25/2018	29334.99	3/26/2019	32627.59
3/10/2017	18895.91	8/7/2017	21478.44	1/3/2018	31476.26	6/4/2018	29036.15	10/26/2018	29369.87	3/27/2019	32174.68
3/13/2017	19188.25	8/8/2017	21255.71	1/4/2018	31951.99	6/5/2018	30359.26	10/29/2018	28898.24	3/28/2019	32892.15
3/14/2017	19062.24	8/9/2017	20924.99	1/5/2018	32190.3	6/6/2018	30428	10/30/2018	29425.79	3/29/2019	33466.03
3/15/2017	19368.39	8/10/2017	21132.97	1/8/2018	32351.2	6/7/2018	30177.81	10/31/2018	29491.11	4/1/2019	33006.82
3/16/2017	19601.29	8/11/2017	21632.98	1/9/2018	32138.59	6/8/2018	31444.08	11/1/2018	31308.63	4/3/2019	31765.11
3/17/2017	19434	8/14/2017	22539.96	1/10/2018	31632.36	6/11/2018	31703.85	11/2/2018	31419.26	4/4/2019	32142.47
3/20/2017	19793.52	8/15/2017	22702.38	1/11/2018	32078.22	6/12/2018	30749.09	11/5/2018	31429.3	4/5/2019	32666.88
3/21/2017	19535.2	8/16/2017	22887.94	1/12/2018	32719.7	6/13/2018	30228.42	11/6/2018	30973.55	4/8/2019	33080.87
3/22/2017	19666.59	8/17/2017	22724.48	1/15/2018	33622.84	6/14/2018	30114.88	11/7/2018	31404.69	4/9/2019	31743.38
3/23/2017	19705.1	8/18/2017	22967.35	1/16/2018	33521.63	6/15/2018	30147.65	11/8/2018	30736.41	4/10/2019	32154.54
3/27/2017	19801.71	8/22/2017	22900.18	1/17/2018	33598.21	6/18/2018	27656.57	11/9/2018	29912.49	4/11/2019	31501.04
3/28/2017	20022.42	8/23/2017	23262.38	1/18/2018	34049.35	6/19/2018	29118.51	11/12/2018	29423.3	4/12/2019	31357.03
3/29/2017	20203.27	8/24/2017	23392.5	1/19/2018	33591.7	6/21/2018	30869.35	11/13/2018	28543.43	4/15/2019	31745.57
3/30/2017	20248.42	8/25/2017	23500.95	1/22/2018	33525.47	6/22/2018	30210.61	11/14/2018	29372.54	4/16/2019	32290.18
3/31/2017	20265.32	8/28/2017	23482.05	1/23/2018	33893.42	6/25/2018	28825.12	11/15/2018	30473.82	4/17/2019	32036.78
4/3/2017	20561.9	8/29/2017	23443.59	1/24/2018	34948.56	6/26/2018	28473.48	11/16/2018	31109.25	4/22/2019	30786.64
4/4/2017	20834.74	8/30/2017	23491.81	1/25/2018	35141.72	6/27/2018	25921.08	11/20/2018	29714.68	4/23/2019	30926.73
4/5/2017	20683.02	8/31/2017	23588.98	1/26/2018	35126.22	6/28/2018	26789.41	11/21/2018	30262.92	4/24/2019	29746.6
4/6/2017	20812.82	9/1/2017	23657.64	1/29/2018	34787.4	6/29/2018	26037.01	11/22/2018	30274.51	4/25/2019	29556.77
4/7/2017	20727.56	9/4/2017	23707.77	1/30/2018	34241.26	7/2/2018	25298.04	11/23/2018	30723.48	4/26/2019	30001.1
4/10/2017	20926.18	9/5/2017	24025.94	1/31/2018	34938.64	7/3/2018	27092.19	11/26/2018	31131.87	4/29/2019	28827.37
4/11/2017	20994.8	9/6/2017	24164.85	2/1/2018	34641.37	7/4/2018	27702.88	11/27/2018	30921.11	4/30/2019	29571.36
4/12/2017	20812.17	9/7/2017	24250.25	2/2/2018	32614.77	7/5/2018	27813.17	11/28/2018	31138.66	5/2/2019	30817.01
4/17/2017	20748.13	9/8/2017	24018.13	2/5/2018	31145.6	7/6/2018	27611.04	11/29/2018	31482.58	5/3/2019	32412.27
4/18/2017	20669.72	9/11/2017	24066.49	2/6/2018	31624.18	7/10/2018	27635.21	12/3/2018	31888.79	5/6/2019	33001.08
4/19/2017	20513.17	9/12/2017	23529.22	2/7/2018	31626.73	7/11/2018	27231.78	12/4/2018	31958.33	5/7/2019	32741.13
4/20/2017	20668.71	9/13/2017	23836.58	2/8/2018	31021.59	7/12/2018	26704.91	12/5/2018	31779.87	5/8/2019	33775.97
4/21/2017	20768.98	9/14/2017	23701.71	2/9/2018	30143.44	7/13/2018	26514.16	12/6/2018	32019.84	5/9/2019	34119.1
4/24/2017	21169.87	9/15/2017	23715.54	2/14/2018	31551.31	7/16/2018	26263.65	12/7/2018	31550.4	5/10/2019	33393.81
4/25/2017	21198.87	9/18/2017	23913.92	2/15/2018	32023.64	7/17/2018	26765.07	12/10/2018	30753.54	5/13/2019	32300.25
4/26/2017	21027.67	9/19/2017	24214.62	2/16/2018	32677.25	7/18/2018	27044.46	12/11/2018	30941.09	5/14/2019	32510.83
4/27/2017	20889.45	9/20/2017	24334.82	2/19/2018	33281.32	7/19/2018	26814.42	12/12/2018	31081.37	5/15/2019	33218.06
4/28/2017	21019.91	9/21/2017	24578.7	2/20/2018	32825.94	7/20/2018	27625.34	12/13/2018	31019.79	5/16/2019	33892.17
5/2/2017	21157.45	9/22/2017	24994.48	2/21/2018	33042.3	7/23/2018	27703.74	12/14/2018	31109.45	5/17/2019	33315.7
5/3/2017	21212.03	9/25/2017	25047.18	2/22/2018	33124.77	7/24/2018	28272.52	12/17/2018	29888.02	5/20/2019	33492.48
5/4/2017	20985.52	9/26/2017	25166.21	2/23/2018	32742.39	7/25/2018	29363.46	12/18/2018	29777.26	5/21/2019	34481.33
5/5/2017	21169.68	9/27/2017	25271.19	2/26/2018	32918.2	7/26/2018	29204.92	12/19/2018	29968.28	5/22/2019	34578.77
5/8/2017	21076.71	9/28/2017	25597.01	2/27/2018	32516.31	7/27/2018	29259.02	12/20/2018	29242.75	5/23/2019	34378.55
5/9/2017	21140.16	9/29/2017	26078.29	2/28/2018	33010.9	7/30/2018	29232.12	12/21/2018	28456.92	5/24/2019	35084.92
5/10/2017	21510	10/2/2017	26350.75	3/1/2018	32013.03	7/31/2018	29287.34	12/26/2018	28473.44	5/27/2019	35448.46
5/11/2017	21426.58	10/3/2017	26672.97	3/2/2018	31900.7	8/1/2018	29387.8	12/27/2018	29519.37	5/28/2019	34643.54
5/12/2017	21502.41	10/4/2017	26476.77	3/5/2018	32133.74	8/2/2018	28882.85	12/28/2018	30292.55		
5/15/2017	21656.6	10/5/2017	27015.58	3/6/2018	32864.98	8/3/2018	29215.98	1/2/2019	31096.63		
5/16/2017	21833.61	10/6/2017	26797.79	3/7/2018	32743.55	8/6/2018	28893.97	1/3/2019	31065.12		
5/17/2017	21674.24	10/9/2017	26765.96	3/8/2018	32822.6	8/7/2018	27783.35	1/4/2019	32303.05		
5/18/2017	21033.96	10/10/2017	27097.26	3/9/2018	33182.6	8/8/2018	26674.87	1/7/2019	33010.54		
5/19/2017	21614.87	10/11/2017	26889.79	3/12/2018	33243.97	8/9/2018	26906.28	1/8/2019	32914.88		
5/22/2017	21500.84	10/12/2017	27059.52	3/13/2018	32980.12	8/10/2018	26856.15	1/9/2019	33769.35		
5/23/2017	21520.66	10/13/2017	27140.8	3/14/2018	32824.48	8/13/2018	26061.96	1/10/2019	34167.45		
5/24/2017	21684.59	10/17/2017	26622.44	3/15/2018	32707.46	8/14/2018	26536.63	1/11/2019	33884.6		
5/26/2017	22141.71	10/18/2017	26213.15	3/16/2018	32555.08	8/15/2018	27008.2	1/14/2019	33771.24		
5/29/2017	22347.43	10/19/2017	26804.55	3/19/2018	31724.38	8/16/2018	26938.75	1/15/2019	33562.54		
5/30/2017	22310.58	10/20/2017	26978.98	3/20/2018	31797.57	8/17/2018	26238.82	1/16/2019	34048.02		

Figura 52: **Serie S&P Merval**: La siguiente tabla muestra la serie del S&P Merval.

7.2 Códigos en Python para el cómputo de los operadores.

```
## 1. Get the file names in the path directory:
path=r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Raw Files\Stocks'
export=r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\1. Output - Read Raw Files'

cwd = os.getcwd()
os.chdir(path)
files=os.listdir(path)
file_names = [w.replace('.csv', '') for w in files]
file_df = [w.replace('.csv', '_df') for w in files]
file_df_merge =[w.replace('.csv', '_df') for w in files]

## 1. Import the files:
for i in range(len(file_df)):

    file_df[i]  = pd.read_csv(path+'\\'+files[i])

    # Rename the first column to date  - Rename Closing price to name of the stock
    file_df[i]=file_df[i].rename(columns={file_df[i].columns[0]:'Date',file_df[i].columns[1]:file_names[i]})
    # Date to datetime
    file_df[i].iloc[:,0]=pd.to_datetime(file_df[i].iloc[:,0])


    # Merge All the dates
    file_df_merge[0] = file_df[0]

    if i > 0:

        file_df_merge[i]= file_df_merge[i-1].merge(file_df[i],left_on='Date', right_on='Date')


    if i == len(files)-1:
        file_df_merge[i].to_csv(export+ '\\' +'Merge Index'+'.csv',index=False)
```

```
from pyentrp import entropy1 as ent
import dit.other as dit
from scipy import stats as sci
import matplotlib.pyplot as plt
import warnings
from entropy import entropy as entr
from scipy import signal
import os
## 1. Get the file names in the path directory:
path=r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\1. Output - Read Raw Files'
out=r"C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\2. Log Returns"
cwd = os.getcwd()
os.chdir(path)
files=os.listdir(path)
file_names = [w.replace('.xlsx', '') for w in files]
file_df = [w.replace('.xlsx', '_df') for w in files]
# 2. Import the merge file
merge = pd.read_csv(path+'\\'+files[0])
# 3. Log Return Calculation
for i in range(1,len(merge.columns),1):
    merge['Log Return '+merge.columns[i]]=np.log(merge.iloc[:,i])-np.log(merge.iloc[:,i].shift(periods=1))
merge.dropna(inplace=True)
# 3. Select only the Date Column and the Log return ones
log_return_names = [x for x in merge.columns if x.find("Log Return")==0 ]
log_return_names.insert(0, "Date")
merge_logreturn = merge[[c for c in merge.columns if c in log_return_names]]

# 4. Export

merge_logreturn.to_csv(out+'\\'+'merge_LogReturn.csv',index=False)
```

Figura 53: La siguiente figura muestra el programa 1 y 2 de Python, donde se leen los archivos originales y se aplican el retorno logarítmico.

```python
from pyentrp import entropy1 as ent
import dit.other as dit
from scipy import stats as sci
import matplotlib.pyplot as plt
import warnings
from entropy import entropy as entr
from scipy import signal
import os
## 1. Get the file names in the path directory:
path=r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\1. Output - Read Raw Files'
out=r"C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\2. Log Returns"
cwd = os.getcwd()
os.chdir(path)
files=os.listdir(path)
file_names = [w.replace('.xlsx', '') for w in files]
file_df = [w.replace('.xlsx', '_df') for w in files]
# 2. Import the merge file
merge = pd.read_csv(path+'\\'+files[0])
# 3. Log Return Calculation
for i in range(1,len(merge.columns),1):
    merge['Log Return '+merge.columns[i]]=np.log(merge.iloc[:,i])-np.log(merge.iloc[:,i].shift(periods=1))
merge.dropna(inplace=True)
# 3. Select only the Date Column and the Log return ones
log_return_names = [x for x in merge.columns if x.find("Log Return")==0 ]
log_return_names.insert(0, "Date")
merge_logreturn = merge[[c for c in merge.columns if c in log_return_names]]

# 4. Export

merge_logreturn.to_csv(out+'\\'+'merge_LogReturn.csv',index=False)
```

```python
dimension = 4
time = 1
delta =1
w = 180
# Uniform PMF for Jensen Shannon
uniform_pmf= np.ones(np.math.factorial(dimension))/np.math.factorial(dimension)
## 1. Get the file names in the path directory:
path=r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\3.1 Time Slide'
out=r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\4.1 Permutation entropy & Complexity'
# Get the weeks to merge
weekdata=r'C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\2. Log Returns\merge_LogReturn.csv'
weekdata_df  = pd.read_csv(weekdata)

weekdata_df = weekdata_df.iloc[w-1:,0].reset_index()
weekdata_df = weekdata_df.T
weekdata_df = weekdata_df.iloc[1:,:]
weekdata_df.iloc[:,0]='Date'

# Get the Files from the Path
cwd = os.getcwd()
os.chdir(path)
files=os.listdir(path)
file_names = [w.replace('.csv', '') for w in files]
file_df = [w.replace('.csv', '_df') for w in files]
clean_names =[w.replace('Log Return ', '') for w in files]
clean_names =[w.replace('.csv', '') for w in clean_names]
num_files=len(file_names)                                    # Number of  files
                                                             # Set maximun coarse time

for i in range(len(file_df)):                                # Loof trought all the files
    file_df[i]  = pd.read_csv(path+'\\'+files[i])            # Import the files
    N= len(file_df[i].columns)

    number_of_series=len(file_df[0].columns.values)          # Number of Columns , number of series form time delay
    if i ==0:
        permutation_matrix =  np.zeros((num_files,number_of_series)) # Set up mother matrix
        complexity_matrix =  np.zeros((num_files,number_of_series))

    for k in range(1,number_of_series,1):                    # Loop through the columns
        series = file_df[i].iloc[:,k]
        series_array= series.values                          # Change to numpyarray
        # Permutation Entropy PMF
        permutation_entropy_pmf = ent.permutation_entropy_pmf(series_array,dimension,time)
        # Jensen Shannon Divergence
        jensen_shannon = ent.JSD(permutation_entropy_pmf,uniform_pmf)
        # Permutation Entropy
        permutation_entropy=ent.permutation_entropy_weighted(series_array,
        dimension,time,weighted=True)/np.log2(np.math.factorial(dimension))
        # Complexity LMC
        complexity = permutation_entropy*jensen_shannon
        permutation_matrix[i,k]= permutation_entropy
        complexity_matrix[i,k]=complexity

permutation_entropy_df=pd.DataFrame(permutation_matrix)
permutation_entropy_df.iloc[:,0]=clean_names
permutation_entropy_df = permutation_entropy_df.append(weekdata_df)
complexity_matrix_df  =pd.DataFrame(complexity_matrix)
complexity_matrix_df.iloc[:,0]=clean_names
complexity_matrix_df = complexity_matrix_df.append(weekdata_df)
permutation_entropy_df.to_csv(out+'\\'+str(w)+'_'+'Permutation_Entropy.csv',index=False)
complexity_matrix_df.to_csv(out+'\\'+str(w)+'_'+'Complexity_Matrix.csv',index=False)
```

Figura 54: La siguiente figura muestra el programa 3 y 4 de Python donde se realizan los cálculos de los diferentes operadores con los parámetros elegidos.

7.3 Códigos en SAS.

```
%let excel = C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs\Kruskal-Wallis.xlsx;
%let export = C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs;
%macro agus();
proc import datafile = "&excel"
out= entropy
dbms = xlsx replace; sheet = 'entropy';
run;
proc import datafile = "&excel"
out= complexity dbms = xlsx replace; sheet = 'complexity';
run;
ods pdf file="&export.\correlation_entropy.pdf";
proc corr data=entropy pearson spearman kendall noprob OUTk = entropy_correlations;
var S_P_Merval_200 S_P_Merval_180 S_P_Merval_90 Dolar Riesgo_Pais;
run;
ods pdf close;
ods pdf file="&export.\correlation_complexity.pdf";
proc corr data=complexity noprob pearson spearman  kendall  OUTk = complexity_correlations;
**spearman kendall  pearson ;
var S_P_Merval_200 S_P_Merval_180 S_P_Merval_90 Dolar Riesgo_Pais;
run;
ods pdf close;
proc export data = entropy_correlations
outfile = "C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs\Correlations.xlsx"
dbms = xlsx replace; sheet = "Entropy";
run;
proc export data = complexity_correlations
outfile = "C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs\Correlations.xlsx"
dbms = xlsx replace;sheet = "Complexity";
run;
%mend;
%agus();
```

Figura 55: La siguiente figura muestra el programa en lenguage SAS utilizado para el cálculo de las correlaciones.

```
%let excel = C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs\Kruskal-Wallis.xlsx;
%let configfile = C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs\DeTrendRegression_Configfile.xlsx;
%let export = C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs;
%global numberofvars Name;

%macro import();

proc import datafile = "&excel"
out= entropy
dbms = xlsx replace; sheet = 'entropy';
run;

proc import datafile = "&excel"
out= complexity
dbms = xlsx replace;
sheet = 'complexity';
run;

proc import datafile = "&configfile"
out= configfile dbms = xlsx
replace;
run;

proc sql noprint;
    select count(*) into :numberofvars from configfile;
    select Variables into :Name separated by " " from configfile ;
quit;

%put Las Variables son : &Name.;
%put El numero de  Variables son : &numberofvars.;

%mend;
%import;
%macro agus();

data entropy;
set entropy;

Trend = _N_;
data complexity;
set complexity;
Trend = _N_;
RUN;

ods pdf file="&export.\reg_entropy.pdf";
%do i = 1 %to &numberofvars.;

    %let tmpname = %scan(&Name.,&i.," ");
    proc reg data = entropy  TABLEOUT outest=e_reg_&tmpname.;
    id Dia;
    model &tmpname. = Trend;
    output  out=entropy_reg_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
    run;

    proc reg data = complexity TABLEOUT outest = c_reg_&tmpname.;
    id Dia;
    model &tmpname. = Trend;
    output  out=complexity_reg_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
    run;

    data complexity_reg_output;
    set complexity_reg_output (keep = Dia &tmpname. &tmpname._predicted &tmpname._residual);
    run;
    data entropy_reg_output;
    set entropy_reg_output (keep = Dia &tmpname. &tmpname._predicted &tmpname._residual);
    run;
%end;
ods pdf close;

data e_reg_;
set e_reg_:;
run;

data c_reg_;
set c_reg_:;
```

Figura 56: La siguiente figura muestra el programa en lenguage SAS utilizado para el cálculo de los diferentes modelos.

```
%mend;
%agus();
%macro entropycomplex();

%let entropyorcomplex = entropy complexity;
%do i = 1 %to 2;
%let tmpname = %scan(&Name.,&i.," ");
%let tmpseries = %scan(&entropyorcomplex.,&i.," ");

** ------------ Regression  2 ------------ ;
** ------------ Entropy ------------ ;
** Dollar;

proc reg data = &tmpseries. TABLEOUT outest = &tmpseries._reg_2_d_200;
id Dia;
model Dolar = Trend S_P_Merval_200 ;
output  out=&tmpseries._reg_2_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
run;

proc reg data = &tmpseries. TABLEOUT outest = &tmpseries._reg_2_d_180;
id Dia;
model Dolar = Trend S_P_Merval_180 ;
output  out=&tmpseries._reg_2_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
run;

proc reg data = &tmpseries. TABLEOUT outest = &tmpseries._reg_2_d_90;
id Dia;
model Dolar = Trend S_P_Merval_90 ;
output  out=&tmpseries._reg_2_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
run;

**Riesgo Pais;
proc reg data = &tmpseries. TABLEOUT outest = &tmpseries._reg_2_r_200;
id Dia;
model Riesgo_Pais = Trend S_P_Merval_200 ;
output  out=&tmpseries._reg_2_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
run;
proc reg data = &tmpseries. TABLEOUT outest = &tmpseries._reg_2_r_180;
id Dia;
model Riesgo_Pais = Trend S_P_Merval_180 ;
output  out=&tmpseries._reg_2_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
run;

proc reg data = &tmpseries. TABLEOUT outest = &tmpseries._reg_2_r_90;
id Dia;
model Riesgo_Pais = Trend S_P_Merval_90 ;
output  out=&tmpseries._reg_2_output p=&tmpname._predicted r=&tmpname._residual ;
run;


data d_&tmpseries._reg_2;
set &tmpseries._reg_2_d_200 &tmpseries._reg_2_d_180 &tmpseries._reg_2_d_90  &tmpseries._reg_2_r_200
&tmpseries._reg_2_r_180 &tmpseries._reg_2_r_90;
run;


proc export data = d_&tmpseries._reg_2
outfile = "C:\Users\veag6001\Downloads\Tesis\Capitulo5\Output\Graphs\&tmpseries._reg2.xlsx"
dbms = xlsx
replace;
    sheet = "&tmpseries.";
    run;

%end;
%mend;
%entropycomplex();
```

Figura 57: La siguiente figura muestra el programa en lenguage SAS utilizado para el cálculo de los diferentes modelos.

Bibliografía

[1] Christoph Bandt and Bernd Pompe. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. *Physical review letters*, 88:174102, April 2002.

[2] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 01 2001.

[3] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004.

[4] Boris S. Mordukhovich and Nguyen Mau Nam. *An Easy Path to Convex Analysis and Applications*. Morgan & Claypool Publishers, 1st edition, 2013.

[5] H. Anton. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 2010.

[6] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013.

[7] Tom M Apostol. *Mathematical analysis; 2nd ed.* Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[8] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw - Hill Book C., 1986.

[9] H.L. Royden and R.H. L. *Real Analysis*. Mathematics and statistics. Macmillan, 1988.

[10] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford University Press, Oxford; New York, 2001.

[11] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory (Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing)*. Wiley-Interscience, USA, 2006.

[12] Jorma Rissanen. *Information and Complexity in Statistical Modeling*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1 edition, 2007.

[13] Robert M. Gray. *Entropy and Information Theory*. Springer US, 2011.

[14] Shunsuke Ihara. *Information Theory for Continuous Systems*. WORLD SCIENTIFIC, 1993.

[15] Lucien Benguigui. The different paths to entropy. *European Journal of Physics*, 34:303, 01 2013.

[16] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, 5(1):3–55, 2001.

[17] Carlo Bertoluzza, Mario Di Bacco, and Viviana Doldi. An axiomatic characterization of the measures of similarity. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics (2003-2007)*, 66(3):474–486, 2004.

[18] Alfréd Rényi. On measures of entropy and information. Technical report, Berkeley, Calif., 1961.

[19] Jose C. Principe. *Information Theoretic Learning: Renyi's Entropy and Kernel Perspectives*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.

[20] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52:479–487, 07 1988.

[21] Manuel O. Cáceres. Non-markovian processes with long-range correlations: fractal dimension analysis. *Brazilian Journal of Physics*, 29:125–135.

[22] Dandan Zhang, Xiaofeng Jia, Haiyan Ding, Datian Ye, and N.v Thakor. Application of tsallis entropy to eeg: Quantifying the presence of burst suppression after asphyxial cardiac arrest in rats. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 57:867 – 874, 05 2010.

[23] Tomasz Maszczyk and Włodzisław Duch. Comparison of shannon, renyi and tsallis entropy used in decision trees. In Leszek Rutkowski, Ryszard Tadeusiewicz, Lotfi A. Zadeh, and Jacek M. Zurada, editors, *Artificial Intelligence and Soft Computing – ICAISC 2008*, pages 643–651, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer Berlin Heidelberg.

[24] Shigeru Furuichi. Information theoretical properties of tsallis entropies. *Journal of Mathematical Physics*, 47(2):023302, 2006.

[25] A. K. C. Wong and M. You. Entropy and distance of random graphs with application to structural pattern recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-7(5):599–609, Sep. 1985.

[26] J. Lin. Divergence measures based on the shannon entropy. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(1):145–151, 1991.

[27] D. M. Endres and J. E. Schindelin. A new metric for probability distributions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(7):1858–1860, 2003.

[28] Flemming Topsøe and Bent Fuglede. *Jensen-Shannon Divergence and Hilbert space embedding*, page 31. IEEE Signal Processing Society, 2004.

[29] Flemming Topsoe. Some inequalities for information divergence and related measures of discrimination. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 46:1602 – 1609, 08 2000.

[30] R.A. Fisher. On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 222:309–368, 1922.

[31] B. Roy Frieden. *Science from Fisher Information: A Unification*. Cambridge University Press, 2004.

[32] M. T. Martin, F. Pennini, and A. Plastino. Fisher's information and the analysis of complex signals. *Physics Letters A*, 256(2-3):173–180, May 1999.

[33] Luciano Telesca, Vincenzo Lapenna, and Michele Lovallo. Fisher information measure of geoelectrical signals. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 351:637–644, 06 2005.

[34] F. Marchese, N. Pergola, and L. Telesca. Investigating the temporal fluctuations in satellite advanced very high resolution radiometer thermal signals measured in the volcanic area of etna (italy). *Fluctuation and Noise Letters*, 06, 2006.

[35] E Romera, P Sánchez-Moreno, and JS Dehesa. The fisher information of single-particle systems with a central potential. *Chemical physics letters*, 414(4-6):468–472, 2005.

[36] Christophe Vignat and J-F Bercher. Analysis of signals in the fisher–shannon information plane. *Physics Letters A*, 312(1-2):27–33, 2003.

[37] Felipe Olivares, Angelo Plastino, and Osvaldo A Rosso. Contrasting chaos with noise via local versus global information quantifiers. *Physics Letters A*, 376(19):1577–1583, 2012.

[38] Takis Papaioannou and Kosmas Ferentinos. On two forms of fisher's measure of information. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 34(7):1461–1470, 2005.

[39] Ricardo Lopez-Ruiz, Jaime Sanudo, Elvira Romera, and Xavier Calbet. Statistical complexity and fisher-shannon information. applications. *Springer Book Chapter*, 01 2012.

[40] P.W Lamberti, M.T Martin, A Plastino, and O.A Rosso. Intensive entropic non-triviality measure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 334(1):119–131, 2004.

[41] Łukasz Rudnicki, Irene V. Toranzo, Pablo Sánchez-Moreno, and Jesus Dehesa. Monotone measures of statistical complexity. *Physics Letters A*, 380, 10 2015.

[42] Ricardo Lopez-Ruiz. Shannon information, lmc complexity and rényi entropies: A straightforward approach. *Biophysical Chemistry*, 05 2005.

[43] Maik Riedl, Andreas Müller, and Niels Wessel. Practical considerations of permutation entropy: A tutorial review. *The European Physical Journal Special Topics*, 222, 06 2013.

[44] Luciano Zunino, Felipe Olivares, Felix Scholkmann, and Osvaldo Rosso. Permutation entropy based time series analysis: Equalities in the input signal can lead to false conclusions. *Physics Letters A*, 381, 04 2017.

[45] David Cuesta–Frau, Manuel Varela, Antonio Molina–Picó, and Borja Vargas. Patterns with equal values in permutation entropy: Do they really matter for biosignal classification? *Complexity*, 2018:1–15, 08 2018.

[46] Bilal Fadlallah, Badong Chen, Andreas Keil, and José Príncipe. Weighted-permutation entropy: A complexity measure for time series incorporating amplitude information. *Phys. Rev. E*, 87:022911, Feb 2013.

[47] Madalena Costa, Ary L Goldberger, and C-K Peng. Multiscale entropy analysis of complex physiologic time series. *Physical review letters*, 89(6):068102, 2002.

[48] Madalena Costa, C-K Peng, Ary L Goldberger, and Jeffrey M Hausdorff. Multiscale entropy analysis of human gait dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its applications*, 330(1-2):53–60, 2003.

[49] Madalena Costa, Ary L Goldberger, and C-K Peng. Multiscale entropy analysis of biological signals. *Physical review E*, 71(2):021906, 2005.

[50] Rongbao Gu. Multiscale shannon entropy and its application in the stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 484, 05 2017.

[51] Y. Zhang and P. Shang. Refined composite multiscale weighted-permutation entropy of financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 496:189–199, 2018.

[52] Hamed Azami and Javier Escudero. Improved multiscale permutation entropy for biomedical signal analysis: Interpretation and application to electroencephalogram recordings. *Biomedical Signal Processing and Control*, 23:28–41, 01 2016.

[53] Ryuji Ishizaki and Masayoshi Inoue. Time-series analysis of foreign exchange rates using time-dependent pattern entropy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392:3344–3350, 08 2013.

[54] Shanbao Tong, Anastasios Bezerianos, Joseph Paul, Y. Zhu, and N.v Thakor. Nonextensive entropy measure of eeg following brain injury from cardiac arrest. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 305:619–628, 03 2002.

[55] Anastasios Bezerianos, Shanbao Tong, and N.v Thakor. Time-dependent entropy estimation of eeg rhythm changes following brain ischemia. *Annals of biomedical engineering*, 31:221–32, 03 2003.

[56] Michael Grant and Stephen Boyd. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. http://cvxr.com/cvx, March 2014.

[57] Michael Grant and Stephen Boyd. Graph implementations for nonsmooth convex programs. In V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, editors, *Recent Advances in Learning and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 95–110. Springer-Verlag Limited, 2008. http://stanford.edu/ boyd/graph_dcp.html.

[58] Amir Beck and Nili Guttman-Beck. Fom – a matlab toolbox of first order methods for solving convex optimization problems, to appear in "optimization methods and software", 2018.

[59] Andreas Müller. TOCSY: Toolboxes for complex systems. tocsy.pik-potsdam.de, March 2014.

[60] Nikolay Donets. pyentrp: Functions on top of numpy for computing different types of entropy. tocsy.pik-potsdam.de.

[61] Liangyue Cao. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 110(1–2):43–50, December 1997.

[62] Kennel, Brown, and Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical review. A, Atomic, molecular, and optical physics*, 45 6:3403–3411, 1992.

[63] Juan F. Restrepo, Gastón Schlotthauer, and María E. Torres. Maximum approximate entropy for normal and pathological voices classification. In Ariel Braidot and Alejandro Hadad, editors, *VI Latin American Congress on Biomedical Engineering CLAIB 2014, Paraná, Argentina 29, 30 & 31 October 2014*, pages 548–551, Cham, 2015. Springer International Publishing.

[64] J.F. Monahan. *A Primer on Linear Models*. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. CRC Press, 2008.