UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

Facultad de Tecnología e Informática



Universidad Abierta Interamericana

Alteraciones del espacio-tiempo debidas a agujeros negros estáticos y en rotación

Por
Franco Di Leo

Director de tesis: Dr. Leonardo G. Trombetta, Co-director: Dr. Agustín Besteiro

Tesis presentada para optar por el título de licenciado en matemática
-diciembre 2025-

Resumen

Este trabajo analiza la geometría del espacio-tiempo según la relatividad general de Einstein, abordando conceptos de geometría diferencial como tensores, derivadas covariantes y conexiones. Se revisa la relatividad especial como base y se estudia cómo los agujeros negros de Schwarzschild y Kerr deforman el espacio-tiempo, afectando la materia y la luz. El estudio ofrece un marco matemático y físico para entender fenómenos gravitacionales extremos.

Agradecimientos:

A mi mi vieja, por su apoyo y por darme siempre lo mejor.

A mi viejo, que desde otra dimensión me guia y me motiva a ser mejor persona.

A mi novia, por aguantarme hablando sobre agujeros negros y por la paciencia incansable que la transformará en mi esposa.

A Newton, Riemann, Lagrange, Euler y Einstein. Son mi fuente de inspiración y me hacen aspirar a más día a día.

Índice

1. Introducción **7**

2. Convenciones **7**

3. Mecánica de Lagrange **9**
3.1. Introducción . . . 9
3.2. Invarianza bajo transformaciones . . . 10
3.3. Principio de mínima acción . . . 10
3.4. Constantes de movimiento . . . 12

4. Nociones elementales de geometría diferencial **14**
4.1. Variedad diferenciable . . . 14
4.2. Escalares y vectores . . . 15
4.2.1. Escalar . . . 15
4.2.2. Vector . . . 15
4.3. Espacios tangentes y cotangentes . . . 16
4.3.1. Espacio tangente . . . 16
4.3.2. Espacio dual . . . 18
4.3.3. Espacio cotangente . . . 19
4.4. Tensores . . . 19
4.5. Tensor métrico . . . 20
4.5.1. Covector asociado . . . 21
4.6. Deducción de la métrica en coordenadas esféricas . . . 21
4.7. Conexión . . . 22
4.8. Símbolos de Christoffel . . . 23
4.8.1. Interpretación geométrica . . . 23
4.8.2. Definición y propiedades . . . 23
4.9. Derivada covariante . . . 24
4.9.1. Compatibilidad métrica . . . 25
4.9.2. Transporte paralelo . . . 26
4.9.3. Símbolos de Christoffel sobre una superficie esférica . . . 28
4.9.4. Símbolos de Christoffel en coordenadas esféricas . . . 28
4.10. Geodésicas . . . 29
4.10.1. Geodésicas a partir del principio de mínima acción . . . 29
4.10.2. Geodésicas para una 2-variedad . . . 30
4.11. Tensor de riemann . . . 31
4.12. Conmutador en derivadas covariantes . . . 32
4.13. Expresión del tensor de Riemann en coordenadas . . . 32
4.14. Tensor de Ricci y escalar de Ricci . . . 33
4.15. Identidades de Bianchi . . . 34
4.16. Divergencia . . . 34
4.16.1. Divergencia de un campo tensorial . . . 36
4.17. Tensor de Einstein . . . 36

5. Relatividad especial **37**
5.1. Introducción . . . 37
5.1.1. El problema con las transformaciones de Galileo . . . 38
5.1.2. Los postulados de la teoría especial de la relatividad . . . 38
5.2. Transformaciones de Galileo . . . 39
5.3. Espacio de Minkowski . . . 40
5.4. Geometría del espacio-tiempo . . . 41
5.4.1. Lineas de mundo . . . 41
5.4.2. Transformaciones de Lorentz . . . 42
5.5. Tiempo propio . . . 44

6. Mecanica relativista **45**
6.0.1. Hamiltoniano . . . 47
6.0.2. Relación entre energía, masa y momento . . . 47
6.1. Lagrangiano de una partícula no relativista sujeta a un potencial gravitatorio débil . . . 48

7. Relatividad general **49**
7.0.1. Introducción . . . 49
7.1. Principio de equivalencia . . . 50
7.1.1. Principio de equivalencia débil o de Galileo . . . 50
7.1.2. Principio de equivalencia de Einstein . . . 50
7.2. Teorías métricas de gravedad . . . 50
7.3. Ecuaciones de campo . . . 50
7.4. Tensor Energía momento . . . 51
7.5. Solución de Schwarzschild . . . 52
7.5.1. Símbolos de Christoffel . . . 54
7.5.2. Tensor de Ricci . . . 55
7.5.3. Escalar de Ricci . . . 60
7.5.4. Tensor de Einstein . . . 60
7.5.5. Propiedades de la métrica . . . 65

8. Estrellas y agujeros negros **66**
8.1. Enanas blancas . . . 67
8.2. Estrellas de neutrones . . . 67
8.3. Agujeros negros . . . 68
8.3.1. Relación con la relatividad general . . . 69
8.3.2. Propiedades físicas de los agujeros negros . . . 69
8.3.3. Tipos de agujeros negros . . . 70
8.3.4. Importancia en la física moderna . . . 70
8.3.5. Definiciones formales . . . 71

9. Agujero negro de Schwarzschild **73**
9.1. Análisis de las singularidades . . . 73
9.1.1. Singularidad física en $r = 0$ . . . 73
9.1.2. Singularidad de coordenadas en $r = r_s$ . . . 74
9.2. Coordenadas de Kruskal-Szekeres . . . 74
9.3. Conservación de la energía y el momento angular . . . 77
9.3.1. Conservación de la Energía . . . 78

9.3.2. Conservación del momento angular 78
9.3.3. Potencial efectivo 79
9.4. Movimiento en la métrica 80
9.5. Dilatación temporal y tiempo propio 83
9.6. Inversión de la coordenada espacial y temporal en coordenadas de Schwarzschild 85
9.7. Diagramas de Penrose-Carter 86
9.7.1. Diagramas de Penrose-Carter para un agujero negro de Schwarzschild 86

10. Agujero negro de Kerr **87**
10.1. Formación 88
10.2. Características geométricas 88
10.3. Frame dragging 90
10.3.1. Ergosfera 90
10.3.2. Propiedades físicas de la ergosfera 92
10.4. Diagrama de Penrose-Carter para un agujero negro de Kerr 95

11. Conclusión **96**

1. Introducción

Desde comienzos del siglo XX ha tenido lugar un cambio radical en nuestra comprensión del espacio y del tiempo. La formulación de la relatividad general por parte de Albert Einstein a partir de 1915 no solo unificó la descripción de la gravitación con la geometría del espacio-tiempo, sino que supuso un cambio de paradigma en la medida en que tanto la masa como la energía modifican dicha geometría y, en consecuencia, la trayectoria de los cuerpos. Es decir, dejó atrás la noción de que existe una fuerza de atracción entre los cuerpos para mantener que estos siguen sus trayectorias geodésicas en un espacio-tiempo curvado.

Este trabajo tiene como objetivo principal el estudio de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuáles describen modificaciones de la estructura del espacio tiempo en el caso de los agujeros negros estáticos y en rotación (representados por las métricas de Schwarzschild y Kerr). Las mismas no solo constituyen ejemplos canónicos de la relatividad general, sino que describen propiedades extremas del universo donde el tiempo, el espacio y la causalidad se conectan de maneras excepcionales e incluso no intuitivas.

Para entender estas soluciones, comenzamos con los fundamentos de la mecánica clásica y la mecánica lagrangiana, pasando después a los conceptos básicos de la geometría diferencial, que es el incluso o necesariamente un herramienta para describir variedades curvas y el campo tensorial. Sobre esta base matemática se presentan los símbolos de Christoffel, la derivada covariante, el tensor de Riemann y las ecuaciones de Einstein, que permiten poner en relación la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de energía-momento.

A continuación, se estudian las métricas de Schwarzschild y Kerr, indicando en particular sus propiedades geométricas y físicas. En el primer caso, se trata el caso de la geometría del espacio-tiempo en torno a una masa esférica y no rotante, detectando la presencia del horizonte de eventos y la singularidad central, y en el segundo se considera el momento angular, incluyendo fenómenos como el frame dragging y la ergosfera, donde el espacio-tiempo es arrastrado por la rotación del agujero negro.

2. Convenciones

La bibliografía es diversa y cada autor usa su propia convención cuando hablamos de álgebra tensorial y relatividad.

Para la métrica del espacio-tiempo utilizaremos una firma Lorentziana (-, +, +, +) la cual es la más utilizada por la comunidad académica.

$$||\eta_{\mu,\nu}|| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

A lo largo de este trabajo, la notación $||A_{\mu,\nu}||$ representará la matriz del tensor $A_{\mu\nu}$ A veces por simplicidad se obviará la simbología $||-||$.

Las letras griegas $(\mu, \nu, \rho, ...)$ se utilizan para denotar índices del espacio-tiempo y pueden asumir valores $0, 1, 2, 3$. Las letras latinas $(i, j, k, ...)$ son usadas para denotar índices espaciales. Asimismo, la coordenada temporal se puede indicar como t o x^0

A menos que se indique lo contrario, adoptaremos la **convención de suma de Einstein**, según la cual se sobreentiende una suma sobre cualquier índice repetido una vez en posición superior (contravariante) y una vez en posición inferior (covariante) dentro de una misma expresión. Por ejemplo, la expresión $A^\mu B_\mu$ representa la suma $\sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$.

El tensor de Riemann se define como:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}, \tag{2.2}$$

donde $\Gamma^\lambda_{\nu\rho}$ son los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} \right). \tag{2.3}$$

El tensor de Ricci resulta de contraer el tensor de Riemman y se define como $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}$ por lo que escribimos las ecuaciones de campo de Einstein como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

3. Mecánica de Lagrange

3.1. Introducción

La mecánica de Lagrange surge en el siglo XVIII como una reformulación elegante y poderosa de la mecánica clásica newtoniana. Su desarrollo fue una respuesta a la necesidad de manejar sistemas más complejos, particularmente aquellos con restricciones, y de ofrecer un marco matemáticamente más general que las ecuaciones vectoriales de Newton.

El precursor conceptual de este formalismo fue el principio de mínima acción, cuya primera formulación se atribuye a *Pierre-Louis Moreau de Maupertuis* en 1744. Maupertuis propuso que la naturaleza actúa de forma económica, eligiendo la trayectoria que minimiza una cierta cantidad, la *acción*. Esta idea fue influenciada por consideraciones filosóficas y estéticas propias del pensamiento ilustrado de la época, donde se concebía al universo como una manifestación de armonía y simplicidad.

El formalismo fue desarrollado rigurosamente por **Joseph-Louis Lagrange** en su obra *Mécanique analytique* publicada en 1788. En esta obra, Lagrange reformuló toda la mecánica conocida hasta ese momento sin hacer uso explícito de fuerzas, sino mediante funciones escalares —el *lagrangiano*— derivadas de la energía cinética y potencial del sistema. Su enfoque, basado en el cálculo de variaciones y el uso de coordenadas generalizadas, marcó un cambio de paradigma profundo en la formulación de las leyes del movimiento.

Uno de los problemas fundamentales que resuelve la mecánica de Lagrange es el tratamiento de sistemas con restricciones holónomas, es decir, restricciones que pueden expresarse como ecuaciones algebraicas entre coordenadas y el tiempo. Mientras que la mecánica de Newton requiere considerar fuerzas de reacción para respetar estas restricciones, el enfoque lagrangiano las incorpora naturalmente mediante el uso de coordenadas adecuadas y sin necesidad de calcular dichas fuerzas explícitamente.

Además, el formalismo de Lagrange proporciona un método sistemático para derivar las ecuaciones de movimiento a partir de una sola función escalar, lo que lo hace especialmente útil en contextos donde las fuerzas no están dadas de forma evidente, o en sistemas con simetrías donde las leyes de conservación (energía, momento angular, etc.) pueden deducirse directamente del lagrangiano a través del teorema de Noether, formulado un siglo más tarde.

Así, la mecánica lagrangiana no solo representa un refinamiento matemático de la dinámica clásica, sino que constituye una base conceptual profunda que ha influido directamente en el desarrollo de la mecánica cuántica, la teoría de campos y la relatividad general. Su formulación abstracta y general la convierte en una herramienta imprescindible en la física teórica moderna.

El formalismo lagrangiano se basa en el principio de mínima acción, que establece que establece que la trayectoria de un sistema entre dos tiempos t_1, t_2, es aquella cuya acción es estacionaria a primer órden. Este principio que nos provee el formalismo resultará en una manera elegante de inferir las ecuaciones de movimiento de un sistema una vez conocida su acción. El lagrangiano es una función que depende de las coordenadas generalizadas del sistema, sus velocidades y el tiempo, y está relacionada con la energía cinética y potencial del sistema.

En el formalismo lagrangiano, las coordenadas generalizadas son un conjunto cualquiera de parámetros numéricos que sirven para determinar de manera unívoca la configuración de un mecanismo o sistema mecánico con un número finito de grados de libertad. Estas

pueden ser elegidas de manera que simplifiquen el problema. No importa si estamos describiendo un sistema en coordenadas cartesianas, polares, esféricas o cualquier otro sistema. La única restricción es que las coordenadas deben ser capaces de describir el estado completo del sistema, es decir, deben capturar toda la información necesaria sobre las posiciones y las velocidades del sistema.

3.2. Invarianza bajo transformaciones

El lagrangiano es una función que depende de las coordenadas generalizadas q_i, $\dot{q}_i$ y del tiempo. Aunque el lagrangiano puede ser diferente dependiendo de la elección de las coordenadas, la formulación de las ecuaciones de movimiento a partir de los efectos variacionales da como resultado las mismas ecuaciones de movimiento independientemente del sistema elegido. Esto es posible porque el principio de acción estacionaria asegura que el camino seguido por el sistema es el que minimiza la acción, independientemente de la representación.

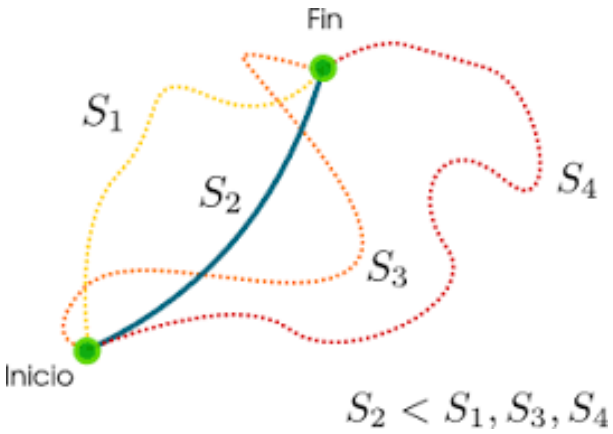


Figura 1: Posibles caminos para llegar del punto Inicio a Fin

3.3. Principio de mínima acción

Consideremos un sistema físico. Su acción S entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 está dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t]dt, \tag{3.1}$$

en donde $L[q(t), \dot{q}_(t), t]$ es el lagrangiano del sistema, $q = (q^1, q^2, ..., q^n)$ representan las n coordenadas generalizadas que definen la configuración del sistema y $\dot{q}_n$ es la derivada de la $n - esima$ coordenada generalizada con respecto a t. Aún no definimos al lagrangiano pero podemos comentar que es una función capaz de describir la dinámica y la evolución de un sistema. Consideremos pequeños cambios en la configuración del sistema descrito por sus coordenadas generalizadas

$$q(t) \to \tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t),$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Dicha variación, produce una variación en la acción del sistema

$$L[\tilde{q}(t), \tilde{\dot{q}}(t), t] = L[q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t), t]. \tag{3.2}$$

Podemos expresar $L[\tilde{q}(t), \tilde{\dot{q}}(t), t]$ como aproximación por serie de Taylor alrededor de $q(t)$

$$L[\tilde{q}(t), \tilde{\dot{q}}(t), t] = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + O(\delta q^2).$$

Y podemos despreciar el término de error $O(\delta q^2)$ por lo que

$$\delta S = L[\tilde{q}(t), \tilde{\dot{q}}(t), t] - L[q(t), \dot{q}(t), t],$$

$$\delta S = L[q(t), \dot{q}(t), t] + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + O(\delta q^2) - L[q(t), \dot{q}(t), t],$$

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}.$$

Formalmente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta S dt,$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i) dt.$$

Además, podemos expresar δq^i como

$$\delta q^i = \tilde{q}^i - q^i,$$

$$\frac{d}{dt}(\delta q^i) = \frac{d}{dt}(\tilde{q}^i - q^i),$$

$$\delta\dot{q}^i = \frac{d}{dt}\tilde{q}^i - \frac{d}{dt}q^i.$$

Multiplicamos miembro a miembro por $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\tilde{q}^i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}q^i.$$

El primer término después de la igualdad se hará cero integrando respecto a t y al aplicar la variación del lagrangiano respecto a la derivada temporal de la coordenada generalizada, q^i se convertirá en δq^i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i.$$

Por lo que podemos expresar la integral de la acción

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}) dt,$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i)dt,$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}]\delta q^i dt.$$

Al requerir que la acción S sea un estacionario de primer orden, requerimos, que para toda pequeña variación de las coordenadas generalizadas q^i su acción no cambia bajo pequeñas perturbaciones

$$\delta S = 0.$$

Obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange que representan las ecuaciones de movimiento del sistema.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{3.3}$$

Llegado este punto, es importante aclarar que el principio de mínima acción, es un principio, no puede ser demostrado pero los sistemas físicos que modelaremos pueden ser tratados bajo este principio.

Encontrar el lagrangiano en algunos sistemas particulares resulta casi trivial. Consideremos el caso de una partícula puntual que se mueve bajo un potencial V por el espacio con coordenadas cartesianas $\vec{x} = (x, y, z)$ a una velocidad $\dot{\vec{x}}$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V. \tag{3.4}$$

Donde $\dot{\vec{x}}$ representa la velocidad de la partícula en nuestro espacio $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ por lo que $\dot{\vec{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$.

Cabe aclarar que se tomó un sistema cartesiano ortogonal como referencia pero se podría haber expresado en cualquier otro.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}^i - V(x^i))}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}^i - V(x^i))}{\partial x^i} = 0, \tag{3.5}$$

$$-\nabla V(x^i) = m\ddot{x}^i. \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) representa la segunda Ley de Newton para una partícula puntual sometida a un potencial V.

3.4. Constantes de movimiento

Estudiaremos un sistema que está descrito por un lagrangiano que no depende del tiempo $L = L[q^i(t), \dot{q}^i(t)]$. Si tomamos la derivada temporal

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d\dot{q}^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}, \tag{3.7}$$

el lagrangiano no depende del tiempo, por lo que

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i. \tag{3.8}$$

Y, a partir de (3.3) podemos reescribir la expresión como

$$(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i - \frac{dL}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i) = (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}\dot{q}^i = (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i.$$

Reemplazamos en la ecuación original

$$(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})\dot{q}^i = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i - \frac{dL}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i) - \frac{dL}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L) = 0. \tag{3.9}$$

La ecuación de arriba nos dice que la cantidad dentro del paréntesis es constante en el tiempo y representa la energía del sistema. Esta es nuestra primera constante de movimiento.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = E = cte.$$

La energía del sistema se conserva cuando el lagrangiano no depende del tiempo.

Consideremos ahora el caso en el que el lagrangiano del sistema no depende explícitamente de una coordenada cualquiera q^i

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{3.10}$$

a partir de (3.3) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0. \tag{3.11}$$

Definición 3.1. *En mecánica, se denomina momento conjugado a una magnitud tipo momento asociada a las coordenadas del espacio de configuración (coordenadas generalizadas).*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{3.12}$$

A partir de (3.12) vemos que el momento conjugado p_i se conserva cuando el lagrangiano no depende explícitamente de la *i-ésima* coordenada.

Un ejemplo simple para representar esto (que nos será útil a futuro) es el de una partícula libre [1] moviendose en el espacio.

[1] Cuando nos referimos a partícula libre nos referímos a que no está sujeta a ningún potencial

$$L[\dot{q},t] = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{3.13}$$

En donde las constantes de movimiento resultan

$$\begin{cases} p_x = m\dot{\vec{x}}, \\ p_y = m\dot{\vec{y}}, \\ p_z = m\dot{\vec{z}}, \\ E = T. \end{cases}$$

4. Nociones elementales de geometría diferencial

Es importante entender las herramientas matemáticas que usaremos a lo largo de este trabajo. Por esto, es crucial profundizar en la geometría diferencial; sobre esta rama de las matemáticas es que descansa toda la relatividad.

4.1. Variedad diferenciable

Definición 4.1. *Sea M un conjunto no vacío, decimos que M es una* ***variedad diferenciable*** [2] ***de dimensión*** *n si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *M es una* ***variedad topológica****, es decir, un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable que es* ***localmente euclideo de dimensión*** *n, es decir, cada punto de M tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Existe un* ***atlas diferenciable*** *sobre M.*

Definición 4.2. *Un* ***atlas*** *$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es una colección de cartas locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$* [3] *donde:*

1. *$\{U_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de M, es decir, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Cada* ***carta*** *$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es un* ***homeomorfismo*** *de U_α a un* ***abierto*** *$\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$.*
2. *Para cualquier* ***intersección no vacía*** *$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la función de cambio de coordenadas*
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$
es un ***difeomorfismo****, es decir, una función de clase C^k (típicamente C^∞ en la mayoría de los casos).*

Si todas las funciones de cambio de coordenadas son de clase C^k, decimos que M es una **variedad diferenciable de clase** C^k. Si son C^∞, la llamamos una **variedad suave**.

[2] El concepto de variedad diferenciable es clave ya que el espacio-tiempo (concepto en el que luego profundizaremos) se modela como una **variedad diferenciable** de 4 dimensiones (3 espaciales y una temporal).

[3] A la función φ_α también se la denomina *mapa de coordenadas*. En el lenguaje informal, muchas veces se usa "mapa" como sinónimo de "carta", aunque formalmente la carta incluye tanto el abierto U_α como la función φ_α.

4.2. Escalares y vectores

4.2.1. Escalar

Un escalar ϕ es una cantidad que se mantiene constante tras un cambio de coordenadas. Bajo la transformación de coordenadas $x^i \to x^{i'}$ se tiene:

$$\phi \to \phi' = \phi. \tag{4.1}$$

A modo de ejemplo, el elemento de linea (distancia) dl es un escalar.

4.2.2. Vector

Un **vector** es un elemento de un espacio vectorial sobre un cuerpo (en este trabajo sobre $\mathbb{R}$). Es decir, es un objeto sobre el cual se definen las operaciones de adición y multiplicación por escalares, satisfaciendo los axiomas de un espacio vectorial.

En un espacio localmente euclídeo, un desplazamiento infinitesimal entre dos puntos cercanos puede representarse mediante el diferencial de coordenadas

$$dx^i = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n), \tag{4.2}$$

el cual constituye un vector.

Una de las características más importantes de un vector es que, dada una base $\{b_i\}$ pertenecientes al espacio vectorial V y componentes pertenecientes al cuerpo K, puede expresarse como combinación lineal de las bases

$$V^i = A^i b_i,$$

o bien

$$V = A^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

dado un cambio de coordenadas $x^i \to x^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, un vector V^i se transforma de acuerdo con la regla

$$V^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} V^j. \tag{4.3}$$

Cabe aclarar que usamos la convención de suma de Einstein para los indices latinos cuando estan presentados de forma contravariante-covariante

$$J^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}. \tag{4.4}$$

Donde $J^{i'}_j$ se conoce como el Jacobiano de transformación, y describe cómo cambian las coordenadas bajo la transformación. Este Jacobiano es una matriz compuesta por las derivadas parciales.

Ejemplo 4.1 (Coordenadas polares a cartesianas)**.** *Tomemos por caso un cambio de coordenadas de polares a cartesianas que nos será útil a futuro. Sabemos que la regla de transformación viene dada por:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Y queremos pasar de $x^i \to x^{i'}$. Recordamos que estamos usando notación de índices por lo que la transformación en $\mathbb{R}^2$ resulta $(x^1, x^2) \to (x^{1'}, x^{2'})$ y, lo que es lo mismo $(\rho, \theta) \to (x, y)$. Como ya mencionamos,

$$J^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},$$

$$J^{i'}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Y, de esta forma, logramos hacer el cambio de coordenadas deseado.

$$V^{i'} = J^{i'}_j V^j.$$

4.3. Espacios tangentes y cotangentes

4.3.1. Espacio tangente

En una variedad diferenciable M de dimensión n, el *espacio tangente* en un punto $p \in M$, denotado como T_pM, es el espacio vectorial de dimensión n que está formado por todos los vectores tangentes a M en p. Si (U, φ) es una carta local de M con coordenadas locales $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, el espacio tangente T_pM está generado por las *bases coordenadas*:

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right\}.$$

Es decir, cada vector tangente $v \in T_pM$ se puede escribir como:

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,$$

donde v^i son los coeficientes del vector en la base natural del espacio tangente.

La unión disjunta de todos los espacios tangentes a cada punto de la variedad forman el **fibrado tangente**.

En particular, si tomamos una variedad (superficie) simple $M \subset \mathbb{R}^3$ como imagen de la carta $x(u_1, u_2)$

$$dx_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}(a, b) \quad \text{y} \quad dx_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2}(a, b)$$

dx_1 y dx_2 representan los vectores tangentes a la variedad en p. Además, por ser regular, son linealmente independientes. En consecuencia, cualquier vector tangente a la variedad M en p puede expresarse como combinación lineal de dx_1 y dx_2, es decir:

$$T = \alpha dx_1 + \beta dx_2 \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, el conjunto $\{dx_1, dx_2\}$ constituye una base del espacio tangente T_pM en el punto p.

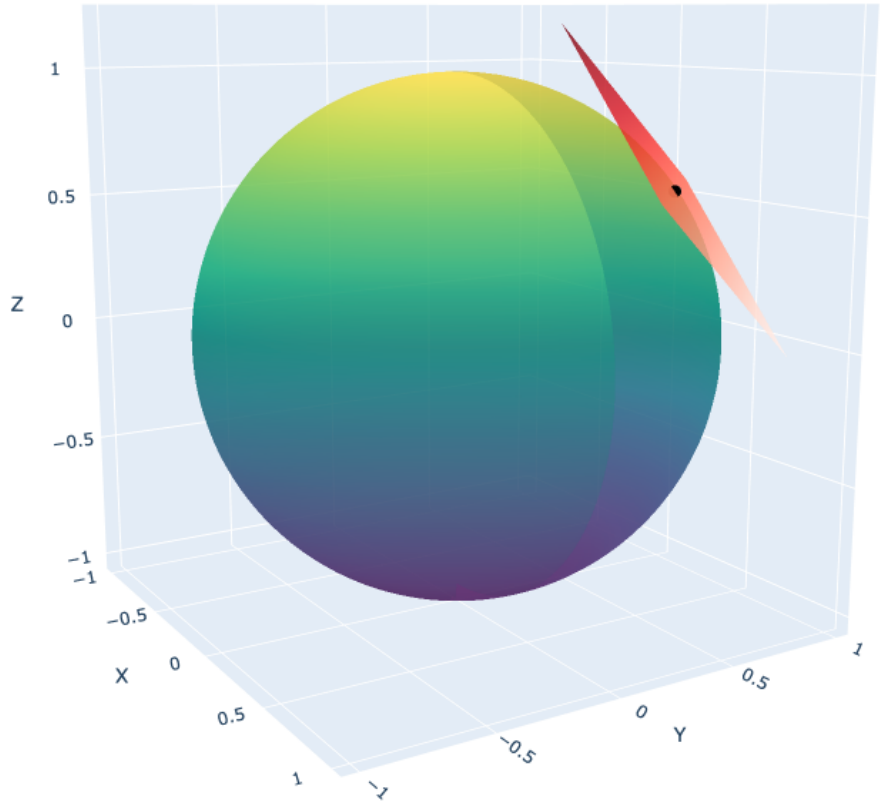


Figura 2: Espacio tangente formado por los vectores tangente a un punto P de una esfera unitaria.

El espacio tangente, como veremos, es de vital importancia en relatividad general ya que en este espacio viven los vectores velocidad (cuatro-velocidad) de los objetos que recorren la variedad.

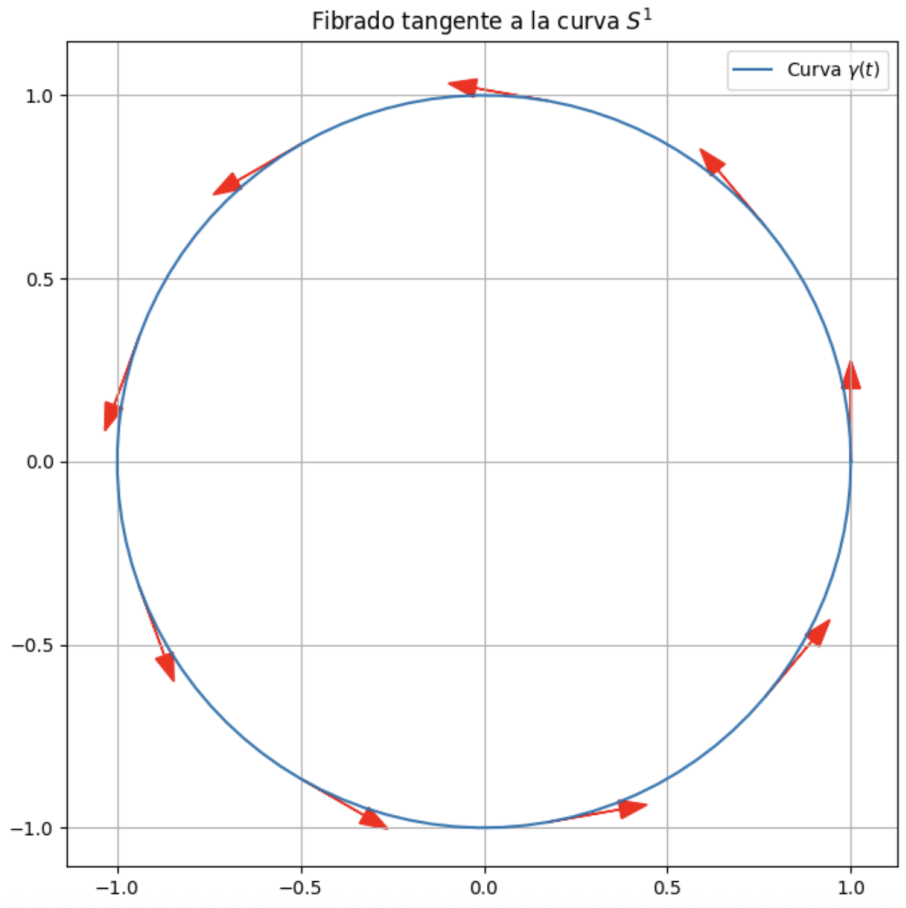


Figura 3: Fibrado tangente a la curva S_1 como unión disjunta de los vectores tangentes a cada punto.

4.3.2. Espacio dual

Sea V un K-espacio vectorial. Se llama *espacio dual de* V, y se lo nota V^*, al conjunto de todas las funcionales lineales sobre V, es decir, a todas las aplicaciones lineales de V en K

$$V^* = \{f : V \to K \mid f \text{ es lineal}\}. \tag{4.5}$$

El espacio dual V^* es un espacio vectorial sobre K bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares. Si V es de dimensión finita n entonces V^* también tiene dimensión n y cualquier base $\{v_1, ..., v_n\}$ induce una base dual $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ en V^* donde cada ϕ_i es un funcional lineal que verifica

$$\phi_i(v_j) = \delta_{ij}, \tag{4.6}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker definida como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

4.3.3. Espacio cotangente

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $p \in M$. El espacio cotangente en p, denotado como T_p^*M es el espacio dual del espacio tangente T_pM.

$$T_p^*M = \{\omega : T_pM \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ es lineal}\}. \tag{4.7}$$

T_p^*M es el espacio dual del espacio tangente T_pM , formado por los funcionales lineales ω, que son aplicaciones lineales de T_pM en $\mathbb{R}$. Es decir, para cada vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$, el funcional ω asigna un número real $\omega(\mathbf{v})$.

4.4. Tensores

Un **tensor** es un objeto matemático que describe una relación multilineal entre conjuntos de objetos relacionados con un espacio vectorial.

Para definir un tensor, consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita. V puede representar, por ejemplo, un espacio tangente a una variedad u otro espacio vectorial particular. Un tensor de tipo (p, q), denotado como $T^{(p,q)}$, es una aplicación multilineal:

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ veces}} \to \mathbb{R},$$

donde:

- V^* es el espacio dual de V, es decir, el espacio de covectores.
- La aplicación es lineal en cada uno de sus argumentos.

Un tensor de tipo (p, q) toma p covectores y q vectores, y devuelve un número real R.

Los tensores tienen una propiedad clave: **invariancia bajo cambios de base**, lo que significa que sus componentes transforman de manera predecible cuando se cambia la base de V. Propiedad extremadamente útil en muchas aplicaciones físicas.

Vector (Tensor de tipo $(1, 0)$)

Un vector es un tensor de tipo $(1, 0)$. En un espacio vectorial V, un vector $\mathbf{v^i}$ puede representarse en una base como:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i,$$

donde $\{\mathbf{e}_i\}$ son los vectores base y $\{v^i\}$ son las componentes del vector.

Covector (Tensor de tipo $(0, 1)$)

Un covector es un tensor de tipo $(0, 1)$, elemento del espacio dual V^*. Asigna un número real a cada vector mediante una aplicación lineal. En una base, se escribe como:

$$\omega = \omega_i \mathbf{e}^i,$$

donde $\{\mathbf{e}^i\}$ son los covectores base y $\{\omega_i\}$ son los componentes covariantes.

4.5. Tensor métrico

El tensor métrico es un tensor de rango (0,2) que generaliza el concepto de producto escalar en espacios curvos y define nociones como distancias y ángulos sobre una variedad diferenciable. El tensor métrico en coordenadas locales se define como

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \rangle, \tag{4.8}$$

$\frac{\partial x}{\partial u_i}$ representa la derivada parcial de la carta x respecto a las coordenadas locales u_i y u_j.

En el caso de una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^2$, definida a través de un mapa de coordenadas $x(u_1, u_2)$, el tensor métrico se puede representar como una matriz $G \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, que tiene la siguiente forma:

$$G \equiv g_{ij}, \tag{4.9}$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

donde los elementos g_{ij} son las componentes del tensor métrico. Este tensor es simétrico ($g_{ij} = g_{ji}$).

En esta matriz, los elementos de la diagonal corresponden a las componentes de la métrica en las direcciones locales, mientras que los elementos fuera de la diagonal representan las covariancias entre las direcciones locales.

Otra forma que tenemos de definir la métrica a partir del tensor métrico g_{ij}

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{4.11}$$

donde ds^2 es el elemento de linea que resulta un invariante. Además, dx^i y dx^j denotan los diferenciales de coordenadas.

La métrica s es un isomorfismo entre el espacio tangente y su espacio dual asociado.

$$s : T_pM \to T_p^*M. \tag{4.12}$$

Dado un vector tangente $v \in T_pM$ la métrica nos permite asociarle un covector $\alpha \in T_p^*M$ mediante

$$\alpha(w) = g(v, w), \forall w \in T_pM.$$

En particular, en coordenadas cartesianas ortogonales en un espacio euclideo, el tensor métrico $g_{ij} \equiv \delta_{ij}$ por lo que el elemento de linea resulta

$$ds^2 = \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j = dx^i dx^j. \tag{4.13}$$

A continuación, presentamos la regla de transformación de tensores covariantes de rango 2. Esta transforma el tensor métrico g_{mn} desde un sistema de coordenadas x^m a un nuevo sistema $x^{i'}$

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} g_{mn}. \tag{4.14}$$

De forma general un tensor transforma de la siguiente manera. Sea $T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ un tensor de tipo (p, q), bajo un cambio de coordenadas $x^\mu \to x'^\alpha$ se transforma como:

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{\mu_p}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\beta_q}} T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}.^4$$

4.5.1. Covector asociado

Si g_{ij} es el tensor métrico en coordenadas $\{u^i\}$ podemos escribir la relación entre vectores y covectores como

$$\alpha_i = g_{ij} v^j \tag{4.15}$$

Además, el tensor métrico nos permite *subir* y *bajar* índices permitiendonos convertir vectores en covectores y viceversa (concepto que será de utilidad en relatividad).

$$v^i = g^{ij} \alpha_j,$$

donde g^{ij} es la matriz inversa de g_{ij}

4.6. Deducción de la métrica en coordenadas esféricas

Hagamos el ejercicio de calcular el tensor métrico g_{ij} en coordenadas esféricas. Sabemos que la regla de transformación para pasar de coordenadas esféricas a cartesianas viene dada por

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases} \tag{4.16}$$

Luego, definimos una carta $u(\rho, \theta, \phi)$

$$u(\rho, \theta, \phi) \to (x(\rho, \theta, \phi), y(\rho, \theta, \phi), z(\rho, \theta, \phi)), \tag{4.17}$$

y calculamos sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = (\rho \cos\theta \cos\phi, \rho \cos\theta \cos\phi, -\rho \sin\theta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = (-\rho \sin\theta \sin\phi, \rho \sin\theta \cos\phi, 0),$$

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial x^j} \rangle,$$

$$g_{\rho\rho} = < \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \rho} > = 1,$$

[4] Se adjunta un ejemplo de transformación de tensores en el anexo.

$$g_{\theta\theta} =< \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} >= \rho^2,$$
$$g_{\phi\phi} =< \frac{\partial u}{\partial \phi}, \frac{\partial u}{\partial \phi} >= \rho^2 \sin^2 \theta.$$

Luego, todos los productos escalares de las parciales cruzadas resulta nulo, por lo que

$$g_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

4.7. Conexión

Si queremos estudiar la variación de un vector sobre una variedad, no sólo debemos tener en cuenta la variación de sus componentes, sino también la del propio sistema de coordenadas. Consideremos, por ejemplo, una base $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \subset \mathbb{R}^2$ que rota con el tiempo. Un vector en esta base se expresa como:

$$\vec{v} = x(t)\vec{e_1} + y(t)\vec{e_2}.$$

Al derivar con respecto al tiempo t, obtenemos:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = x'(t)\vec{e_1} + y'(t)\vec{e_2} + x(t)\frac{d\vec{e_1}}{dt} + y(t)\frac{d\vec{e_2}}{dt}.$$

Como la base B varía con el tiempo podremos expresarla como combinación lineal de los propios vectores base, es decir, existen coeficientes Γ_j^k tales que:

$$\frac{d\vec{e_j}}{dt} = \sum_k \Gamma_j^k \vec{e_k} \quad \text{para } j, k \in \{1, 2\}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = x'(t)\vec{e_1} + y'(t)\vec{e_2} + x(t)\sum_k \Gamma_1^k \vec{e_k} + y(t)\sum_k \Gamma_2^k \vec{e_k}.$$

Usando la notación de suma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = x'^j \vec{e_j} + x^i \Gamma_i^k \vec{e_k}.$$

Escribiendo en notación matricial:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Gamma_1^1 + y\Gamma_2^1 \\ x\Gamma_1^2 + y\Gamma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Esta ecuación muestra cómo la derivada del vector depende no solo del cambio de sus componentes (x', y'), sino también de la variación de la base a través de los coeficientes de conexión Γ_j^k.

Bajo esta definición, la derivada termina transformandose como un tensor. Un claro ejemplo de esto es el término que aparece en la componente de la aceleración en sistemas en rotación de la mecánica Newtoniana; *la aceleración de Coriolis.*

Si deseamos derivar campos de vectores en una variedad, debemos especificar en la dirección en la cual vamos a movernos. Si el campo es $V = V^k \partial_k$ y elegimos la dirección ∂_i la derivada se expresaría como

$$\nabla_i V^k = \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} V^j. \tag{4.19}$$

4.8. Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel surgieron en el siglo XIX en el contexto del desarrollo de la geometría diferencial y el estudio de espacios curvos. Su nombre proviene del matemático alemán **Elwin Bruno Christoffel** (1829–1900), quien los introdujo formalmente en 1869 en su trabajo sobre la transformación de tensores y coordenadas en variedades diferenciables.

Christoffel estaba interesado en generalizar la noción de derivada a espacios curvos, donde las reglas del cálculo diferencial clásico en coordenadas cartesianas ya no eran suficientes. En ese contexto, desarrolló una herramienta que hoy llamamos símbolos de Christoffel para describir **cómo los vectores cambian al trasladarse a lo largo de una variedad**.

Aunque su definición inicial no hacía explícita la conexión con la curvatura del espacio, estos símbolos se convirtieron en una pieza clave en el desarrollo posterior de la **teoría de la relatividad general de Albert Einstein (1915)**, donde describen cómo la geometría del espacio-tiempo afecta el movimiento de partículas y la propagación de la luz.

Desde entonces, los símbolos de Christoffel se han convertido en una herramienta fundamental en la formulación del cálculo tensorial, la teoría de variedades riemannianas, y en general en cualquier teoría geométrica del espacio.

4.8.1. Interpretación geométrica

Sea una variedad diferenciable con métrica $(\mathcal{M}, g)$ los vectores base del sistema de coordenadas no permanecen necesariamente constantes cuando se trasladan a lo largo de la variedad; pueden cambiar su dirección debido a la curvatura del espacio. Los símbolos de Christoffel cuantifican esta variación direccional de los vectores base ∂_i a medida que se desplazan a lo largo de las coordenadas.

Aunque los símbolos de Christoffel no constituyen un tensor, encapsulan la información necesaria para describir cómo se realiza el *transporte paralelo* de vectores sobre la variedad.
Son fundamentales para definir:

- La derivada covariante ∇ de campos tensores,
- Las ecuaciones de las geodésicas.
- Y el tensor de curvatura de Riemann, que describe la curvatura intrínseca de la variedad.

4.8.2. Definición y propiedades

Definición 4.3. *Una variedad pseudoriemanniana es una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ equipada con un tensor métrico g (0,2)-diferenciable simétrico que es no degenerado en cada*

punto de la variedad. [5]

Sea $(\mathcal{M}, g)$ una variedad pseudoriemanniana, la **conexión de Levi-Civita** ∇ es la única conexión que es:

- Simétrica (libre de torsión): $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. [6]
- Compatible con la métrica: $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

En un sistema de coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$, la conexión de Christoffel o de Levi-Civita se expresa en términos de los **símbolos de Christoffel** de segunda especie, definidos como:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

donde g_{ij} son las componentes de la métrica g, y g^{kl} representa las componentes de la inversa de la matriz métrica, es decir, $g^{kl} g_{lj} = \delta^k_j$. Una forma más compacta de escribir esto es

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l} \right),$$

como ya vimos, los símbolos de Christoffel permiten expresar la derivada covariante de un campo vectorial V^k en la dirección de la coordenada x^i como

$$\nabla_i V^k = \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} V^j.$$

De acuerdo a la notación que establecimos en el capítulo 1, los simbolos de Christoffel los expresamos de la siguiente forma

$$\boxed{\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda} \right).}$$

4.9. Derivada covariante

Sea M una variedad diferenciable suave de dimensión n, y sea $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales suaves sobre M.

La **derivada covariante** es una aplicación bilineal:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

que satisface las siguientes propiedades para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, y $f, g \in C^\infty(M)$:

- **Linealidad en la primera entrada (sobre funciones suaves):**

$$\nabla_{fX+gZ} Y = f \nabla_X Y + g \nabla_Z Y.$$

[5] Esta definición generaliza la de variedad riemanniana, pues permite que el tensor métrico tenga una firma indefinida en lugar de ser definido positivo.

[6] Donde $[X, Y]$ es la operación de conmutación. De esto se hablará luego.

- **Linealidad en la segunda entrada (sobre escalares):**

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- **Regla de Leibniz en la segunda entrada:**

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y.$$

Expresión en coordenadas locales

Sea $\{x^i\}$ un sistema de coordenadas locales en una carta de M, y sea $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ la base inducida del fibrado tangente.

Dado un campo vectorial local:

$$Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

la derivada covariante de Y en la dirección de la coordenada x^i se denota por $\nabla_i Y^j$ y se define como:

$$\nabla_i Y^j := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ik} Y^k.$$

Los **símbolos de Christoffel** representan cómo varía la base del fibrado tangente a lo largo de la dirección x^i. La derivada covariante generaliza la derivada direccional al contexto de variedades diferenciables, corrigiendo las derivadas parciales con los símbolos de Christoffel para preservar la transformación tensorial bajo cambios de coordenadas.

4.9.1. Compatibilidad métrica

La condición de compatibilidad métrica establece que la derivada covariante del tensor métrico es nula:

$$\nabla_k g_{ij} = 0.$$

Demostremos esta relación usando la definición de derivada covariante para tensores de tipo $(0, 2)$. Utilizando la siguiente notación:

$$\nabla_k g_{ij} := \partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il},$$

donde Γ^l_{ki} son los símbolos de Christoffel de segunda especie. Esta expresión se obtiene al aplicar la derivada covariante a un tensor covariante de segundo orden.

La condición de compatibilidad métrica impone:

$$\partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il} = 0.$$

Esto debe cumplirse para toda combinación de índices. Si consideramos las tres permutaciones cíclicas posibles de los índices (i, j, k):

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il} \quad (1)$$
$$\partial_i g_{jk} = \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{ik} g_{jl} \quad (2)$$
$$\partial_j g_{ki} = \Gamma^l_{jk} g_{li} + \Gamma^l_{ji} g_{kl} \quad (3)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2), y restando la (3), obtenemos:

$$\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} = 2\Gamma^l_{ki} g_{lj}.$$

Multiplicando ambos lados por g^{mj} y usando la simetría del tensor métrico, obtenemos la expresión explícita para los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^m_{ki} = \frac{1}{2} g^{mj} \left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} \right).$$

Esta es la única conexión que cumple simultáneamente:

- La compatibilidad con la métrica: $\nabla_k g_{ij} = 0$.
- La simetría en los índices inferiores: $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$ (sin torsión).

Esta propiedad es fundamental y nos revela que la métrica es un campo tensorial paralelo; no cambia su orientación ni magnitud al ser trasladada a través de la variedad.

4.9.2. Transporte paralelo

Tal como mencionamos al comienzo de esta sección, la derivada parcial de un campo vectorial calcula la diferencia entre vectores que pertenecen a puntos distintos de la variedad. Sin embargo, la suma o diferencia de vectores sólo está bien definida cuando ambos pertenecen al mismo espacio tangente, es decir, al mismo punto. En una variedad curva, los espacios tangentes en puntos distintos son distintos, por lo que no podemos comparar directamente vectores en diferentes posiciones.

Para poder hacerlo, es necesario transportar uno de los vectores al punto del otro, de manera consistente con la geometría de la variedad. Esta operación es lo que se conoce como **transporte paralelo**, y es formalizada a través de la **derivada covariante**.

En coordenadas cartesianas sobre el espacio euclídeo, los vectores se pueden comparar directamente porque los espacios tangentes son todos iguales y paralelos entre sí. Sin embargo, cuando trabajamos en una variedad general o utilizamos sistemas de coordenadas curvilíneas, el transporte paralelo se vuelve necesario para definir una noción coherente de derivada direccional.

Continuando con (4.1), en la figura vemos que tenemos dos vectores en distintos puntos de nuestro plano.

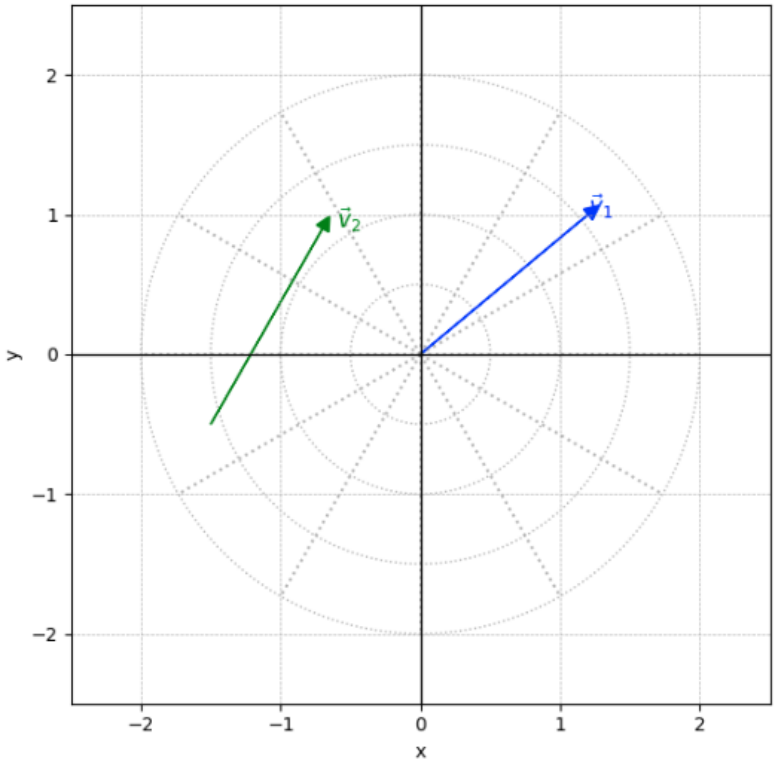


Figura 4: Dos vectores distintos $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ en un sistema polar con la cuadrícula cartesiana de fondo para fines orientativos.

El vector $\vec{v_2}$ está en el punto $A = x_a = \{x^\mu\}$ y sus componentes son (V^x, V^y) en coordenadas cartesianas y (V^r, V^θ) en coordenadas polares. Si nos quedamos con la idea de transportar rígidamente este vector como si aún estuviesemos en un espacio euclideo, el vector v_2 va desde el punto A al punto $B = x_b = \{x^\mu + dx^\mu\}$.

Como ya mencionamos, el transporte paralelo en coordenadas cartesianas ortogonales, se da de manera natural (ya que en este espacio los simbolos de Christoffel son nulos)

$$(V^x, V^y) \to (V^x, V^y),$$

pero, en coordenadas polares, las componentes cambian y, el operador que cuantifica el cambio en los vectores base, es la derivada dirección a través de los simbolos de Christoffel.

$$V^\mu_{A\to B} = V^\mu_A - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x_a) V^\nu_A dx^\rho.^7 \tag{4.20}$$

Conclusiones físicas y geométricas

- La longitud de un vector se conserva bajo transporte paralelo.
- El ángulo entre vectores también se mantiene constante durante el transporte.
- Esta propiedad es esencial para que las geodésicas extremicen la distancia o el tiempo propio.

4.9.3. Símbolos de Christoffel sobre una superficie esférica

Consideramos una esfera de radio constante R, cuya superficie se encuentra embebida en el espacio $\mathbb{R}^3$. Podemos parametrizar dicha superficie mediante las coordenadas angulares θ (colatitud) y ϕ (longitud):

$$u(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Cálculo de los vectores tangentes.

$$u_\theta = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad u_\phi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cálculo del tensor métrico El tensor métrico inducido sobre la superficie se obtiene como el producto escalar de los vectores tangentes:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^j} \right\rangle,$$

$$g_{\theta\theta} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right\rangle = R^2,$$

$$g_{\phi\phi} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right\rangle = R^2\sin^2\theta,$$

$$g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right\rangle = 0.$$

Entonces, la métrica inducida en coordenadas (θ, ϕ) es:

$$g_{ij} \equiv \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Cálculo de los símbolos de Christoffel.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l} \right),$$

como el tensor métrico es diagonal, el cálculo se simplifica. Los únicos símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta.$$

4.9.4. Símbolos de Christoffel en coordenadas esféricas

Ahora consideramos el espacio tridimensional expresado en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), donde:

$$u(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Utilizando el resultado (4.18), calcularemos los símbolos de Christoffel.

Símbolos de Christoffel no nulos.

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta$$
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta.$$

4.10. Geodésicas

En el contexto de la geometría diferencial, una **variedad Riemanniana** (M, g) es una variedad diferenciable M dotada de un **tensor métrico** g, el cual es un campo tensorial simétrico definido positivo que asigna a cada punto $p \in M$ un producto interno g_p sobre el espacio tangente T_pM. Esta estructura permite definir nociones de longitud, ángulo, área, volumen y, en particular, **distancia** entre puntos sobre la variedad.

Una **geodésica** en este contexto, es una curva suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ que satisface la **ecuación geodésica**:

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0,$$

donde $\frac{D}{dt}$ representa la derivada covariante a lo largo de γ y $\dot{\gamma}(t)$ es el vector tangente a la curva en cada instante t. Esta ecuación implica que la aceleración covariante de la curva es nula, es decir, que γ se mueve de manera "inercial" dentro de la geometría inducida por g, sin experimentar fuerzas externas.

Físicamente, en el contexto de la relatividad general, las geodésicas representan el movimiento de partículas libres bajo la influencia únicamente de la geometría del espacio-tiempo (es decir, en ausencia de fuerzas no gravitatorias). Matemáticamente, las geodésicas generalizan el concepto de "línea recta" al espacio curvo, y su importancia radica en que **localmente** estacionarizan la distancia entre dos puntos.

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt.$$

Así, las geodésicas pueden ser caracterizadas como las curvas de longitud mínima entre dos puntos suficientemente cercanos, lo que las convierte en una generalización natural del concepto de trayectoria rectilínea en espacios euclídeos.

4.10.1. Geodésicas a partir del principio de mínima acción

Como ya vimos en la sección 3, el lagrangiano de una partícula puntual libre es la energía cinética de la partícula. Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener minimizando la acción

$$S = \frac{1}{2}m\int_\Gamma (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)dt.$$

Donde Γ representa la trayectoria de la partícula. Si consideramos un sistema de coordenadas diferente al cartesiano

$$S = \frac{1}{2}m\int_\Gamma g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j dt. \tag{4.21}$$

De esta manera, podemos expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)}{\partial x^k} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\delta^i_k\dot{x}^j + g_{ij}\delta^j_k\dot{x}^i) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(2g_{ik}\dot{x}^i) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0,$$

$$2g_{ik}\ddot{x}^i + 2\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0,$$

$$2g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

Multiplicamos miembro a miembro por g^{lk} y dividimos por 2

$$g_{ik}g^{lk}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j) = 0,$$

$$g^l_i\ddot{x}^i + \frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j) = 0.$$

Finalmente, obtenemos la ecuación de la geodésica

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0. \tag{4.22}$$

Recordando que Γ^i_{jk} representan los simbolos de Christoffel y estos no son componentes de un tensor por lo que no transforman como tal.

4.10.2. Geodésicas para una 2-variedad

Siguiendo con el ejemplo de nuestra esfera, en este caso de radio unitario

$$g_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Cuyos simbolos de Christoffel fueron calculados previamente

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot(\theta). \tag{4.24}$$

En nuestro caso, tenemos dos ecuaciones diferenciales ya que contamos con dos coordenadas ϕ, θ

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0.$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales debemos elegir un punto $P_0 = (\theta_0, \phi_0)$ y una dirección. En este caso, elegimos la dirección del vector tangente a la curva en P0. Vemos que las geodésicas en este caso están dadas por circulos máximos (meridianos).

En particular y para simplificar, vamos a suponer que P_0 es el polo norte de la esfera $P_0 = (\theta_0 = 0, \phi)$.

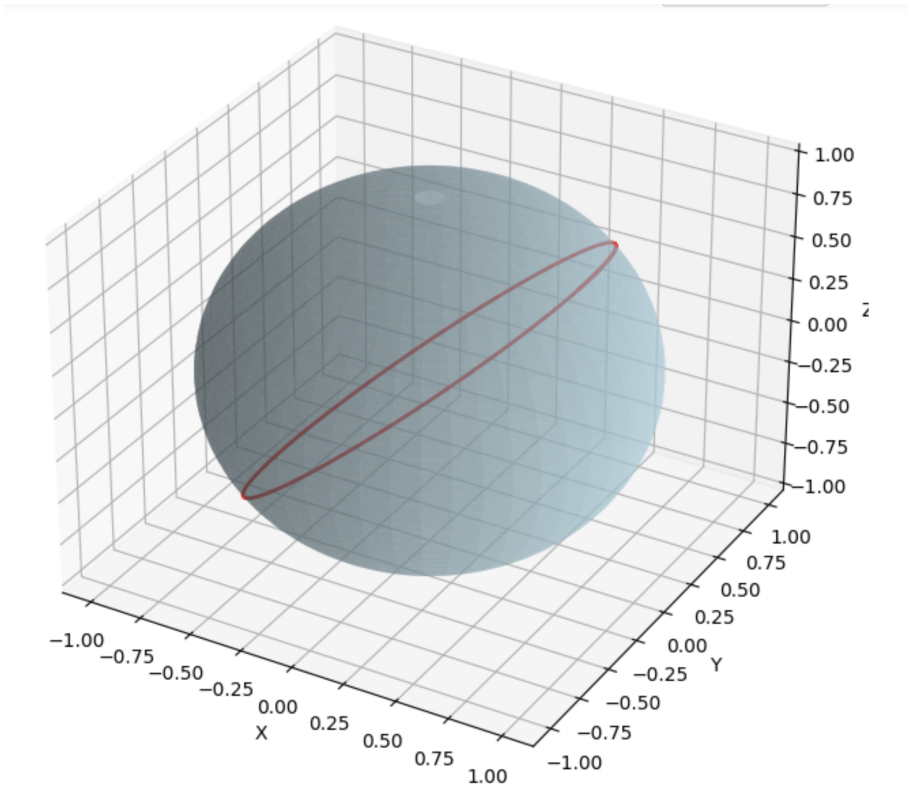


Figura 5: Curva geodésica resuelta numéricamente por el método de Runge Kuta en Python

4.11. Tensor de riemann

Ni la derivada covariante ni los símbolos de Christoffel, por sí solos, nos permiten entender completamente cómo se mide la curvatura de una variedad. El *tensor de curvatura de Riemann* generaliza el concepto de curvatura de Gauss, definido originalmente para superficies bidimensionales, a variedades de dimensiones arbitrarias.

Este tensor proporciona una medida de cómo difiere la métrica de la variedad respecto de la métrica euclídea, y se define como un tensor de rango $(1, 3)$, comúnmente representado como $R^i{}_{jkl}$.

En variedades de dimensión mayor que dos, la curvatura no se puede describir completamente mediante un único número como en el caso de la curvatura de Gauss. Sin embargo, mediante *contracciones* del tensor de Riemann se pueden obtener otras nociones importantes de curvatura:

- El *tensor de Ricci*, que es una contracción del tensor de Riemann, captura información más resumida de la curvatura.

- A su vez, la *curvatura escalar* (o escalar de curvatura) se obtiene contrayendo el tensor de Ricci.

De este modo, cualquiera que sea la curvatura de una variedad, esta estará codificada en el *tensor de Riemann*, que actúa como objeto fundamental en geometría diferencial y en teorías físicas como la relatividad general.

Noción intuitiva

En un espacio con curvatura, transportar un vector a lo largo de dos direcciones x^μ y x^ν, y luego hacerlo en el orden inverso (x^ν y luego x^μ), produce resultados distintos. Como sabemos, la entidad matemática que codifica los cambios en un espacio es la derivada covariante. Por lo tanto, aplicar la derivada covariante a un vector respecto a la dirección μ, y luego derivar el resultado en la dirección ν, no será lo mismo que hacerlo en el orden inverso:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda \neq \nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda,$$

esta diferencia contiene toda la información sobre la curvatura del espacio. De hecho, el tensor de Riemann se define precisamente como la cantidad que mide esta conmutación:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} V^\rho.$$

4.12. Conmutador en derivadas covariantes

En geometría diferencial, el **conmutador** de dos operadores mide qué tan lejos están de conmutar, es decir, de dar el mismo resultado al aplicarse en diferente orden.

En el caso de la derivada covariante, definimos el conmutador como:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda := \nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda.$$

A diferencia de las derivadas parciales, que conmutan ($\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$), las derivadas covariantes no conmutan en general si el espacio tiene curvatura.

Esta no conmutatividad se expresa en términos del *tensor de Riemann*:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} V^\rho.$$

Este resultado nos dice que la **curvatura del espacio** se manifiesta como la diferencia entre aplicar las derivadas covariantes en un orden u otro.

De forma general

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda := \nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda. \tag{4.25}$$

4.13. Expresión del tensor de Riemann en coordenadas

Partimos de la definición del conmutador de derivadas covariantes aplicado a un campo vectorial V^λ:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} V^\rho.$$

Recordando que la derivada covariante de un vector es:

$$\nabla_\mu V^\lambda = \partial_\mu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} V^\sigma,$$

calculamos cada término del conmutador:

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu V^\lambda) = \partial_\mu(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} V^\rho) + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}(\partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} V^\rho).$$

Desarrollando:

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu V^\lambda) = \partial_\mu\partial_\nu V^\lambda + (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho}) V^\rho + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\partial_\mu V^\rho + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} V^\rho.$$

De forma análoga, obtenemos:

$$\nabla_\nu(\nabla_\mu V^\lambda) = \partial_\nu\partial_\mu V^\lambda + (\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho}) V^\rho + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial_\mu V^\sigma + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} V^\rho.$$

Restando ambos resultados, y observando que las derivadas parciales conmutan ($\partial_\mu\partial_\nu V^\lambda = \partial_\nu\partial_\mu V^\lambda$), tenemos:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\right) V^\rho.$$

Comparando con la definición inicial, obtenemos la expresión del tensor de Riemann en coordenadas:

$$\boxed{R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}.}$$

La curvatura de una variedad se puede obtener a partir del tensor de Riemann, el cual está relacionado directamente con los símbolos de Christoffel. A su vez, los símbolos de Christoffel se calculan a partir de la métrica de la variedad. Esto implica que toda la información sobre la curvatura y la geometría del espacio está codificada en la métrica. Es decir, conocer la métrica de un espacio nos permite deducir tanto los símbolos de Christoffel como el tensor de Riemann, que describen la curvatura y las propiedades geométricas del espacio.

4.14. Tensor de Ricci y escalar de Ricci

Tensor de Ricci

El tensor de Ricci se obtiene a partir del tensor de Riemann mediante una contracción sobre los índices λ y ρ. En otras palabras, la contracción de $R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ se realiza sumando sobre λ:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{4.26}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}. \tag{4.27}$$

Esto da lugar a un tensor simétrico de segundo orden que captura las características de la curvatura de la variedad en términos de ciertas direcciones específicas.

Escalar de Ricci

El escalar de Ricci se obtiene tomando la traza del tensor de Ricci. Esto se logra contrayendo los índices μ y ν en $R_{\mu\nu}$ con la métrica $g^{\mu\nu}$:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

El resultado es un número escalar que representa la curvatura total de la variedad, proporcionando una medida global de la curvatura.

4.15. Identidades de Bianchi

Las identidades de de Bianchi son dos identidades fundamentales que involucran al tensor de Riemann y de las cuales se deduce el tensor de Einstein (como se verá a continuación). *La primera identidad de Bianchi es*

$$\boxed{R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + R^{\mu}_{\rho\sigma\nu} + R^{\mu}_{\sigma\nu\rho} = 0.} \tag{4.28}$$

Luego

$$\begin{aligned} &\left(\partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\right) \\ &+ \left(\partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\right) \\ &+ \left(\partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

La segunda identidad de Bianchi es

$$\boxed{\nabla_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu\rho} + \nabla_\nu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\rho\mu} + \nabla_\rho \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = 0.} \tag{4.30}$$

El primer término de la ecuación (4.30) lo podemos escribir como

$$\nabla_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu\rho} = \nabla_\mu(\partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}\Gamma^{\kappa}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}). \tag{4.31}$$

Ahora, si elegimos un sistema de coordenadas en el que los símbolos de Christoffel se anulen en cierto punto, la ecuación (4.31) queda

$$\nabla_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu\rho} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\kappa}_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}.$$

De esta forma, vemos que la *segunda identidad de Bianchi* se verifica.

4.16. Divergencia

Sea $\vec{v}$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^n$ con coordenadas

$$\vec{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^n).$$

La *divergencia* de $\vec{v}$ es una función escalar que mide la tasa neta de flujo saliente del campo por unidad de volumen alrededor de un punto. Se define como

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^i}{\partial x^i}.$$

Usando la notación de suma de Einstein, esta expresión se escribe de forma compacta como

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i}.$$

La divergencia en un punto mide la *tasa neta de flujo saliente* de un campo vectorial a través de una región infinitesimal alrededor de ese punto.

- **Divergencia positiva** ($\operatorname{div} \vec{v} > 0$)**:** Más flujo *sale* de la región que el que entra. El punto se comporta como una *fuente*. El campo se *expande* localmente.
- **Divergencia negativa** ($\operatorname{div} \vec{v} < 0$)**:** Más flujo *entra* a la región que el que sale. El punto actúa como un *sumidero*. El campo se *contrae* localmente.
- **Divergencia cero** ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$)**:** El flujo que entra es igual al flujo que sale. No hay creación ni destrucción neta de flujo. El campo es *localmente incompresible*.

De forma intuitiva, la divergencia describe cómo el campo *se esparce, se concentra o se conserva* alrededor de un punto. Por ejemplo, tomemos el campo vectorial

$$\vec{f} : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \vec{f}(x, y) = (x, y),$$

que gráficamente lo representamos como

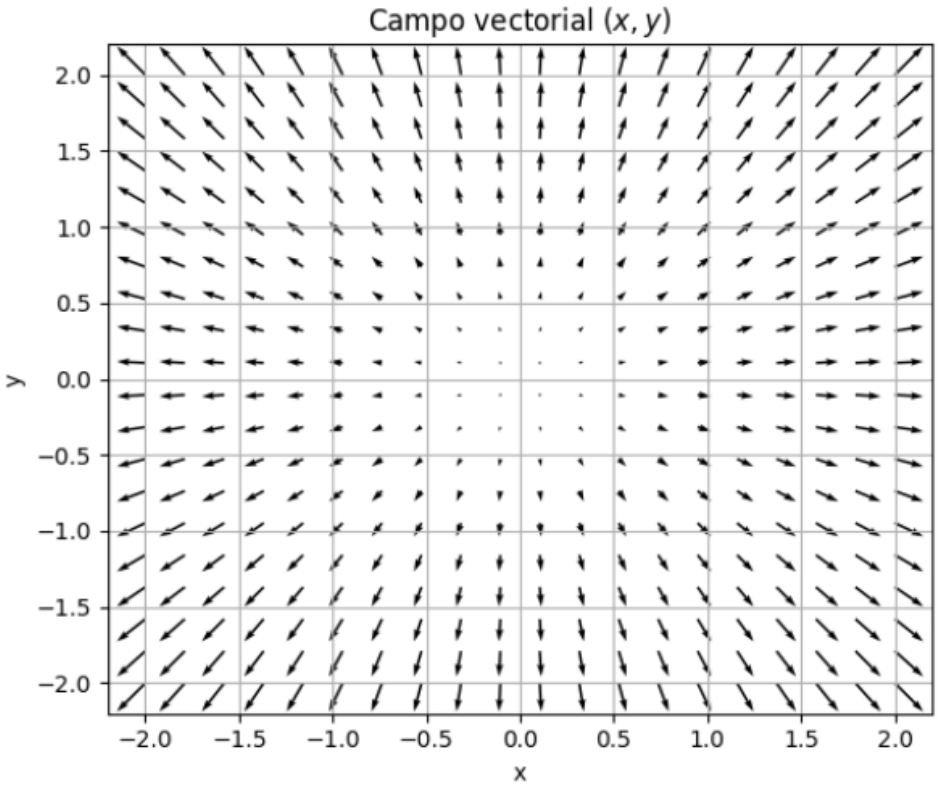


Figura 6: Representación del campo vectorial $V(x, y) = (x, y)$

.

Su divergencia $div\vec{f} = \partial_x x + \partial_y y = 2$; la divergencia es constante y positiva en todos los puntos del plano.

4.16.1. Divergencia de un campo tensorial

En una variedad riemanniana con métrica g, la divergencia de un campo vectorial $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ se define como:

$$divX = \nabla_i X^i, \tag{4.32}$$

expandiendo (4.32)

$$\nabla_i X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} x^k.$$

También se puede expresar la divergencia de un campo tensorial usando la métrica

$$\boxed{divX = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|X^i}).} \tag{4.33}$$

4.17. Tensor de Einstein

El tensor de Einstein es una combinación lineal del tensor de Ricci y del escalar de Ricci, junto con el tensor métrico. Se define en una variedad pseudo-riemanniana (M, g) y se utiliza para describir propiedades de la curvatura intrínseca de dicha variedad. Este tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ se expresa como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{4.34}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci obtenido por contracción de $R_{\mu\nu}$ con el tensor métrico $g^{\mu\nu}$, y $g_{\mu\nu}$ es la métrica de la variedad.

Derivaremos este resultado a partir de la segunda identidad de Bianchi (4.30)
Multiplicamos la segunda identidad de Bianchi por el tensor métrico $g^\nu{}_\kappa$:

$$g^\nu{}_\kappa \left(\nabla_\mu R^\kappa{}_{\lambda\nu\rho} + \nabla_\nu R^\kappa{}_{\lambda\rho\mu} + \nabla_\rho R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} \right) = 0. \tag{4.35}$$

Usando que $\nabla_\mu g^\nu{}_\kappa = 0$, podemos llevar g dentro de la derivada:

$$\nabla_\mu \underbrace{(g^\nu{}_\kappa R^\kappa{}_{\lambda\nu\rho})}_{R_{\lambda\rho}} + g^\nu{}_\kappa (\nabla_\nu R^\kappa{}_{\lambda\rho\mu}) - \nabla_\rho \underbrace{(g^\nu{}_\kappa R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu})}_{R_{\lambda\mu}} = 0, \tag{4.36}$$

El signo negativo aparece porque estamos realizando una **permutación impar de índices en una suma antisimétrica** (la identidad de Bianchi es completamente antisymétrica en los índices μ, ν, ρ). En general, si un tensor $T_{[\mu\nu\rho]}$ es completamente antisymétrico, cualquier permutación impar de índices cambia el signo:

$$T_{[\mu\nu\rho]} = -T_{[\rho\nu\mu]}.$$

Por lo que

$$\nabla_\mu R_{\lambda\rho} + \nabla_\kappa R^\kappa_{\lambda\rho\mu} - \nabla_\rho R_{\lambda\mu} = 0,$$

multiplicamos miembro a miembro por $g^{\lambda\rho}$

$$g^{\lambda\rho} (\nabla_\mu R_{\lambda\rho} + \nabla_\kappa R^\kappa_{\lambda\rho\mu} - \nabla_\rho R_{\lambda\mu}) = 0,$$

$$\nabla_\mu R - \nabla_\kappa R^\kappa_\mu - \nabla_\rho R^\rho \mu = 0,$$

donde $R = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}$ es la curvatura escalar.

$$\nabla_\kappa R - \nabla_\kappa R^\kappa_\mu - \nabla_\kappa R^\kappa \mu = 0.$$

A partir de aquí, se define el tensor de Einstein:

$$\boxed{G^\kappa_\mu = R^\kappa_\mu - \frac{1}{2} g^\kappa_\mu R,} \tag{4.37}$$

y se obtiene la conservación covariante:

$$\boxed{\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0.} \tag{4.38}$$

Esto muestra que la divergencia covariante del tensor de Einstein se anula automáticamente gracias a la segunda identidad de Bianchi. Esto será de vital importancia cuando veamos las ecuaciones de campo de Einstein ya que nos relacionará la curvatura con la materia y energía y esta propiedad decantará en la conservación de la energía.

Finalmente, este tensor posee dos propiedades importantes:

- Es simétrico: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$.
- Tiene divergencia nula con respecto a la conexión de Levi-Civita asociada a g.

5. Relatividad especial

5.1. Introducción

Durante siglos, la mecánica Newtoniana fue el marco dominante para describir el movimiento de los cuerpos. En esta, el espacio y el tiempo son considerados entidades independientes, y el tiempo es absoluto para todos los observadores. Además, la gravedad actúa como una fuerza instantánea a distancia. Sin embargo, este paradigma deja de ser válido cuando imponemos que las interacciones no pueden propagarse de forma inmediata. La teoría de la relatividad especial surge al unificar el espacio y el tiempo en una única entidad, el espacio-tiempo, y al establecer un límite fundamental para la velocidad de propagación de cualquier interacción: la velocidad de la luz en el vacío.

A finales del siglo XIX, el electromagnetismo desarrollado por James Clerk Maxwell describió las ecuaciones de la luz como una onda electromagnética que debía propagarse en un medio llamado éter luminífero. Pero como conociamos de la mecánica de Newton, no había un sistema absoluto, siempre lo referíamos a un sistema de referencia. En este caso, se lo asoció al éter. Sin embargo, esto generó un conflicto con la mecánica clásica, ya que implicaba que la velocidad de la luz podría depender del movimiento del observador respecto al éter.

En el año 1905, Albert Einstein publica su revolucionaria **teoría especial de la relatividad**, marcando un antes y un después en la física moderna. Esta teoría tiene como antecedentes experimentales fundamentales los trabajos de Michelson y Morley [15], quienes, mediante un experimento interferométrico, demostraron que la **velocidad de la luz en el vacío** es constante e *independiente* del movimiento relativo entre la fuente emisora

y el observador. Este resultado contradecía la hipótesis clásica del éter luminífero, un medio hipotético que se creía necesario para la propagación de la luz.

El fracaso del experimento de Michelson y Morley en detectar un viento de éter impulsó la búsqueda de nuevas formulaciones teóricas. Aunque Hendrik Lorentz ya había propuesto transformaciones matemáticas que conservaban la velocidad de la luz (las *transformaciones de Lorentz*), su interpretación física no era clara. Fue Einstein quien, en 1905, desde Suiza, propuso una nueva forma de concebir el espacio y el tiempo, postulando que ambos son relativos al estado de movimiento del observador.

5.1.1. El problema con las transformaciones de Galileo

Definición 5.1. *Un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia en el que las leyes del movimiento cumplen las leyes de Newton y, por lo tanto, la variación del momento lineal del sistema es igual a las fuerzas reales sobre el sistema.*

En la física clásica, las **transformaciones de Galileo** se utilizan para cambiar de un sistema de referencia inercial a otro. Estas transformaciones suponen que el tiempo es absoluto ($t = t'$) y que las distancias se suman linealmente. Bajo esta formulación, la velocidad de cualquier objeto simplemente se suma o resta respecto a la velocidad del observador, lo que se conoce como la *ley de adición de velocidades galileana*.

Sin embargo, si se aplican estas transformaciones a la propagación de la luz, se obtienen resultados inconsistentes con los hallazgos experimentales. En particular, la velocidad de la luz dejaría de ser constante para todos los observadores, lo cual contradice lo observado por Michelson y Morley y lo predicho por las ecuaciones de Maxwell. Esto generó una crisis en la física, ya que no se podía reconciliar el electromagnetismo con la mecánica clásica.

Este conflicto evidenció que las transformaciones de Galileo no eran compatibles con la naturaleza del espacio y el tiempo tal como lo describe el electromagnetismo, lo que motivó la necesidad de desarrollar un nuevo marco teórico: la relatividad especial.

5.1.2. Los postulados de la teoría especial de la relatividad

Esta teoría se fundamenta en dos postulados claves:

- **Principio de relatividad:** Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. No existe un sistema de referencia privilegiado.
- **Invariancia de la velocidad de la luz (c):** La velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales, independientemente del movimiento de la fuente emisora o del observador.

Las implicancias de esta teoría son profundas y contrarias a la intuición clásica. Algunos de los resultados más destacados son

- **Relatividad del tiempo (dilatación temporal):** Un reloj en movimiento respecto a un observador se percibe como marchando más lentamente.
- **Contracción de las longitudes:** Un objeto en movimiento se percibe más corto en la dirección de su movimiento.

- **Equivalencia masa-energía:** Se establece la famosa relación que revela que la masa es una forma de energía.
- **Unificación del espacio y el tiempo:** La separación absoluta entre espacio y tiempo desaparece. Ambos se integran en una única entidad geométrica: el **espacio-tiempo**, que es el escenario sobre el que ocurren todos los eventos físicos.

La teoría especial de la relatividad no solo resolvió inconsistencias entre la mecánica clásica y el electromagnetismo, sino que también abrió el camino para el desarrollo posterior de la **teoría general de la relatividad** (1915), donde Einstein incluiría los efectos de la gravedad mediante una geometrización del espacio-tiempo.

5.2. Transformaciones de Galileo

Una transformación de Galileo es un cambio de coordenadas y velocidades que deja invariantes las ecuaciones de Newton. Recordemos que estas últimas son válidas en sistemas de referencia inerciales.

Galileo propuso que si se tiene un sistema A en reposo y un sistema B en movimiento respecto al primero a velocidad constante en la dirección del eje x y sentido positivo denotado como V_x y, si las coordenadas espaciales de A son (x, y, z) y para B son (x', y', z') se pueden establecer ecuaciones de transformación de coordenadas.

$$\begin{cases} x' = x - V_x t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

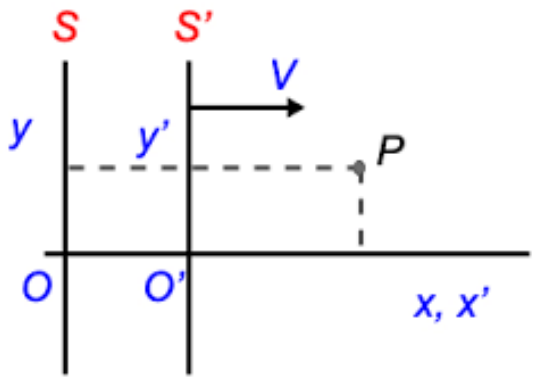


Figura 7: Movimiento del sistema O' respecto a O en en sentido positivo del eje x.

Y el tiempo resulta el mismo en cualquier sistema de referencia.

$$t' = t.$$

En el caso que expusimos supusimos que nuestro sistema B se movia respecto al A en la dirección positiva del eje x pero la realidad es que puede moverse en cualquier dirección. Incluso, también el sistema puede rotar respecto a cualquier eje. El conjunto de todas las transformaciones posibles constituyen el **grupo de Galileo**

El Grupo de Galileo

El **grupo de Galileo** $\mathcal{G}$ es el grupo de transformaciones que preservan las ecuaciones del movimiento en la mecánica Newtoniana. Este grupo está compuesto por:

1. Traslaciones en el espacio: $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{a}$.
2. Traslaciones en el tiempo: $t \to t + t_0$.
3. Rotaciones en el espacio: $\mathbf{x} \to R\mathbf{x}$, con $R \in SO(3)$.
4. Boosts de Galileo (cambios de referencia inercial): $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{v}t$.

Los elementos del grupo de Galileo pueden representarse por matrices de la forma:

$$G(\mathbf{v}, R, \mathbf{a}, t_0) = \begin{bmatrix} R & \mathbf{v} & \mathbf{a} \\ 0 & 1 & t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3. Espacio de Minkowski

Como ya dijimos, la relatividad introduce el concepto de espacio-tiempo. Cada punto de este nuevo espacio representa un acontecimiento que ocurre en un punto particular del espacio y en un cierto tiempo. Al igual que en el espacio Euclideo, en este nuevo espacio tendremos un invariante.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \tag{5.1}$$

Para modelizar nuestro espacio-tiempo, podemos considerarlo continuo e isótropo. Esto nos será de suma utilidad para describirlo mediante variedades; pero, a su vez, hay múltiples razones para considerar que el espacio-tiempo posee estas características:

1. Medidas de alta precesión por relojes atómicos y GPS no muestran evidencia de una estructura discreta del espacio-tiempo.
2. En cosmología, la radiación de fondo cósmico de microondas es casi perfectamente isotrópica (misma temperatura en todas las direcciones) lo que sugiere que el universo no tiene una dirección de preferencia.
3. A grandes escalas, la distribución de galaxias y materia también parece homogénea (principio cosmológico).

Teniendo en cuenta lo mencionado

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{5.2}$$

Luego, ds^2 es el elemento de linea o intervalo en nuestro espacio-tiempo que llamaremos intervalo espacio-tiempo de Minkowski. Como veremos, este resulta invariante bajo ciertas transformaciones. O, de forma análoga:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{5.3}$$

Donde $\eta_{\mu\nu}$ representa el tensor métrico para el espacio de Minkowski.

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

El espacio-tiempo de Minkowski es el espacio plano de la mecánica relativista.

Esto respeta la firma Lorentziana (- + + +) que propusimos en la sección de convenciones.

Siguiendo con nuestro ejemplo, podemos expresar el intervalo espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas. Vemos que lo único que se agrega es lo referente a la coordenada temporal.

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

5.4. Geometría del espacio-tiempo

Si partimos de la métrica (5.2) y expresamos la métrica en términos de una trayectoria radial para representarla en un espacio 1+1 dimensional

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2,$$

donde

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Si tomamos una curva de nivel para $ds^2 = 0$, resultará en una trayectorias tipo luz.

$$-c^2dt^2 + dr^2 = 0,$$

$$r = \pm ct.$$

El espacio-tiempo descrito por la métrica de Minkowski tiene una estructura hiperbólica en el sentido geométrico de Lorentz.

5.4.1. Lineas de mundo

La trayectoria de una partícula puntual en el espacio-tiempo se denomina **linea de mundo**. El intervalo espacio-temporal ds^2 determina la naturaleza de la relación causal entre dos eventos

- **Intervalo tipo tiempo** ($ds^2 < 0$): Los eventos pueden influirse causalmente.
- **Intervalo tipo luz** ($ds^2 = 0$): Los eventos están conectados por un rayo de luz.
- **Intervalo tipo espacio** ($ds^2 > 0$): Los eventos no pueden influirse entre sí.

Si consideramos un espacio-tiempo 2+1 dimensional (ct, x, y, z), el cono de luz es una superficie de doble cono. En el caso de un espacio-tiempo $n + 1$ dimensional con $n \geq 3$, el cono de luz es una hipersuperficie. Podemos también distinguir el cono de luz futuro ($t > 0$) y el cono de luz pasado ($t < 0$).



Figura 8: Cono de luz.

5.4.2. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz surgieron a finales del siglo XIX en un intento por explicar resultados experimentales que desafiaban las ideas clásicas del espacio y el tiempo, como el famoso experimento de Michelson y Morley. Hendrik Lorentz propuso estas transformaciones para preservar la forma de las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell bajo cambios de referencia entre observadores en movimiento relativo.

Sin embargo, fue Albert Einstein quien, en su teoría especial de la relatividad (1905), dio a estas transformaciones una interpretación física profunda: no son meras correcciones matemáticas, sino reflejo de una realidad en la que el espacio y el tiempo están intrínsecamente unidos en una estructura denominada espacio-tiempo. En este nuevo marco, el tiempo deja de ser absoluto, y dos observadores en movimiento relativo pueden no estar de acuerdo sobre la duración entre eventos o la simultaneidad de los mismos.

Las transformaciones de Lorentz representan, entonces, la manifestación matemática de un principio fundamental: las leyes de la física (incluyendo la velocidad de la luz) son las mismas para todos los observadores inerciales. Esto implica que las coordenadas espacio-temporales de un evento deben transformarse de forma que se conserve una cantidad fundamental (5.2) que reemplaza la noción de distancia absoluta del espacio euclidiano.

Las transformaciones de Lorentz describen cómo cambian las coordenadas espaciales y temporales de un evento cuando se observa desde dos sistemas de referencia inerciales que se mueven uno respecto al otro con velocidad constante.

Por la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, suponemos que las coordenadas espacio-temporales de dos sistemas S y S' están relacionadas por una transformación lineal. Por simplicidad S' se mueve con velocidad v respecto a S en la dirección del eje x por lo que las coordenadas estarán relacionadas por

$$x' = Ax + Bt, \tag{5.6}$$
$$t' = Cx + Dt. \tag{5.7}$$

Además, el intervalo debe permanecer invariante

$$ds^2 = ds'^2, \tag{5.8}$$

$$-c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \tag{5.9}$$

A partir de la invarianza del intervalo espacio-temporal, obtenemos las siguientes ecuaciones para los coeficientes:

$$-c^2C^2 + A^2 = 1, \tag{5.10}$$
$$-2c^2CD + 2AB = 0, \tag{5.11}$$
$$-c^2D^2 + B^2 = -c^2. \tag{5.12}$$

De la condición de velocidad relativa (el origen de S' se mueve con velocidad v respecto a S):

$$B = -Av. \tag{5.13}$$

Operando, llegamos a que

$$D^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Definimos el factor de Lorentz como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5.14}$$

De esta forma, las transformaciones de Lorentz toman la forma

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \tag{5.15}$$
$$x' = \gamma(x - vt), \tag{5.16}$$
$$y' = y, \tag{5.17}$$
$$z' = z. \tag{5.18}$$

Podemos expresar la transformación de coordenadas de forma matricial.

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{-v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

luego

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda_x \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

De forma general, la matriz de transformación para cualquier dirección resulta

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v_x}{c} & -\gamma\frac{v_y}{c} & -\gamma\frac{v_z}{c} \\ -\gamma\frac{v_x}{c} & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma\frac{v_y}{c} & (\gamma - 1)\frac{v_y v_x}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma\frac{v_z}{c} & (\gamma - 1)\frac{v_z v_x}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_z v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{bmatrix}, \tag{5.21}$$

y para transformar un vector de un sistema inercial a otro que difiere en una velocidad $\vec{v}$ resulta

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

5.5. Tiempo propio

Consideremos un marco de referencia inercial (ct, x, y, z). En este, una partícula puntual se mueve a lo largo de una trayectoria tipo tiempo sobre el espacio-tiempo.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Dividimos por dt^2 y agrupamos

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -[c^2 - (\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt})^2 - (\frac{dz}{dt})^2].$$

Si $\dot{x}^2$ representa el cuadrado de la velocidad de la partícula podemos reemplazar en la expresión

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -(c^2 - \dot{x}^2)$$

,

$$ds^2 = -c^2dt^2(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2})$$

,

$$ds^2 = -\frac{c^2dt^2}{\gamma^2}. \tag{5.23}$$

Ahora consideremos el marco de referencia visto desde la partícula, es decir, en reposo respecto al movimiento de la partícula. Acá expresamos las coordenadas del espacio-tiempo como $(c\tau, 0, 0, 0)$ y τ se denomina tiempo propio y corresponde al tiempo medido por un reloj que se mueve junto con la partícula.

$$ds^2 = -c^2d\tau^2. \tag{5.24}$$

Y como la métrica se mantiene invariante desde ambos sistemas inerciales entonces

$$-c^2d\tau^2 = -\frac{c^2dt^2}{\gamma^2},$$
$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2},$$
$$dt = \gamma d\tau.$$

Integrando entre dos instantes finitos (suponiendo $v = cte$)

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau. \tag{5.25}$$

Dado que $\gamma > 1$ cuando la partícula se mueve respecto al sistema inercial (ct, x, y, z) entonces, desde ese sistema siempre se medirá un tiempo mayor. A este fenómeno se lo conoce como **dilatación temporal**. Podemos observar que para el caso en que $c \to \infty$, $\gamma \to 1$ y recobramos el caso Newtoniano en el que el tiempo es el mismo (absoluto) desde cualquier marco de referencia.

En nuestro caso, siempre consideraremos intervalos tipo tiempo o tipo luz $ds^2 \leq 0$ por lo que consideremos la parte positiva del intervalo para el tiempo propio

$$ds = cd\tau.^8 \tag{5.26}$$

6. Mecanica relativista

Es importante entender como se comportan las reglas de la mecánica si tenemos en cuenta los efectos de la relatividad de Einstein. La mecánica relativista recupera las ecuaciones de la mecánica Newtoniana en el límite clásico $c \to \infty$.

En esta sección deduciremos las ecuaciones que rigen la mecánica relativista junto con las trayectorias geodésicas, el momento lineal relativista y la equivalencia entre masa y energia.

En capítulos previos vimos que el lagrangiano de una partícula libre en un sistema cartesiano $x = (x, y, z)$ resultaba

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

De forma general

$$L = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \tag{6.1}$$

Utilizamos el resultado de tiempo propio de la sección 5

$$cd\tau = ds. \tag{6.2}$$

Recordamos que la acción se define

$$S = \int_\Gamma L dt. \tag{6.3}$$

El lagrangiano relativista es un escalar y tiene que ser invariante bajo transformaciones de coordenadas. En particular, buscamos uno que sea invariante bajo transformaciones de Lorentz. Por lo que ya comentamos, nuestros invariantes son el intervalo y el tiempo propio.

$$S = \int_\Gamma L dt = \int_\Gamma K d\tau. \tag{6.4}$$

[8] Cabe aclarar que algo similar sucede con las distancias. La longitud se acorta en la dirección del movimiento pero no estudiaremos esto en este trabajo.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$
$$ds = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

Es importante introducir el signo $-$ dentro de la raíz para que la expresión tenga sentido físico ya que $ds^2 \leq 0 \implies -c^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq 0$ para que sean intervalos tipo tiempo o tipo luz, luego, para que nuestra raíz tenga sentido $\sqrt{-ds^2}$

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Recordando que $v^i = \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$

$$ds = \sqrt{c^2 - \dot{x^2}} dt.$$

Y, usando la equivalencia entre el intervalo y el tiempo propio τ

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - \dot{x^i}} dt. \tag{6.5}$$

$$S = \int_\Gamma K \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - \dot{x^2}} dt. \tag{6.6}$$

Vemos entonces que el lagrangiano relativista resulta

$$L = K \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - \dot{x^2}}.$$

Para que el análisis dimensional sea correcto el lagrangiano tiene que tener unidades de energía por lo que nuestra constante $K = -mc^2$

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x^2}} = -mc\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}. \tag{6.7}$$

El momento conjugado p_i se define como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial V^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \tag{6.8}$$

Y, en nuestro caso

$$p^i = \frac{\partial}{\partial \dot{x^i}}(-mc\sqrt{c^2 - \dot{x}}) = \frac{mc\dot{x}}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} = \frac{mc\dot{x}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = \gamma m \dot{x^i}. \tag{6.9}$$

6.0.1. Hamiltoniano

El Hamiltoniano es una función que describe el estado del sistema mecánico en terminos de sus coordenadas generalizadas y su momento generalizado. Si el sistema no tiene ninguna dependencia explícita del tiempo, puede probarse que este es una integral de movimiento y coincide con la energía mecánica del sistema. En mecánica clásica, el Hamiltoniano de un sistema se define como:

$$H = \dot{x}^i p_i - L. \tag{6.10}$$

Sustituimos las expresiones:

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}^i \cdot \frac{mc\dot{x}^i}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} + mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2} \\ &= \frac{mc\dot{x}^2}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} + mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2} \\ &= mc\left(\frac{\dot{x}^2}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} + \sqrt{c^2 - \dot{x}^2}\right) \\ &= \frac{mc(c^2)}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} = \gamma mc^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía relativista es:

$$E = H = \gamma mc^2. \tag{6.11}$$

6.0.2. Relación entre energía, masa y momento

Elevando al cuadrado la energía:

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4.$$

Y recordando que:

$$p^2 = \gamma^2 m^2 \dot{x}^2 \Rightarrow p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 \dot{x}^2 c^2.$$

Restamos:

$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 \dot{x}^2 c^2 \\ &= m^2 c^4. \end{aligned}$$

Entonces:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \tag{6.12}$$

de aquí:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \tag{6.13}$$

si el cuerpo está en reposo $\vec{p} = 0$

$$\boxed{E = mc^2.} \tag{6.14}$$

Esta ecuación es una de las más famosas de la física; tanto por su simplicidad como por lo que representa. La equivalencia entre masa y energía revolucionó nuestra comprensión del universo. Fue Albert Einstein quien, en 1905, introdujo esta idea en el marco de su teoría de la relatividad especial. Hasta entonces, la física clásica trataba la masa y la energía como conceptos totalmente separados. Sin embargo, esta nueva formulación reveló que la masa es, en esencia, una forma concentrada de energía.

Este principio no solo tiene implicaciones profundas en la física teórica, sino también consecuencias prácticas trascendentales. Por ejemplo, es la base de la energía liberada en reacciones nucleares, como las que ocurren en el interior del Sol o en bombas atómicas. En estos procesos, una pequeña pérdida de masa se convierte en una enorme cantidad de energía, de acuerdo con la relación $E = mc^2$.

Más adelante, en el desarrollo de la relatividad general, esta idea se amplía aún más. Allí se establece que no es únicamente la materia la que influye en la curvatura del espacio-tiempo, sino toda forma de energía y momento. En otras palabras, el espacio-tiempo reacciona a la presencia de energía, momento lineal, presión y tensión, todos ellos contenidos en lo que se conoce como el tensor energía-momento.

Esto significa que incluso entidades sin masa, como la luz (que posee energía y momento, pero no masa en reposo), también contribuyen a la estructura geométrica del espacio-tiempo. Así, esta equivalencia entre masa y energía se convierte en un pilar fundamental para entender cómo se genera la gravedad en la relatividad general, y nos permite unificar la descripción de materia y energía bajo un mismo marco conceptual.

6.1. Lagrangiano de una partícula no relativista sujeta a un potencial gravitatorio débil

Como ya vimos, en mecánica Newtoniana, el lagrangiano de una partícula en un campo gravitacional es $L = T - V$. Podemos expresar la energía potencial como $V = m\phi$ donde ϕ es el potencial gravitatorio. Partiendo de la expresión del lagrangiano relativista (6.7) y haciendo una expansión mediante serie de potencias, si nos quedamos con el primer término y despreciando el error obtenemos obtenemos este lagrangiano

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \tag{6.15}$$

donde el término $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ representa la energía cinética de una partícula puntual en el contexto de la mecánica clásica.

En el caso de que la partícula esté sujeta a un potencial gravitatorio Newtoniano, el lagrangiano será

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi. \tag{6.16}$$

Sabemos que para el caso no relativista $mc^2 \gg \frac{1}{2}mv^2$. Si desarrollamos su acción

$$S = -mc \int \sqrt{c^2 - v^2 + 2\phi}dt. \tag{6.17}$$

$$S = -mc \int \sqrt{(1 + \frac{2\phi}{c^2})c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}dt.$$

$$S = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt. \tag{6.18}$$

Acá, introdujimos el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ definido como

$$||g_{\mu\nu}|| = \begin{bmatrix} -(1+\frac{2\phi}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

En el límite de campos gravitacionales débiles y velocidades pequeñas, el potencial gravitacional ϕ puede absorberse dentro del tensor métrico; esto sugiere que la gravedad puede interpretarse como una manifestación de la geometría del espacio-tiempo, incluso en el régimen clásico. Este resultado es fundamental para el capitulo siguiente; la teoría general de la relatividad.

7. Relatividad general

7.0.1. Introducción

El objetivo de este apartado es comprender cómo podemos pasar de un espacio-tiempo plano e incluir un marco teórico que contemple la gravedad y los sistemas de referencia no inerciales. La teoría general de la relatividad está basada en el principio general de relatividad que, como discutimos, establece que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia, y en el principio de covarianza general, que establece que la forma de las leyes físicas debe ser invariante bajo transformaciones de coordenadas arbitrarias.

Algo importante para mencionar es que una transformación general covariante es una transformación entre dos sistemas de referencia (inerciales o no inerciales), y veremos que estas ecuaciones serán descritas en notación tensorial para que esta sea manifestantemente covariante. Al saber cómo transforma un tensor bajo un cambio de coordenadas, si una ecuación está escrita de forma manifestantemente covariante, será simple pasarla a cualquier otro sistema arbitrario.

La teoría general de la relatividad fue desarrollada por Albert Einstein y publicada en 1915, tras casi una década de trabajo desde que formuló la relatividad especial en 1905. Uno de los grandes motores para extender la relatividad especial fue el deseo de incorporar la gravedad en un marco relativista, algo que no era posible en la teoría especial de la relatividad publicada en 1905.

Einstein se inspiró profundamente en el *principio de equivalencia*, que observó inicialmente al notar que una persona en caída libre no siente su propio peso. Esto lo llevó a formular la idea en la que un marco de referencia acelerado y uno sometido a un campo gravitacional resultan equivalentes localmente. Esta idea lo condujo a pensar en la gravedad no como una fuerza en el sentido clásico, sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

Otro punto clave en el desarrollo histórico fue la colaboración e influencia del matemático Marcel Grossmann, quien introdujo a Einstein en las herramientas matemáticas necesarias para formular la teoría, especialmente el cálculo tensorial y la geometría diferencial desarrollada por Riemann, Christoffel, Ricci y Levi-Civita. Sin estos desarrollos previos, la formulación matemática de la relatividad general no hubiera sido posible.

Además, en esta época existía un fuerte interés por resolver ciertas anomalías que la mecánica Newtoniana no explicaba completamente, como la precesión del perihelio de Mercurio. Como veremos luego, Einstein demostró que su teoría predecía correctamente ese pequeño desfase, lo que representó una de las primeras confirmaciones observacionales de su nueva teoría.

7.1. Principio de equivalencia

7.1.1. Principio de equivalencia débil o de Galileo

Todos los cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitacional uniforme, independientemente de su masa o composición.

7.1.2. Principio de equivalencia de Einstein

No hay experimento físico local (mecánico, electromagnético, etc.) que permita distinguir entre un campo gravitacional uniforme y un sistema de referencia uniformemente acelerado.

7.2. Teorías métricas de gravedad

- El espacio-tiempo está equipado con una métrica simétrica.
- Las trayectorias de las partículas de prueba en caída libre son las geodésicas de la métrica.
- En los marcos de referencia locales en caída libre, las leyes no gravitacionales de la física son las mismas que las de relatividad especial.

7.3. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo de Einstein constituyen el núcleo de la teoría de la relatividad general. En términos generales, son un conjunto de ecuaciones diferenciales tensoriales en derivadas parciales que describen cómo la materia y la energía influyen en la curvatura del espacio-tiempo. Estas ecuaciones sustituyen a la ley de gravitación universal de Newton en el régimen relativista, extendiendo el concepto de gravedad más allá de una fuerza entre masas para interpretarla como una manifestación de la geometría del universo.

En su forma más compacta, estas ecuaciones vinculan la geometría del espacio-tiempo, representada por el tensor de curvatura, con el contenido energético del mismo, representado por el tensor de energía-momento. De esta forma, se establece una relación entre la distribución de masa-energía en el universo y la forma en que esta afecta la estructura del espacio-tiempo.

Más allá de su importancia conceptual, estas ecuaciones permiten predecir fenómenos como la existencia de agujeros negros, la expansión del universo, la desviación de la luz por campos gravitacionales intensos, y las ondas gravitacionales. Han sido verificadas experimentalmente en múltiples contextos, y siguen siendo una piedra angular de la física teórica y de la cosmología moderna. Las ecuaciones de campo de Einstein en la teoría general de la relatividad son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{7.1}$$

donde

- $R_{\mu\nu}$: el *tensor de Ricci*, que representa una parte de la curvatura del espacio-tiempo.
- R: el *escalar de Ricci*, obtenido contrayendo el tensor de Ricci con el tensor métrico. Resume en un solo número cuán curvado está el espacio-tiempo en una región.
- $g_{\mu\nu}$: El *tensor métrico*.
- Λ: la *constante cosmológica*, introducida por Einstein en 1917. Representa una energía del vacío o densidad de energía inherente al propio espacio-tiempo. En cosmología moderna, se asocia con la energía oscura.
- $T_{\mu\nu}$: El *tensor de energía-momento*, que describe la distribución y flujo de energía y momento en el espacio-tiempo. Incluye no solo materia ordinaria, sino también radiación, campos electromagnéticos y cualquier forma de energía.
- $\frac{8\pi G}{c^4}$: factor de acoplamiento que asegura que la teoría reproduce los resultados de la gravitación newtoniana en el límite débil. Donde G es la constante de gravitación universal y c es la velocidad de la luz en el vacío.

El conjunto $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu}$ se denomina el *tensor de Einstein*.

7.4. Tensor Energía momento

Mucho hemos hablado sobre las características geométricas de una variedad; en este apartado, nos enfocaremos en entender las componentes del tensor energía momento que se utilizan en las ecuaciones de campo. No se hará una deducción formal de este tensor de rango 2 ya que trabajaremos en las soluciones de vacío; es decir, fuera de nuestro objeto de estudio no habrá materia ni energía, solo particulas de prueba.

Definición general

El **tensor energía-momento**, también conocido como *tensor de energía-impulso*, se denota como $T^{\mu\nu}$. Es un tensor simétrico de rango 2 por lo que

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}.$$

En un sistema de coordenadas local, su representación matricial general es:

$$T^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}.$$

Donde cada componente de este tensor tiene una interpretación física

- T^{00}: Representa la densidad de energía.
- $T^{0i} = T^{i0}$: Representa densidad de flujo de momento (o flujo de energía en la dirección i).
- T^{ij} : $i \neq 0$: Representa tensor de tensiones (presiones y esfuerzos de corte en las direcciones espaciales).

Tensor energía-momento para un fluido perfecto

En el caso particular de un **fluido perfecto**, usando la firma Lorentziana $(-,+,+,+)$ el tensor toma la forma:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}.$$

Mientras que si tomamos la firma Lorentziana $(+,-,-,-)$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu},$$

donde:

- ρ: densidad de energía en el sistema en reposo.
- P: presión isotrópica del fluido.
- u^μ: cuatro velocidad del fluido.

7.5. Solución de Schwarzschild

Cuando Einstein publicó su teoría general de la relatividad en 1915, era consciente de que sus ecuaciones de campo eran sumamente dificiles de resolver de forma exacta (debido a la no linealidad de las mismas). Por ello, inicialmente recurrió a soluciones aproximadas para describir fenómenos físicos concretos. Sin embargo, apenas un mes después de la publicación de su teoría, el físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild, quien en ese momento servía en el frente oriental durante la Primera Guerra Mundial, logró encontrar la primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein.

La solución de Schwarzschild describe el campo gravitatorio exterior de una masa esférica, no cargada y estática, en el vacío. Es decir, representa el espacio-tiempo que rodea a una estrella, planeta o agujero negro idealizado sin rotación ni carga eléctrica. Su simplicidad la convierte en un pilar fundamental de la relatividad general, y es la base para muchos desarrollos posteriores.

Esta métrica predice fenómenos que han sido ampliamente comprobados experimentalmente como:

- La precesión del perihelio de Mercurio
- La deflexión de la luz por el sol
- El corrimiento gravitacional al rojo (redshift).

La contribución de Schwarzschild fue notable no solo por su contenido físico, sino también por el hecho de haber sido realizada bajo condiciones bélicas. Su carta a Einstein anunciando el hallazgo se convirtió en una de las más emblemáticas en la historia de la física moderna.

Aunque el campo gravitacional del Sol o de otros planetas puede modelarse, como vimos, mediante el límite débil a grandes distancias, en sus cercanías el escenario cambia drásticamente. Para comprender con mayor precisión el comportamiento del espacio-tiempo en las proximidades de un objeto compacto y masivo, analizaremos el caso idealizado de un objeto bajo los siguientes supuestos:

1. **Simetría esférica**: el objeto es idéntico en todas las direcciones espaciales.

2. **Estático**: no cambia con el tiempo y no presenta rotación.

3. **Condiciones de vacío**: Analizaremos que pasa en un radio mayor al radio R de la masa de estudio ($r > R$).

Al final de este capítulo se detallan mejor estas hipótesis y las características que tiene la métrica.

A partir de acá, deduciremos la métrica de **Schwarzschild**. Partimos de un espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas utilizando la firma Lorentziana (+,-,-,-)

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

y para expresarla en coordenadas esféricas usamos las reglas de transformación mencionadas en (4.14). Donde $x^i = (x, y, z)$ y $q^j = (r, \theta, \phi)$.
Luego, el intervalo en coordenadas esféricas resulta

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2,$$

cuyo tensor métrico asociado resulta

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

Como estamos considerando un espacio-tiempo curvo, ya no queremos que la métrica sea la de Minkowski.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

$$\begin{aligned} ds^2 = \; & g_{tt}dt^2 + g_{tr}dt\,dr + g_{t\theta}dt\,d\theta + g_{t\phi}dt\,d\phi \\ & + g_{rt}dr\,dt + g_{rr}dr^2 + g_{r\theta}dr\,d\theta + g_{r\phi}dr\,d\phi \\ & + g_{\theta t}d\theta\,dt + g_{\theta r}d\theta\,dr + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\theta\phi}d\theta\,d\phi \\ & + g_{\phi t}d\phi dt \; + g_{\phi r}d\phi dr + g_{\phi\theta}d\phi d\theta + g_{\phi\phi}d\phi^2. \end{aligned}$$

Aprovechando la simetría del tensor métrico

$$g_{tr} = g_{rt}, g_{r\theta} = g_{\theta r}, g_{\theta t} = g_{t\theta}, g_{\phi t} = g_{t\phi}, g_{\phi r} = g_{r\phi}.$$

$$\begin{aligned} ds^2 = \; & g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + 2g_{t\theta}dtd\theta \\ & + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + 2g_{r\theta}drd\theta \\ & + g_{\theta\theta}d\theta^2 + 2g_{\phi\theta}d\phi d\theta + g_{\phi\phi}d\phi^2 \end{aligned}$$

Bajo los supuestos de simetría esférica, no hay componentes cruzadas

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2. \tag{7.3}$$

Y luego, aprovechando los resultados de las componentes angulares de la métrica que obtuvimos en el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas tenemos

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{7.4}$$

Bajo los supuestos de **simetría esférica, estaticidad y vacío** proponemos una forma general para la métrica (conocida como Ansatz) que respete dichas condiciones:

$$ds^2 = c^2 e^{2T(r)}dt^2 - e^{2R(r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{7.5}$$

Las funciones $T(r)$ y $R(r)$ dependen únicamente de la coordenada radial r y no de t, θ, ϕ, lo cual garantiza la simetría esférica y la independencia temporal en nuestra variedad. Cualquier dependencia angular o temporal rompería estas simetrías y no cumpliría nuestras hipótesis.

Proponemos funciones exponenciales ya que son de clase C^∞ y además sus derivadas terminan siendo simples de calcular.

Por otro lado, debemos asegurarnos de que, a distancias suficientemente grandes de nuestro objeto de estudio, el espacio-tiempo recupere su estructura plana, ya que la influencia gravitacional del objeto debe ser despreciable. Esto implica que:

$$\lim_{r\to\infty} R(r) = 0.$$
$$\lim_{r\to\infty} T(r) = 0.$$

El tensor métrico del espacio-tiempo en este caso adopta la siguiente forma

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} c^2 e^{2T(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2R(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{7.6}$$

$$g^{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} c^{-2} e^{-2T(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2R(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

7.5.1. Símbolos de Christoffel

Recordamos que los simbolos de Christoffel se calculan de la siguiente forma:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda}\right),$$

en nuestro caso, tenemos 64 componentes totales y solo 13 no nulos.

Componentes temporales

Los componentes temporales no nulos son $\Gamma^t_{tr}, \Gamma^t_{rt}$ que resultan iguales.

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2} g^{tt}(g_{rt,t} + g_{tt,r} - g_{tr,t}) = \frac{1}{2} c^{-2} e^{-2T} \frac{\partial}{\partial r} c^2 e^{2T},$$
$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{dT}{dr}. \tag{7.8}$$

Componentes radiales

Los radiales no nulos son $\Gamma^r_{tt}, \Gamma^t_{rr}, \Gamma^r_{\theta\theta}, \Gamma^r_{\phi\phi}$.

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{tr,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r}) = \frac{1}{2}(-e^{-2R})\frac{\partial}{\partial r}(-c^2e^{2T}),$$
$$\Gamma^r_{tt} = c^2e^{2(T-R)}\frac{dT}{dr}. \tag{7.9}$$

Componentes angulares θ

Los componentes angulares no nulos son $\Gamma^\theta_{r\theta}, \Gamma^\theta_{\theta r}, \Gamma^\theta_{\phi\phi}$.

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,r} + g_{r\theta,\theta} - g_{r\theta,\theta}) = \frac{1}{2}r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2,$$
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}. \tag{7.10}$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\phi} + g_{\theta\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta}) = \frac{1}{2}r^{-2}\frac{\partial}{\partial\theta}r^2\sin^{-2}\theta,$$
$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta. \tag{7.11}$$

Componentes angulares ϕ

Los componentes angulares no nulos son $\Gamma^\phi_{r\phi}, \Gamma^\phi_{\phi r}, \Gamma^\phi_{\theta\phi}, \Gamma^\phi_{\phi\theta}$.

7.5.2. Tensor de Ricci

Recordemos que para calcular el tensor de Ricci necesitamos hacer una contracción del tensor de Riemann.

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}.$$

En nuestro caso, el tensor de Ricci tiene 4 componentes no nulas

$$R_{tt}, R_{rr}, R_{\theta\theta}R_{\phi\phi}$$

.

Cálculo de R_{tt}

$$R_{tt} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{tt} - \partial_t\Gamma^\lambda_{t\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{tt} - \Gamma^\lambda_{t\sigma}\Gamma^\sigma_{t\lambda}.$$

Cálculo de $\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{tt}$:

$$\partial_t\Gamma^t_{tt} = 0,$$
$$\partial_r\Gamma^r_{tt} = \partial_r\left(c^2e^{2(T-R)}\frac{dT}{dr}\right)$$
$$= c^2e^{2(T-R)}\left[2\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 - 2\frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2}\right].$$
$$\partial_\theta\Gamma^\theta_{tt} = 0.$$
$$\partial_\phi\Gamma^\phi_{tt} = 0.$$

Cálculo de $\partial_t \Gamma^\lambda_{t\lambda}$: Como las funciones dependen solo de r, todas las derivadas temporales son nulas:

$$\partial_t \Gamma^\lambda_{t\lambda} = 0.$$

Cálculo de $\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{tt}$: Consideramos los términos no nulos:

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{tt} = \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{tt}.$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{rr} &= \frac{dR}{dr}. \\
\Gamma^\theta_{\theta r} &= \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}. \\
\Gamma^r_{tt} &= -c^2 e^{2(T-R)} \frac{dT}{dr}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{tt} = \left(\frac{dR}{dr} + \frac{2}{r}\right)\left(-c^2 e^{2T-2R}\frac{dT}{dr}\right) = -c^2 e^{2T-2R}\left(\frac{dR}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{dT}{dr}.$$

4. Cálculo de $\Gamma^\lambda_{t\sigma}\Gamma^\sigma_{t\lambda}$: Tomamos las combinaciones no nulas:

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{tt} &= -c^2 e^{2T-2R}\frac{dT}{dr}, \\
\Gamma^t_{tr} &= \frac{dT}{dr}.
\end{aligned}$$

$$\Gamma^\lambda_{t\sigma}\Gamma^\sigma_{t\lambda} = 2\Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr} = -2c^2 e^{2T-2R}\left(\frac{dT}{dr}\right)^2$$

$$\boxed{R_{tt} = c^2 e^{2(T-R)}\left[\frac{d^2T}{dr^2} + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 - \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr}\right].}$$

Calculo de R_{rr}

$$R_{rr} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{rr} - \partial_r \Gamma^\lambda_{r\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{rr} - \Gamma^\lambda_{r\sigma}\Gamma^\sigma_{r\lambda}.$$

Cálculo de $\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{rr}$: Solo el término con $\lambda = r$ es no nulo:

$$\partial_r \Gamma^r_{rr} = \frac{d^2R}{dr^2}.$$

Por tanto,

$$\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{rr} = \frac{d^2R}{dr^2}.$$

Cálculo de $\partial_r \Gamma^\lambda_{r\lambda}$:

$$\Gamma^\lambda_{r\lambda} = \Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{dT}{dr} + \frac{dR}{dr} + \frac{2}{r}.$$

Entonces,

$$\partial_r \Gamma^\lambda_{r\lambda} = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{d^2R}{dr^2} - \frac{2}{r^2}.$$

Cálculo de $\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{rr}$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{dT}{dr}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{dR}{dr}, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}.$$

Por lo tanto,

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{rr} = \left(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\phi_{r\phi}\right)\Gamma^r_{rr} = \left(\frac{dT}{dr} + \frac{dR}{dr} + \frac{2}{r}\right)\cdot\frac{dR}{dr}.$$

Cálculo de $\Gamma^\lambda_{r\sigma}\Gamma^\sigma_{r\lambda}$

$$\Gamma^t_{rt} = \frac{dT}{dr}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{dR}{dr}, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}.$$

Entonces:

$$\Gamma^\lambda_{r\sigma}\Gamma^\sigma_{r\lambda} = \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r^2}.$$

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{rr} - \partial_r \Gamma^\lambda_{r\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{rr} - \Gamma^\lambda_{r\sigma}\Gamma^\sigma_{r\lambda} \\ &= \frac{d^2R}{dr^2} - \left(\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{d^2R}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right) + \left(\frac{dT}{dr} + \frac{dR}{dr} + \frac{2}{r}\right)\cdot\frac{dR}{dr} - \left(\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r^2}\right) \\ &= -\frac{d^2T}{dr^2} + \left(\frac{dT}{dr}\cdot\frac{dR}{dr} - \left(\frac{dT}{dr}\right)^2\right) + \frac{2}{r}\cdot\frac{dR}{dr} + \frac{2}{r^2}. \end{aligned}$$

Cálculo de $R_{\theta\theta}$

$$R_{\theta\theta} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\lambda_{\theta\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\theta\theta} - \Gamma^\lambda_{\theta\sigma}\Gamma^\sigma_{\theta\lambda}.$$

Cálculo de $\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\theta\theta}$:

$$\partial_r \Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{d}{dr}(-re^{-2R}) = -e^{-2R} + 2re^{-2R}\frac{dR}{dr}.$$

Cálculo de $\partial_\theta \Gamma^\lambda_{\theta\lambda}$:

$$\partial_\theta \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{d}{d\theta}(\cot\theta) = -\csc^2\theta.$$

Cálculo de $\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\theta\theta}$:

$$\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\theta\theta} = \frac{dR}{dr}\cdot(-re^{-2R}) = -re^{-2R}\frac{dR}{dr}$$
$$\Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\cdot(-re^{-2R}) = -e^{-2R}$$
$$\Rightarrow \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\theta\theta} = -re^{-2R}\frac{dR}{dr} - e^{-2R}.$$

Cálculo de $\Gamma^{\lambda}_{\theta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\theta\lambda}$:

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{\theta r} = (-re^{-2R})\cdot\frac{1}{r} = -e^{-2R}.$$
$$\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cot^2\theta.$$
$$\Rightarrow \Gamma^{\lambda}_{\theta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\theta\lambda} = -e^{-2R} + \cot^2\theta.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= \left[-e^{-2R} + 2re^{-2R}\frac{dR}{dr}\right] - (-\csc^2\theta) \\ &\quad + \left[-re^{-2R}\frac{dR}{dr} - e^{-2R}\right] - \left[-e^{-2R} + \cot^2\theta\right]. \\ &= re^{-2R}\frac{dR}{dr} - e^{-2R} + \csc^2\theta - \cot^2\theta. \end{aligned}$$

Recordando que

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1.$$

Entonces:

$$\boxed{R_{\theta\theta} = re^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + 1.}$$

Cálculo de $R_{\phi\phi}$

$$R_{\phi\phi} = \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\phi\phi} - \partial_\phi\Gamma^{\lambda}_{\phi\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\phi\phi} - \Gamma^{\lambda}_{\phi\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\phi\lambda}.$$

Cálculo de $\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\phi\phi}$:

$$\partial_r\Gamma^{r}_{\phi\phi} = \frac{d}{dr}(-r\sin^2\theta\, e^{-2R}) = -\sin^2\theta\, e^{-2R} + 2r\sin^2\theta\, e^{-2R}\frac{dR}{dr}.$$

Cálculo de $\partial_\phi\Gamma^{\lambda}_{\phi\lambda}$:

$$\partial_\phi\Gamma^{\theta}_{\phi\theta} = \partial_\phi\cot\theta = 0.$$

Cálculo de $\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\phi\phi}$:

$$\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\phi\phi} = \frac{dR}{dr}\cdot(-r\sin^2\theta\, e^{-2R}) = -r\sin^2\theta\, e^{-2R}\frac{dR}{dr}.$$
$$\Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\cdot(-r\sin^2\theta\, e^{-2R}) = -\sin^2\theta\, e^{-2R}.$$
$$\Rightarrow \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta\, e^{-2R}\frac{dR}{dr} - \sin^2\theta\, e^{-2R}.$$

Cálculo de $\Gamma^{\lambda}_{\phi\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\phi\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{r}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi r} &= (-r\sin^2\theta\, e^{-2R})\cdot\frac{1}{r} = -\sin^2\theta\, e^{-2R}.\\
\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} &= (-\sin\theta\cos\theta)(\cot\theta) = -\cos\theta.\\
\Rightarrow \Gamma^{\lambda}_{\phi\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\phi\lambda} &= -\sin^2\theta\, e^{-2R} - \cos^2\theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= \left[-\sin^2\theta\, e^{-2R} + 2r\sin^2\theta\, e^{-2R}\frac{dR}{dr}\right] - 0\\
&\quad + \left[-r\sin^2\theta\, e^{-2R}\frac{dR}{dr} - \sin^2\theta\, e^{-2R}\right] - \left[-\sin^2\theta\, e^{-2R} - \cos^2\theta\right].\\
&= r\sin^2\theta\, e^{-2R}\frac{dR}{dr} - \sin^2\theta\, e^{-2R} + \cos^2\theta.
\end{aligned}$$

Recordando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta.$$

Entonces:

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta\left[re^{-2R}\frac{dR}{dr} - e^{-2R} - 1\right] + 1.$$

Para que quede en una forma similar a $R_{\theta\theta}$, usamos el resultado conocido de simetría esférica:

$$\boxed{R_{\phi\phi} = \sin^2\theta\cdot R_{\theta\theta}.}$$

donde:

$$R_{\theta\theta} = re^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + 1.$$

Entonces:

$$\boxed{R_{\phi\phi} = \sin^2\theta\left[re^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + 1\right].}$$

Por lo tanto, las componentes no nulas del tensor de Ricci resultan:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= c^2e^{2(T-R)}\left[\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 - \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr}\right]\\
R_{rr} &= -\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} - \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}.\\
R_{\theta\theta} &= re^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + 1.\\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta\left[re^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + 1\right].
\end{aligned}$$

7.5.3. Escalar de Ricci

Recordemos que el escalar de Ricci surge de contraer el tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},$$
$$R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi}, \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{c^2}e^{-2T}\cdot R_{tt} + e^{-2R}\cdot R_{rr} + \frac{1}{r^2}\cdot R_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot R_{\phi\phi} \\
&= \frac{1}{c^2}e^{-2T}\cdot c^2e^{2(T-R)}\left[\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 - \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr}\right] \\
&\quad + e^{-2R}\left[-\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} - \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left[re^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + 1\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\sin^2\theta\left[re^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + 1\right].
\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
R &= e^{-2R}\left[\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 - \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr}\right] \\
&\quad + e^{-2R}\left[-\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} - \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] \\
&\quad + \frac{1}{r}e^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \\
&\quad + \frac{1}{r}e^{-2R}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

$$R = \frac{2}{r^2}e^{-2R}(r^2(\frac{dT}{dr})^2 - r^2\frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} + 2r\frac{dT}{dr} - 2r\frac{dR}{dr} + 1) - \frac{2}{r^2}. \tag{7.13}$$

7.5.4. Tensor de Einstein

Como el tensor de Ricci y la métrica son diagonales, el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R,$$

solo tiene 4 componentes no nulas

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= \frac{2}{r^2}c^2e^{2T}\frac{dm}{dr}. \\
G_{rr} &= \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} - \frac{2m}{r^3}e^{2R}. \\
G_{\theta\theta} &= r^2e^{-2R}[-\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + (\frac{dT}{dr}^2) - \frac{dT}{dr}\frac{dR}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2}]. \\
G_{\phi\phi} &= G_{\theta\theta}\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Donde m, en este caso, representa

$$m = \frac{1}{2} r(1 - e^{-2R}). \tag{7.14}$$

En nuestro caso particular estamos tomando condiciones de vacío, es decir $T_{\mu\nu} = 0$. Pero es útil ver que sucede cuando el tensor energía momento es no nulo ya que de acá saldran las soluciones de las funciones T y R. Como vimos antes

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}.$$

Usaremos la simplificación del tensor energía-momento de un fluído perfecto en el contexto de una estrella estática. Al tener estas condiciones, no hay fuerzas de corte en nuestro tensor energía-momento por lo que resulta diagonal.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Por este motivo, solo tendrémos 4 componentes no nulas: $T^{tt}, T^{rr}, T^{\theta\theta}, T^{\phi\phi}$.

Cálculo de T_{tt}

$$T_{tt} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U_t U_t + P g_{tt},$$
$$T_{tt} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U_t^2 - P c^2 e^{2T}.$$

Para encontrar U_t nos apoyamos en el invariante

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2,$$
$$g_{tt}(U^t)^2 + g_{ii}(U^i)^2 = c^2.$$

Como el objeto es estático $U^i = 0$.

$$g_{tt}(U^t)^2 = c^2,$$
$$c^2 e^{2T}(U^t)^2 = c^2,$$
$$e^{2T}(U^t)^2 = 1,$$
$$(U^t)^2 = e^{-2T},$$
$$U^t = e^{-T}.$$

Podemos transformarlo en un vector covariante utilizando la métrica

$$U_t = g_{\mu t} U^\mu = g_{tt} U^t + g_{rt} U^r + g_{r\theta} U^\theta + g_{r\phi} U^\phi.$$

Como el tensor métrico es diagonal entonces

$$u_t = g_{tt} U^t = c^2 e^{2T} e^{-T} = c^2 e^T.$$

Luego

$$T_{tt} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)c^4 e^{2T} - Pc^2 e^{2T}.$$

$$T_{tt} = \rho c^2 e^{2T} + Pc^2 e^{2T} - Pc^2 e^{2T},$$

$$T_{tt} = \rho c^2 e^{2T}. \tag{7.16}$$

Para las componentes radiales y angulares nos aprovechamos de la condicicón de staticidad por lo que $U_r = U_\theta = U_\phi = 0$.

$$T_{rr} = -Pg_{rr},$$

$$T_{rr} = Pe^{2R}, \tag{7.17}$$

$$T_{\theta\theta} = Pr^2, \tag{7.18}$$

$$T_{\phi\phi} = Pr^2 \sin^2\theta. \tag{7.19}$$

Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein componente a componente

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

$$\frac{2}{r^2} c^2 e^{2T} \frac{dm}{dr} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 e^{2T},$$

$$\frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho,$$

$$\rho_m = \frac{\rho}{c^2},$$

$$\frac{dm}{dr} = 8\pi G \rho_m \frac{r^2}{2c^2},$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi G \rho_m \frac{r^2}{c^2},$$

$$m = \int 4\pi G \rho_m \frac{r^2}{c^2} dr,$$

$$m = \frac{G}{c^2} \int 4\pi \rho_m r^2 dr.$$

Donde

$$\int 4\pi \rho_m r^2 dr = M,$$

representa la masa del objeto esférico con una densidad dada. Por lo que

$$m = \frac{GM}{c^2}. \tag{7.20}$$

Y, a partir de acá utilizando la función m que propuse, podremos despejar $R(r)$,

$$\frac{GM}{c^2} = \frac{1}{2} r (1 - e^{-2R}),$$

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = e^{-2R}.$$

$$(1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{-1} = e^{2R}. \tag{7.21}$$

Avanzamos con la componente radial en las ecuaciones de campo

$$G_{rr} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{rr}.$$

$$\frac{2}{r}\frac{dT}{dr} - \frac{2m}{r^3}e^{2R} = \frac{8\pi G}{c^4} P e^{2R},$$
$$\frac{2}{r}\frac{dT}{dr} - \frac{2m}{r^3}(1 - \frac{2m}{r})^{-1} = \frac{8\pi G}{c^4} P (1 - \frac{2m}{r})^{-1},$$
$$\frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = \frac{8\pi G}{c^4} P (1 - \frac{2m}{r})^{-1} + \frac{2m}{r^3}(1 - \frac{2m}{r})^{-1},$$
$$\frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = \frac{8\pi G}{c^4} P (1 - \frac{2m}{r})^{-1} + \frac{2m}{r^3}(1 - \frac{2m}{r})^{-1},$$
$$\frac{dT}{dr} = (1 - \frac{2m}{r})^{-1}[\frac{8\pi G P r}{c^4} + \frac{2m}{r^2}].$$

Sacando factor común

$$\frac{dT}{dr} = (1 - \frac{2m}{r})^{-1}[\frac{4\pi G P r^3}{r^2 c^4} + \frac{mc^4}{r^2 c^4}],$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{4\pi G P r^3 + mc^4}{c^4 r^2 (1 - \frac{2m}{r})}.$$

Como estamos bajo condiciones de vacío $P = 0$ y $\rho_m = 0 \implies \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi \rho_m r^2}{c^2} = 0$.

$$\frac{dT}{dr} = \frac{mc^4}{c^4 r(r - 2m)},$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2(r - 2m)} - \frac{1}{2r},$$
$$T = \frac{1}{2}\ln(r - 2m) - \frac{1}{2}\ln r + C,$$
$$2T - 2C = \ln(\frac{r - 2m}{r}),$$
$$e^{2T - 2C} = \frac{r - 2m}{r},$$
$$\frac{e^{2T}}{e^{2C}} = \frac{r - 2m}{r},$$
$$e^{2T} = e^{2C}(1 - \frac{2m}{r}).$$

Despejaremos la constante con las condiciones de borde que impusimos al principio recordando el hecho de que muy alejados de nuestro cuerpo, la métrica tiene que recuperar su estructura plana.

$$\lim_{r\to\infty} g_{tt} = c^2,$$

$$\lim_{r\to\infty} e^{2C}c^2(1-\frac{2GM}{c^2r}) = c^2.$$

Para que esto suceda

$$e^{2C} = 1,$$

$$e^{2T} = (1-\frac{2m}{r}), \tag{7.22}$$

Entonces, la métrica de Schwarzschild corresponde a la métrica inducida en el espacio-tiempo por un cuerpo con simetría esferica y estático.

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} c^2(1-\frac{2GM}{c^2r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\frac{2GM}{c^2r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{7.23}$$

O, lo que es equivalente

$$ds^2 = c^2(1-\frac{2GM}{c^2r})dt^2 - (1-\frac{2GM}{c^2r})^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \tag{7.24}$$

Las condiciones de vacío nos llevaron a resolver las ecuaciones de campo de Einstein en ausencia de materia y energía. Sin embargo, el hecho de que todas las componentes del tensor de Ricci sean cero no implica que el espacio-tiempo descrito por la métrica de Schwarzschild sea plano. La curvatura del espacio-tiempo está determinada por el **tensor de Riemann**, el cual posee, en este caso, **24 componentes no nulas**.

Esto se debe a que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ es una contracción del tensor de Riemann ($R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$). Mientras que el tensor de Ricci describe la curvatura asociada directamente a la distribución de materia y energía (a través del tensor energía-momento), bajo la hipótesis Riemanniana, **el tensor de Riemann contiene toda la información sobre la geometría intrínseca de la variedad**.

En la solución de Schwarzschild, como se ha supuesto vacío (es decir, $T_{\mu\nu} = 0$), el tensor de Ricci es nulo. Sin embargo, la curvatura del espacio-tiempo no desaparece: **el campo gravitatorio persiste y se manifiesta en la curvatura del espacio-tiempo**, representada por las componentes no nulas del tensor de Riemann. Esto evidencia una característica esencial de la relatividad general: la gravedad no es una fuerza en el sentido clásico, sino una manifestación de la geometría del espacio-tiempo. Incluso en regiones donde no hay materia, esta curvatura afecta de manera tangible el movimiento de partículas y la propagación de la luz, como ha sido confirmado en numerosos experimentos.

Por otro lado, si bien la métrica de Schwarzschild es adecuada para casi todas las pruebas del sistema solar de la relatividad general, existen situaciones astrofísicas bien conocidas (por ejemplo, las estrellas de neutrones o agujeros negros) para las cuales esta aproximación no basta; por lo que físicamente se requiere una solución de campo fuerte.

Además, si una estrella en rotación llegara a sufrir un colapso gravitacional, se esperaría que el agujero negro resultante conservara al menos una fracción de su momento angular inicial; lo que sugiere, que de algún modo debería existir una extensión de la geometría de Schwarzschild para esta situación.

7.5.5. Propiedades de la métrica

La solución de Schwarzschild presenta una serie de propiedades globales y simetrías importantes que caracterizan su estructura y comportamiento físico:

- **Estática:** La métrica de Schwarzschild es estática, ya que existe una coordenada temporal t tal que los coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ no dependen explícitamente del tiempo. Además, el vector ∂_t es un *vector de Killing* de tipo temporal fuera del horizonte ($r > r_s$), lo que implica que el espacio-tiempo posee simetría temporal.

- **Esféricamente simétrica:** La métrica es invariante bajo rotaciones. Esto se traduce en la presencia de tres vectores de Killing adicionales asociados a las simetrías del grupo de rotaciones SO(3). Estas simetrías garantizan la conservación del momento angular.

- **Asintóticamente plana:** En el límite $r \to \infty$, la métrica tiende a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas:

$$\lim_{r\to\infty} ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \tag{7.25}$$

  lo que significa que a grandes distancias del cuerpo central, los efectos gravitacionales desaparecen.

- **Vacía:** La solución de Schwarzschild resuelve las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

  lo cual implica que no hay presencia de materia o energía en el dominio considerado ($r > 0$). La fuente que genera el campo gravitacional está contenida en $r = 0$, interpretada como una masa puntual (o región colapsada) con simetría esférica.

- **Singularidad central y horizonte:** Como se discutirá en secciones siguientes, presenta una singularidad física en $r = 0$ y una singularidad de coordenadas.

Estas propiedades son esenciales para entender el comportamiento del campo gravitacional generado por una masa puntual no cargada y no rotante, así como para establecer comparaciones con soluciones más generales como Reissner–Nordström (con carga) o Kerr (con momento angular).

Para concluir esta sección, es importante mencionar un resultado fundamental de unicidad dentro de la relatividad general: el *Teorema de Birkhoff.* que establece que:

Definición 7.1. *La única solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de Einstein en el vacío es la métrica de Schwarzschild.*

Esto significa que cualquier distribución de masa esféricamente simétrica, incluso si es pulsante o dinámica (mientras se mantenga la simetría esférica), genera un campo gravitatorio externo descrito por esta métrica.

8. Estrellas y agujeros negros

Antes de sumergirnos la definición de **agujero negro**, tenemos que entender qué hay en el interior de una estrella normal.

Suponemos que una estrella nació como consecuencia del colapso gravitatorio de una nube gaseosa protoestelar. En este trabajo no estudiamos el mecanismo de formación; de eso se encarga la astrofísica. En un principio, debido al mecanismo de Kelvin, la contracción de la protoestrella convirtió la energía potencial en térmica, llegando a temperaturas del orden de $10^7 K$ en su interior. En ese momento, entraron en acción reacciones nucleares. Podemos suponer que, en algún punto a partir de ahí, la estrella adquirió condiciones estacionarias y estáticas, por lo que las ecuaciones que rigen el comportamiento del interior de una estrella siguen los siguientes principios:

- Equilibrio hidrostático (explicado a continuación)
- Balance energético
- Ecuación de transporte radiativo
- Ecuación de estado

Vamos a suponer también que una estrella normal está formada por un gas perfecto y, una vez alcanzado el equilibrio, la estructura interna de una estrella queda determinada por la interacción de varias fuerzas y procesos físicos. En su núcleo, donde la temperatura y la presión son extremadamente altas, ocurren las reacciones de fusión nuclear. Estas reacciones convierten elementos ligeros, como el hidrógeno, en elementos más pesados, como el helio, liberando enormes cantidades de energía en forma de radiación. Esta energía es la que sostiene a la estrella contra el colapso gravitacional, en un estado de equilibrio conocido como equilibrio hidrostático.

La ecuación de equilibrio hidrostático describe cómo la presión interna del gas compensa exactamente la atracción gravitatoria que tiende a hacer colapsar a la estrella sobre sí misma. Si la gravedad fuera mayor que la presión, la estrella colapsaría; si fuera menor, se expandiría.

Por otro lado, el balance energético garantiza que la energía generada en el núcleo (por fusión) se transporte hacia las capas externas y, eventualmente, se irradie al espacio. Este transporte de energía puede realizarse por radiación o por convección, dependiendo de la opacidad del material estelar.

La ecuación de transporte radiativo se encarga de describir cómo fluye esta energía a través del gas, teniendo en cuenta la absorción y emisión de fotones en el interior estelar. En regiones donde la densidad y la temperatura permiten una mayor movilidad de fotones, el transporte es predominantemente radiativo. En otras regiones, donde los fotones son absorbidos y reemitidos muchas veces, el transporte convectivo puede dominar.

Finalmente, la ecuación de estado relaciona la presión, la densidad y la temperatura del gas que compone la estrella. En este modelo simplificado, asumimos que el gas se comporta como un gas perfecto, es decir, obedece la ley de los gases ideales. Esto es una buena aproximación para la mayoría de las fases de la vida de una estrella, al menos mientras domina el proceso de fusión nuclear.

8.1. Enanas blancas

Una vez que una estrella ha agotado el hidrógeno de su núcleo, las reacciones de fusión se detienen y el equilibrio hidrostático se rompe. La gravedad comienza a dominar, y el núcleo colapsa lentamente. El destino final de la estrella depende fundamentalmente de su masa. En el caso de estrellas con masas comparables o ligeramente mayores que la del Sol (menos de aproximadamente 8 masas solares), este proceso da lugar a la formación de una **enana blanca**.

A medida que la densidad en el núcleo aumenta, los electrones libres comienzan a ocupar niveles de energía cada vez más altos. Llega un punto en el que no pueden acercarse más entre sí debido al **principio de exclusión de Pauli**, que establece que dos fermiones (como los electrones) no pueden ocupar el mismo estado cuántico. Esta resistencia al colapso adicional se manifiesta como una presión interna llamada **presión de degeneración electrónica**, también conocida como **presión de Fermi**. Esta presión, de origen puramente cuántico, es la responsable de sostener la estrella contra un colapso gravitacional completo. Por esta razón, se dice que una enana blanca es una *estrella degenerada de electrones*.

Durante su vida activa, la estrella ha convertido gran parte de su hidrógeno en elementos más pesados, como helio, carbono y oxígeno. Por lo tanto, las enanas blancas están formadas por núcleos atómicos de estos elementos rodeados de un mar de electrones degenerados. La composición exacta depende de la masa y la historia evolutiva de la estrella progenitora. En general, el núcleo suele estar compuesto por carbono y oxígeno, aunque en algunos casos también puede ser de helio (para estrellas de muy baja masa) o incluso de oxígeno y neón.

Un aspecto crucial de estas estrellas es que no generan más energía: su luminosidad proviene del calor residual que lentamente irradian al espacio. Con el tiempo, se enfrían y se tornan más débiles, aunque este proceso puede tardar miles de millones de años.

8.2. Estrellas de neutrones

Las estrellas de neutrones son uno de los objetos más densos y extremos del universo. Representan una de las posibles etapas finales en la evolución estelar, cuando la masa del núcleo colapsado de una estrella excede el *límite de Chandrasekhar* [22], pero no es lo suficientemente grande como para formar un agujero negro.

Cuando una estrella masiva (con una masa inicial entre aproximadamente 8 y 25 veces la masa del Sol) agota su combustible nuclear, ya no puede sostener el equilibrio hidrostático frente a la gravedad. En una etapa final, la estrella experimenta una explosión catastrófica conocida como **supernova tipo II**, en la que las capas externas de la estrella son expulsadas violentamente al espacio. Lo que queda es el núcleo extremadamente comprimido.

Durante el colapso gravitatorio, los electrones y protones del núcleo se combinan mediante el proceso de captura electrónica:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e.$$

Este proceso genera una enorme cantidad de **neutrones**, y libera neutrinos que escapan rápidamente. Como resultado, el núcleo queda compuesto principalmente por neutrones y se convierte en lo que llamamos una **estrella de neutrones**.

Los neutrones, al igual que los electrones y protones, son **fermiones**, por lo que el **principio de exclusión de Pauli** también se aplica a ellos. A densidades extraordinarias

—del orden de $10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$, comparable a la densidad de un núcleo atómico—, aparece una nueva forma de presión: la **presión de degeneración de neutrones**. Esta presión cuántica es la responsable de sostener a la estrella contra un colapso gravitacional aún mayor.

Una estrella de neutrones típica tiene una masa de entre 1.1 y 2.1 masas solares, comprimida en un radio de apenas 10 a 12 kilómetros. Su campo gravitacional es tan intenso que la curvatura del espacio-tiempo en su superficie es significativa. Su rotación puede ser extremadamente rápida, y en algunos casos forman objetos conocidos como **púlsares**, que emiten pulsos periódicos de radiación electromagnética detectables desde la Tierra.

Sin embargo, existe un límite también para la masa que puede soportar la presión de degeneración de neutrones. Si la masa del núcleo remanente tras el colapso supera un cierto valor (conocido como el **límite de Tolman–Oppenheimer–Volkoff**, estimado en alrededor de 2.1 a 2.3 masas solares), ni siquiera los neutrones pueden soportar dicho colapso.

8.3. Agujeros negros

La noción de un objeto cuya gravedad es tan intensa que nada, ni siquiera la luz, puede escapar de su interior, tiene raíces conceptuales que se remontan al siglo XVIII. En 1784, el naturalista británico *John Michell* propuso la idea de una "estrella oscura" a partir de consideraciones puramente newtonianas: si un cuerpo suficientemente masivo y compacto tuviese una velocidad de escape superior a la de la luz, entonces la luz no podría abandonarlo [23]. En 1796, *Pierre-Simon Laplace* retomó esta idea en su obra *Exposition du système du Monde*, sugiriendo que tales objetos podrían existir en el universo.

Sin embargo, estas conjeturas tempranas carecían de una teoría gravitacional adecuada que las fundamentara plenamente. El verdadero marco físico que permite describir rigurosamente los agujeros negros surgió más de un siglo después, con la formulación de la *teoría de la relatividad general* por *Albert Einstein* en 1915.

Tan solo unos meses después de la publicación de las ecuaciones de campo de Einstein, como vimos, el físico alemán *Karl Schwarzschild* encontró una solución exacta al vacío de dichas ecuaciones. Esta solución introdujo el concepto del *radio de Schwarzschild*, definido como

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \tag{8.1}$$

que representa el horizonte de eventos de un agujero negro no cargado y sin rotación. Una frontera causal a partir de la cual ninguna información puede escapar al exterior.

Durante décadas, el significado físico de la solución de Schwarzschild fue motivo de debate, ya que el comportamiento de la métrica en $r = r_s$ parecía indicar una singularidad. No fue sino hasta mediados del siglo XX que se entendió que esta era una *singularidad de coordenadas*, resoluble mediante un cambio apropiado de sistema (como las coordenadas de Kruskal-Szekeres las cuales definiremos luego).

El término agujero negro fue acuñado por *John Archibald Wheeler* en 1967, en un contexto donde ya se habían desarrollado soluciones más generales, como la métrica de *Reissner–Nordström* (para objetos cargados), *Kerr* (para objetos en rotación), y *Kerr–Newman*.

Con el tiempo, los agujeros negros pasaron de ser una curiosidad matemática a adquirir *relevancia física y observacional concreta*. La detección indirecta de estos objetos

mediante rayos X en sistemas binarios, y más recientemente las *imágenes del horizonte de eventos* (colaboración EHT) y las *ondas gravitacionales* detectadas por LIGO y Virgo, consolidaron su existencia como entidades astrofísicas reales.

Un **agujero negro** es una región del espacio-tiempo en la cual la gravedad es tan intensa que nada, ni siquiera la luz, puede escapar de ella una vez que ha cruzado un límite conocido como el **horizonte de eventos** [1]. Tradicionalmente, los agujeros negros se asocian con el colapso gravitacional de estrellas muy masivas, pero desde el punto de vista teórico, cualquier concentración de masa-energía suficientemente compacta puede formar un agujero negro.

Este objeto tan extremo surge de manera natural como una solución a las ecuaciones de la **Relatividad General** de Einstein, específicamente de la solución encontrada por Karl Schwarzschild en 1916 [2], tan solo semanas después de que Einstein publicara su teoría. Esta solución describe el campo gravitacional generado por una masa puntual y esféricamente simétrica no cargada. Dentro de esta solución aparece una singularidad matemática en el radio (8.1) conocido como el **radio de Schwarzschild**. Si un objeto es comprimido dentro de un radio inferior a r_s, se convierte en un agujero negro [3].

8.3.1. Relación con la relatividad general

Los agujeros negros son soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein. Existen diversas clases según sus propiedades:

- **Solución de Schwarzschild**: Agujero negro estático, no cargado y sin momento angular.
- **Solución de Reissner–Nordström**: Agujero negro con carga eléctrica pero sin rotación.
- **Solución de Kerr**: Agujero negro en rotación, sin carga.
- **Solución de Kerr–Newman**: Agujero negro con carga y rotación.

Estas soluciones comparten una característica común: todas poseen una **singularidad central**, donde la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita, y un **horizonte de eventos**, que actúa como una superficie causal que separa el interior del exterior.

La Relatividad General predice que cerca de un agujero negro el tiempo se dilata fuertemente.

8.3.2. Propiedades físicas de los agujeros negros

- **No-hair theorem**: Un agujero negro, una vez formado, se describe completamente por solo tres parámetros: masa (M), carga eléctrica (Q) y momento angular (J) [10].
- **Horizonte de eventos**: Superficie que marca el punto de no retorno. Nada puede escapar una vez que ha cruzado este límite.
- **Singularidad**: Región donde la densidad y la curvatura del espacio-tiempo tienden a infinito. Se cree que una teoría cuántica de la gravedad podría describir estas regiones adecuadamente.

- **Área del horizonte y entropía**: Jacob Bekenstein propuso que un agujero negro tiene entropía proporcional al área de su horizonte [11]. Stephen Hawking demostró que, debido a efectos cuánticos, los agujeros negros emiten radiación térmica [12], lo que implica que pueden evaporarse.

- **Ondas gravitacionales**: La fusión de agujeros negros genera perturbaciones en el espacio-tiempo detectables mediante interferometría láser, como fue evidenciado por LIGO en 2015 [7].

8.3.3. Tipos de agujeros negros

- **Agujeros negros estelares**: Resultantes del colapso de estrellas masivas. Tienen masas entre unas pocas y decenas de veces la masa del Sol.

- **Agujeros negros supermasivos**: Se encuentran en el centro de la mayoría de las galaxias, con masas de millones a miles de millones de masas solares. El agujero negro en el centro de la Vía Láctea, Sagitario A*, es uno de los más estudiados [8].

- **Agujeros negros de masa intermedia**: Hipotéticos objetos cuya masa está entre las 100 y 10,000 masas solares.

- **Agujeros negros primordiales**: Propuestos como posibles objetos formados durante el universo temprano a partir de fluctuaciones de densidad extremas.

8.3.4. Importancia en la física moderna

Los agujeros negros son una encrucijada entre tres de los pilares fundamentales de la física moderna: la relatividad general, la termodinámica y la mecánica cuántica. Estas entidades cósmicas proporcionan un laboratorio natural donde los efectos de la gravedad extrema, las altas temperaturas y las interacciones cuánticas se hacen más evidentes. Son clave en el estudio de la gravedad cuántica, una disciplina que busca unificar la relatividad general con la mecánica cuántica, dos teorías que describen fenómenos en escalas muy diferentes pero que, hasta ahora, no han sido reconciliadas completamente.

Uno de los problemas más fascinantes que plantea el estudio de los agujeros negros es la *paradoja de la información*. Esta paradoja surge del hecho de que, según la relatividad general, cualquier cosa que cruce el horizonte de eventos de un agujero negro, incluyendo información, no puede salir. Sin embargo, la mecánica cuántica estipula que la información no puede perderse, lo que genera un conflicto fundamental entre estas dos teorías. La resolución de esta paradoja es uno de los desafíos más importantes de la física moderna y se encuentra en el centro de los estudios sobre la gravedad cuántica.

A través de los agujeros negros, los científicos también han podido explorar conceptos profundos de la termodinámica, como la entropía y la temperatura. En 1974, el físico *Stephen Hawking* propuso que los agujeros negros no son completamente negros, sino que emiten radiación debido a efectos cuánticos cerca del horizonte de eventos, un fenómeno conocido como la *radiación de Hawking* [**?**]. Este descubrimiento unió la relatividad general con la mecánica cuántica y abrió nuevas posibilidades para entender la termodinámica de los agujeros negros, llevando a la formulación de una **termodinámica de agujeros negros** en la que los agujeros negros tienen una temperatura y una entropía asociada, lo que implica que tienen una vida finita, aunque extremadamente larga.

Además de estos desarrollos teóricos, los agujeros negros también han tenido un papel crucial en la física observacional. En los últimos años, la detección de ondas gravitacionales por los detectores LIGO y Virgo ha confirmado la existencia de agujeros negros binarios y ha proporcionado un nuevo método para estudiar el universo. Las ondas gravitacionales detectadas corresponden a colisiones de agujeros negros, un fenómeno que no podría explicarse sin la relatividad general. Estas detecciones han sido una de las confirmaciones más directas de la existencia de agujeros negros y han permitido a los astrofísicos obtener información sobre sus propiedades con una precisión sin precedentes [7].

Otro hito importante en la historia de los agujeros negros fue la captura en 2019 de la primera imagen directa del *photon ring* que representa la sombra del agujero negro. Este logro histórico fue posible gracias al telescopio Event Horizon Telescope (EHT), que utilizó una red de radiotelescopios distribuidos globalmente para capturar la imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87. La imagen proporcionó la primera evidencia visual directa de un agujero negro y su horizonte de eventos, confirmando muchas de las predicciones teóricas de la relatividad general [8].

Estudiar los agujeros negros no solo nos permite explorar los confines del universo, sino también los fundamentos más profundos de la realidad física misma. La manera en que los agujeros negros interactúan con la materia, la energía y el espacio-tiempo nos desafía a revisar nuestras concepciones más fundamentales de la naturaleza, y abre nuevas fronteras para la física teórica y experimental.

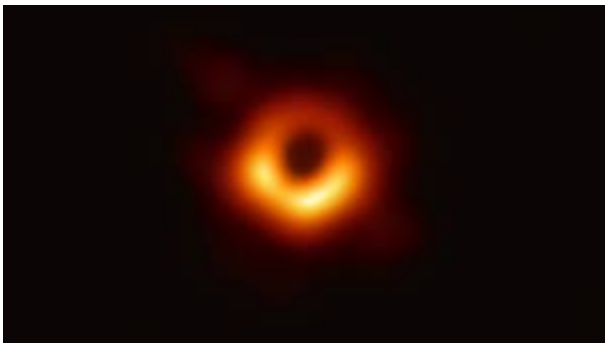


Figura 9: Fotografía de la sombra del primer agujero negro en 2019 .[24]

En las siguientes secciones, estudiaremos en un principio la solución de Schwarzschild y luego estudiaremos la solución de Kerr para trabajar con agujeros negros rotantes sin carga eléctrica.

8.3.5. Definiciones formales

Definición 8.1. *Una curva causal en un espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ es una curva cuya tangente en cada punto es un vector causal, es decir, de tipo tiempo o nulo (luz). Por lo tanto, nunca es de tipo espacio.*

Definición 8.2. *Un espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ es tiempo-orientable si existe un campo vectorial continuo V^μ definido en todo M, tal que en cada punto V^μ es de tipo tiempo. Este campo permite distinguir de manera consistente una dirección temporal futura en todo el espacio-tiempo.*

Definición 8.3. *Sea $(M, g_{\mu\nu})$ un espacio-tiempo tiempo-orientable. El futuro causal de un punto $p \in M$, denotado por $J^+(p)$, es el conjunto de todos los puntos $q \in M$ tales que existe una curva causal futura que conecta p con q:*

$$J^+(p) \equiv \{q \in M \mid \exists \text{ una curva causal dirigida al futuro desde } p \text{ hasta } q\}.$$

Definición 8.4. *Análogamente, el pasado causal de un punto $p \in M$, denotado por $J^-(p)$, es el conjunto de todos los puntos $q \in M$ desde los cuales existe una curva causal futura (es decir, dirigida hacia adelante en el tiempo) que termina en p:*

$$J^-(p) \equiv \{q \in M \mid \exists \text{ una curva causal dirigida al futuro desde } q \text{ hasta } p\}.$$

Definición 8.5. *Sea $(M, g_{\mu\nu})$ un espacio-tiempo asintóticamente plano. El futuro nulo infinito, denotado por $\mathcal{I}^+$, es la parte de la frontera conforme del espacio-tiempo que representa los puntos-límite a los que llegan las **geodésicas nulas futuras** (rayos de luz) que escapan al infinito.*

Definición 8.6. *El pasado nulo infinito, denotado por $\mathcal{I}^-$, es la parte de la frontera conforme del espacio-tiempo que representa los puntos-límite desde los cuales provienen las geodésicas nulas pasadas, es decir, los rayos de luz que llegan desde el infinito en el pasado.*

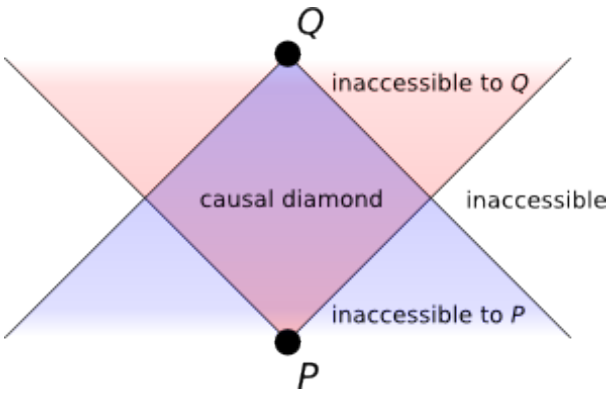


Figura 10:
Conos de luz mostrando regiones de tipo tiempo, tipo espacio y tipo luz.

Definición 8.7. *Consideremos un espacio-tiempo donde todas las geodésicas nulas (trayectorias tipo luz) comienzan en una región $\mathcal{I}^-$ y terminan en $\mathcal{I}^+$. Entonces, un espacio tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ se dice que contiene un **agujero negro** si M no está contenido en $J^-(\mathcal{I}^+)$. Es decir, existe una región donde las geodésicas no nulas pueden alcanzar el futuro asintóticamente plano del espacio-tiempo o bien, que existe una región de M que está causalmente desconectado del futuro global.*

$$B = M - J^-(\mathcal{I}^+) \neq 0.$$

Donde B es la región del agujero negro y

$$H = J^-(\mathcal{I}^+) \cap M,$$

es el horizonte de eventos

Un hecho interesante de esta definición es que no está limitada a la gravedad de Einstein y puede aplicarse siempre y cuando esté definido $J^-(\mathcal{I}^+)$.

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo que puede describirse mediante una métrica particular, como la de Schwarzschild o Kerr. Lo peculiar de esta región es que su interior está causalmente desconectada del exterior: ningún evento que ocurra dentro del agujero puede influir en la región fuera de él. El horizonte de eventos es la superficie límite que separa esta región del resto del espacio-tiempo; más allá de este horizonte, ninguna señal ni partícula puede escapar. Dentro del agujero negro, los eventos están causalmente determinados por eventos pasados, pero estos no pueden afectar al exterior.

9. Agujero negro de Schwarzschild

En este capítulo nos centraremos en las características principales que tienen los agujeros negros de Schwarzschild. Como vimos en el capítulo de relatividad general, la métrica de Schwarzschild adopta la forma:

$$ds^2 = c^2(1 - \frac{2GM}{c^2 r})dt^2 - (1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

Introducimos el *radio de Schwarzschild* para poder escribir la métrica de forma más compacta:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \tag{9.1}$$

con lo cual la métrica se reescribe como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{9.2}$$

9.1. Análisis de las singularidades

Observamos que los coeficientes métricos presentan comportamientos especiales para dos valores de r:

- En $r = r_s$, tenemos $g_{tt} \to 0$ y $g_{rr} \to \infty$.
- En $r = 0$, tenemos que $g_{tt} \to \infty$ y las demás tienden a cero.

Para discernir si se trata de verdaderas singularidades físicas o consecuencias de la elección del sistema de coordenadas, analizamos los invariantes del tensor de curvatura.

9.1.1. Singularidad física en $r = 0$

Definimos el *escalar de Kretschmann* como

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{c^4 r^6}. \tag{9.3}$$

Y en el límite

$$lim_{r\to 0}\frac{48G^2M^2}{c^4 r^6} = \infty.$$

Este invariante diverge cuando $r \to 0$, lo cual confirma que en $r = 0$ existe una **singularidad física** del espacio-tiempo.

9.1.2. Singularidad de coordenadas en $r = r_s$

En $r = r_s$, el escalar de Kretschmann permanece finito:

$$K(r_s) = \frac{3c^8}{4G^2M^2}. \tag{9.4}$$

Como se explicó anteriormente, el **horizonte de eventos** es una superficie de tipo nulo que actúa como una frontera causal: ningún evento ocurrido dentro de esta región puede influir en eventos del exterior. Para la solución de Schwarzschild, se localiza en:

$$r = r_s = \frac{2GM}{c^2}. \tag{9.5}$$

Con este análisis, vemos que el escalar de Kretschmann es manifestantemente regular para $r = r_s$ y que únicamente diverge cuando $r \to 0$. Como dijimos, en $r = 0$ existe una singularidad intrínseca del propio espacio-tiempo y ninguna elección alternativa de coordenadas puede hacerla desaparecer, tratandose así de una singularidad física donde la curvatura es infinita. No podemos asegurar lo mismo para $r = r_s$ por lo que, una alternativa, es buscar un nuevo sistema coordenado que nos permita deshacernos el comportamiento divergente que presentan las coordenadas esféricas en la métrica de Schwarzschild cuando $r = r_s$. Para esto, introduciremos las coordenadas de **Kruskal-Szekeres**.

9.2. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Vimos anteriormente que la solución de Schwarzschild se debería comportar bien cuando $r = r_s$ y que, para estudiar más allá de la singularidad que tenemos en ese sistema coordenado, debemos realizar una transformación de coordenadas a un sistema que resulte más conveniente. La carta que hemos planteado fue la adecuada para trabajar en la región de campo débil pero cuando queremos explorar el horizonte de eventos no tenemos un buen comportamiento. Si nos paramos sobre el radio de Schwarzschild, las únicas partículas que pueden existir sobre esa superficie son partículas tipo luz.

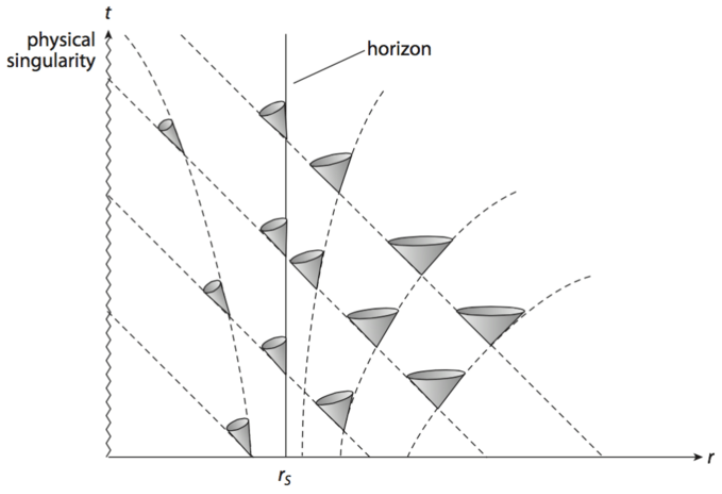


Figura 11: Comportamiento de conos de luz que atraviesan la singularidad

En 1960 Kruskal y Szekeres propusieron una carta libre de esos problemas. El cambio de coordenadas afecta a t y a r exclusivamente sin afectar a las coordenadas angulares.

El objetivo es que las nuevas coordenadas u, v permitan escribir el sector $t - r$ de la geometría en una forma conformemente plana. El cambio de coordenadas es:

Si $r > r_s$

$$u = \frac{r_s}{2}|\frac{r}{r_s} - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \frac{ct}{2r_s},$$
$$v = \frac{r_s}{2}|\frac{r}{r_s} - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \frac{ct}{2r_s},$$

Si $r < r_s$:

$$u = \frac{r_s}{2}|\frac{r}{r_s} - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \frac{ct}{2r_s},$$
$$v = \frac{r_s}{2}|\frac{r}{r_s} - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \frac{ct}{2r_s},$$

La transformación de coordenadas es singular en el radio de Schwarzschild. Para entender las nuevas coordenadas, veremos cómo se ven las lineas coordenadas para $t = cte$ y $r = cte$ en el plano (v, u).

$$u^2 - v^2 = (\frac{r_s}{2}|\frac{r}{r_s} - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \frac{ct}{2r_s})^2 - (\frac{r_s}{2}|\frac{r}{r_s} - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \frac{ct}{2r_s})^2,$$

$$u^2 - v^2 = (\frac{r_s}{2})^2(|\frac{r}{r_s} - 1|e^{\frac{r}{r_s}}[\sinh^2 \frac{ct}{2r_s} - \cosh^2 \frac{ct}{2r_s}],$$

$$u^2 - v^2 = \frac{r_s^2}{4}|\frac{r}{r_s} - 1|e^{\frac{r}{r_s}}.$$

Las lineas $r = cte$ son hipérbolas en el plano (u, v) y el horizonte de eventos corresponde a las asíntotas de la hipérbola en $r = r_s$.

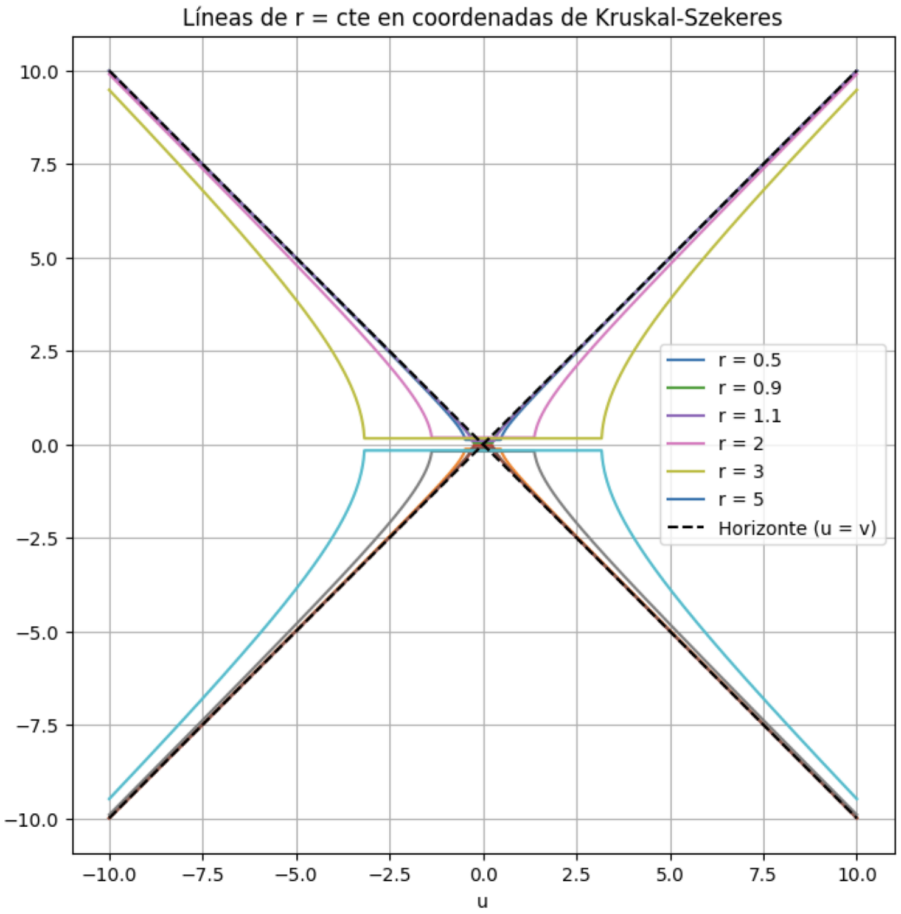


Figura 12: Gráfica de r constante

A partir de las expresiones de cambio de coordenadas para $r > r_s$:

$$u = \frac{r_s}{2}\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right).$$

$$v = \frac{r_s}{2}\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right).$$

Podemos obtener una relación entre u y v para $t = \text{cte}$ dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{v}{u} = \frac{\sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right)}{\cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right)} = \tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right).$$

$$\Rightarrow \quad v = u \cdot \tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right).$$

Este resultado describe una familia de líneas rectas en el plano (u, v) que pasan por el origen con pendiente determinada por el valor de t. En el límite $t \to \infty$, la pendiente se aproxima a 1, es decir, a la línea $u = v$, correspondiente al horizonte de eventos. Análogamente, para $t \to -\infty$, se tiene $v = -u$, correspondiente a la otra rama del horizonte.

Podemos escribir el intervalo en función de las coordenadas de Kruskal-Szekeres:

$$ds^2 = -\frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} (d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{9.6}$$

Donde:

$$\tilde{t} = \begin{cases} \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right), & \text{si } r > r_s, \\ \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right), & \text{si } r < r_s. \end{cases}$$

$$\tilde{r} = \begin{cases} \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right), & \text{si } r > r_s, \\ \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right), & \text{si } r < r_s. \end{cases}$$

La solución de Schwazschild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres incluye también un agujero blanco y un universo paralelo, los cuales no están presentes en el espacio-tiempo de Schwarzschild con las coordenadas de Schwarzschild que tomamos al principio. Este tema no se abordará en este trabajo.

Acá podemos ver el comportamiento que tiene el espacio-tiempo tanto antes de cruzar la singularidad $r > r_s$ como para radios $r < r_s$

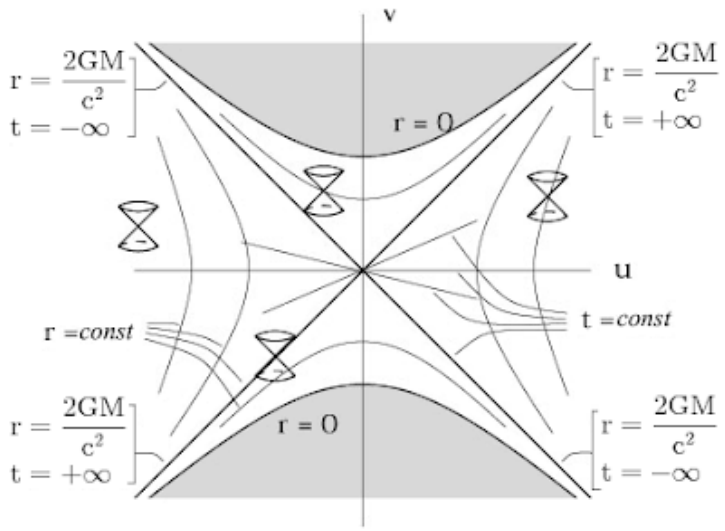


Figura 13: Diagrama del espacio-tiempo en un agujero negro de Schwarzschild bajo la métrica de Kruskal-Szekeres.

Vemos que bajo esta transformación de coordenadas podemos entender el comportamiento de los conos de luz al atravesar $r = r_s$ y vemos que estos van rotando apuntando en la dirección de r. Entendemos porque una vez atravesado este punto, ni siquiera la luz puede escapar del agujero negro.

9.3. Conservación de la energía y el momento angular

Queremos estudiar que magnitudes se conservan para, posteriormente hacer un análisis del potencial efectivo, la estabilidad de las soluciones y luego estudiar el movimiento de

una partícula de prueba alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. Como ya vimos, el lagrangiano es

$$L = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}.$$

Si utilizamos la métrica de Schwarzschild con $f(r) = 1 - r_s/r$ y $g(r) = f(r)^{-1}$ entonces

$$L = -m\sqrt{f\dot{t}^2 - f^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}.$$

Para simplificar las operaciones y, sin perdida de generalidad usaremos la acción afín y estudiaremos el movimiento de la partícula en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) por lo que nuestro lagrangiano adopta la siguiente forma [9]

$$L = \frac{1}{2}m(-fc^2\dot{t}^2 + g\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \tag{9.7}$$

9.3.1. Conservación de la Energía

Aplicando las ecuaciónes de Euler-Lagrange sobre t, veremos que el resultado es independiente del tiempo por lo que la energía del sistema se conserva.

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$
$$\frac{d}{d\lambda}(-mc^2 f\dot{t}) = 0.$$

Si tratamos un cuerpo de masa unitaria

$$\frac{d}{d\lambda}(-c^2 f(r)\dot{t}) = cte.$$

$$\dot{t} = \frac{E}{c^2 f(r)}. \tag{9.8}$$

Vemos que el momento conjugado

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -c^2 f(r)\dot{t},$$

$$p_t = -\frac{E}{c} = -cf\dot{t}. \tag{9.9}$$

9.3.2. Conservación del momento angular

Vemos también que el lagrangiano no depende de la coordenada ϕ por lo que el momento angular en esa dirección (L_z) se conserva.

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$

[9] Lo más común es adoptar la notación de $\dot{}$ como derivada de una variable con respecto al tiempo coordenado, pero también podemos derivar respecto al tiempo propio τ o respecto a un parámetro afín λ.

$$\frac{d}{d\lambda}(r^2\dot{\phi}) = cte = L_z,$$

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{r^2}. \tag{9.10}$$

9.3.3. Potencial efectivo

En el contexto de dinámica orbital, el potencial efectivo es una herramienta que nos permite analizar órbitas estables e inestables alrededor de un cuerpo central. Este objeto puede ser un planeta (como en mecánica clásica) o un agujero negro. También nos permite estudiar las trayectorias de luz, determinar órbitas circulares estables e inestables y analizar cuando una partícula cae hacia el horizonte de eventos. Esta herramienta nos será útil para poder simplificar nuestro problema y estudiarlo de forma gráfica.

Considerando las ecuaciones de conservación previas:

$$-fc^2(\frac{E}{c^2 f})^2 + g\dot{r}^2 + r^2(\frac{L_z}{r^2})^2 = -kc^2,$$

$$g\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{r^2} - \frac{E^2}{c^2 f} = -kc^2.$$

Multiplicando por $\frac{f}{2}$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + (1 - \frac{r_s}{r})\frac{L_z^2}{2r^2} - \frac{E^2}{2c^2} = -\frac{1}{2}(1 - \frac{r_s}{r})kc^2.$$

Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{E^2 - kc^4}{2c^2} - V_{eff}. \tag{9.11}$$

Donde

$$V_{eff} = -k\frac{G_N M}{r} + \frac{L_z^2}{2r^2} - \frac{G_N M L_z^2}{c^2 r^3},$$

para partículas masivas nos queda

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{E^2 - c^4}{2c^2} - V_{eff},$$

con

$$V_{eff} = -\frac{G_N M}{r} + \frac{L_z^2}{2r^2} - \frac{G_N M L_z^2}{c^2 r^3}.$$

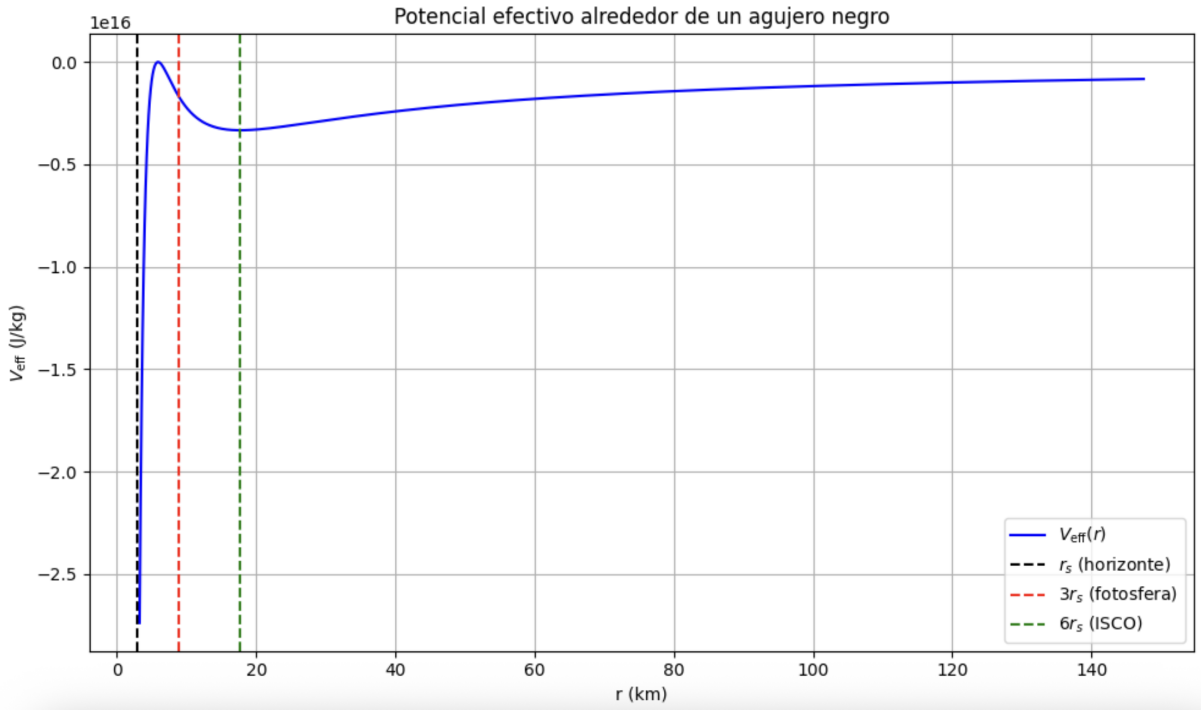


Figura 14: Potencial efectivo para una partícula masiva en función del radio.

El V_{eff} graficado nos indica el potencial percibido por una partícula con masa que órbita un agujero negro de Schwarzschild. Podemos ver al potencial efectivo como una combinación de tres efectos:

$$V_{eff} = V_N + V_L + V_R,$$

donde V_N es el potencial Newtoniano clásico, V_L es el potencial centrífugo (debido al momento angular del cuerpo que órbita) y V_R es el potencial relativista inducido por la métrica de Schwarzschild. Como vemos, la corrección relativista resulta ser un potencial atractivo, cualquier partícula masiva o de prueba caerá más fácilmente al agujero negro.

Un mínimo en este gráfico se corresponde a una órbita circular estable mientras que un máximo corresponde a una órbita circular inestable. Cualquiera sea la perturbación en estas órbitas, el objeto caerá hacia el agujero negro.

Vemos que a medida que nos acercamos a radios más pequeños $r \to 0$, el potencial cae rápidamente. Esto indica que nada puede resistir la atracción; efectivo que vemos cuando nos acercamos al horizonte de eventos.

9.4. Movimiento en la métrica

Como se ha discutido anteriormente, la relatividad general describe las órbitas en el espacio-tiempo no como el resultado de fuerzas externas, sino como trayectorias determinadas por la curvatura del espacio-tiempo, conocidas como geodésicas. Cualquier objeto que se desplace a lo largo de una geodésica seguirá esta curvatura, lo que da lugar a una fuerza gravitacional aparente que obliga al objeto a mantener una órbita.

La noción de curvatura del espacio-tiempo es conceptualmente compleja, en gran parte porque escapa a nuestra capacidad intuitiva de imaginar o visualizar tal fenómeno en términos cotidianos.

En esta sección, analizaremos el comportamiento de partículas de prueba en una métrica dada. Para ello, partiremos de la ecuación geodésica, utilizando como parámetro afín el tiempo propio.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0.$$

Consideramos la métrica de Schwarzschild en el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2,$$

tomamos $\mu = r$ y como ya vimos, los simbolos de Christoffel no nulos para la coordenada radial son:

$$\ddot{r} + \Gamma^r_{tt}\dot{t}^2 + \Gamma^r_{rr}\dot{r}^2 + \Gamma^r_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = 0.$$

Los símbolos de Christoffel relevantes son:

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{tt} &= \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right),\\
\Gamma^r_{rr} &= -\frac{GM}{c^2 r(r - 2GM/c^2)},\\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -r\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{t} &= \frac{E}{c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)},\\
\dot{\phi} &= \frac{L_z}{r^2}.
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{GME^2}{c^4r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + \frac{GM}{c^2 r(r - 2GM/c^2)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L_z^2}{r^3}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right).$$

Partimos del cambio de variable:

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}.$$

Y de la conservación del momento angular:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L_z}{r^2} = L_z u^2,$$

por la regla de la cadena, la derivada temporal de r es:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{d\tau} = \left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}\right)\cdot L_z u^2 = -L_z\frac{du}{d\phi}.$$

Luego, $\ddot{r}$ es

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = -L_z\frac{d}{d\tau}\left(\frac{du}{d\phi}\right) = -L_z\frac{d^2u}{d\phi^2}\cdot\frac{d\phi}{d\tau} = -L_z^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2},$$

la ecuación geodésica radial resulta

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{GME^2}{c^4r^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)} + \frac{L_z^2}{r^3}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right).$$

Usamos $r = 1/u$, y escribimos cada término en función de u:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{d\tau^2} &= -L_z^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2} \\
-\frac{GME^2}{c^4r^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)} &= -\frac{GME^2u^2}{c^4\left(1-\frac{2GMu}{c^2}\right)} \\
\frac{L_z^2}{r^3}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right) &= L_z^2u^3\left(1-\frac{2GMu}{c^2}\right).
\end{aligned}$$

Sustituimos todo en la ecuación:

$$-L_z^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2} = -\frac{GME^2u^2}{c^4\left(1-\frac{2GMu}{c^2}\right)} + L_z^2u^3\left(1-\frac{2GMu}{c^2}\right).$$

Multiplicamos por $-\frac{1}{L_z^2u^2}$ para despejar $\frac{d^2u}{d\phi^2}$:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{GME^2}{c^4L_z^2\left(1-\frac{2GMu}{c^2}\right)} - u\left(1-\frac{2GMu}{c^2}\right).$$

Ahora usamos la expansión en campo débil:

$$E \approx c^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-\frac{2GMu}{c^2}} \approx 1+\frac{2GMu}{c^2},$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u}{d\phi^2} &= \frac{GM}{L_z^2}\left(1+\frac{2GMu}{c^2}\right) - u\left(1-\frac{2GMu}{c^2}\right), \\
\frac{d^2u}{d\phi^2} &= \frac{GM}{L_z^2} + \frac{2G^2M^2u}{c^2L_z^2} - u + \frac{2GMu^2}{c^2}, \\
\frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{GM}{L_z^2} + \left(\frac{2G^2M^2}{c^2L_z^2}u + \frac{2GM}{c^2}u^2\right).
\end{aligned}$$

El término dominante de la corrección relativista es el cuadrático en u, y se puede resumir como:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L_z^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2.} \tag{9.12}$$

Vemos que la diferencia clave entre la ecuación de la órbita relativista y la órbita Newtoniana clásica es el término $\frac{3GM}{c^2}u^2$. Este término es el responsable de la precesión del perihelio de mercurio, la existencia de órbitas inestables cerca del horizonte de eventos y la aparición de la fotosfera en $r = 3r_s$.

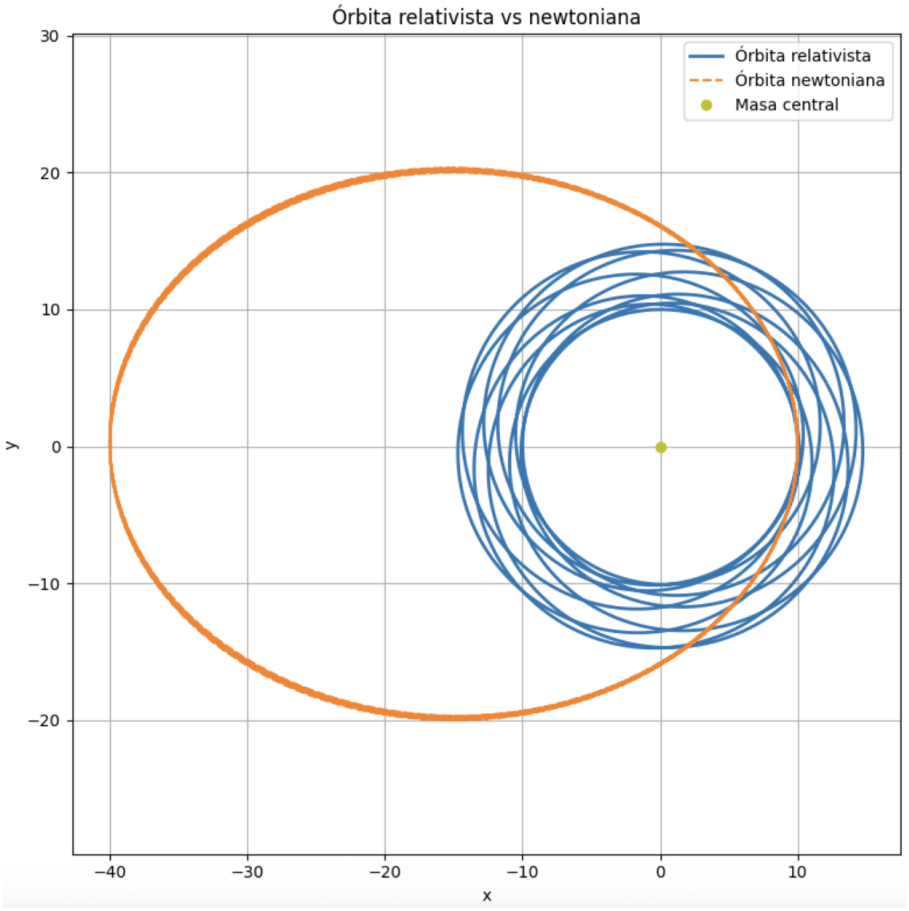


Figura 15: Diferencia entre órbitas newtonianas clásicas y relativistas.

Como vemos, el movimiento de una partícula de prueba es severamente afectado en presencia de un objeto muy masivo. La estructura del espacio-tiempo (inducida por la métrica) no se comporta igual que en el caso newtoniano o el minkowskiano. Las trayectorias circulares seguidas por nuestra partícula tienen comportamientos anomalos que el enfoque clásico no puede explicar. Si bien partimos de la ecuación geodésica, para simplificar los cálculos realizamos una aproximación en campo débil. Esto es válido para regiones exteriores al agujero negro ($\frac{2GM}{c^2 r} \ll 1$). En el apéndice se llega al mismo resultado a partir del lagrangiano.

9.5. Dilatación temporal y tiempo propio

La relación entre la coordenada temporal de la métrica (t) y el tiempo propio de observador (τ)

$$ds^2 = c^2(1 - \frac{2GM}{c^2 r})dt^2 - (1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

Como el observador se encuentra reposo respecto a si mismo $\implies dr = d\theta = d\phi = 0$.

$$ds^2 = c^2(1 - \frac{2GM}{c^2 r})dt^2 = (1 - \frac{r_s}{r})c^2 dt^2.$$

Recordando la equivalencia de tiempo propio mencionada en el capítulo de relatividad especial (5.26)

$$(-cd\tau)^2 = (1 - \frac{r_s}{r})c^2dt^2,$$
$$d\tau^2 = (1 - \frac{r_s}{r})dt^2,$$
$$d\tau = \sqrt{(1 - \frac{r_s}{r})}dt. \tag{9.13}$$

Un reloj en un campo gravitatorio más intenso (próximo a r_s) avanza más lento comparado con un reloj alejado del dicho campo. Es importante aclarar que, si una persona se acercara al horizonte de eventos de un agujero negro, no percibiría ningún cambio en el ritmo de su reloj; su tiempo propio seguiría fluyendo normalmente. Esta comparación de tiempos solo tiene sentido desde el punto de vista de un observador externo, que mide que el reloj cercano al agujero negro transcurre más lentamente debido a la dilatación temporal ocasionada por el campo gravitatorio. Analicemos en detalle la percepción temporal de un observador que está en el infinito respecto a uno que está muy próximo a nuestro agujero negro.

Partiendo de la ecuación de momento conjugado p_t (9.9)

$$dt = -\frac{E}{c^2 f}d\lambda = -\frac{E}{c^2 f}\frac{dr}{dr}d\lambda = -\frac{E}{c^2 f}\frac{dr}{\dot{r}}.$$

Como vimos, podemos expresar el potencial efectivo como

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{E^2 - kc^4}{2c^2} - V_{eff},$$

luego

$$\frac{1}{\dot{r}} = -\frac{c}{\sqrt{E^2 - kc^4 - 2V_{eff}^2}}$$

Si reemplazamos esa ecuación acá:

$$dt = -\frac{E}{c^2 f}\frac{dr}{\dot{r}},$$
$$dt = -\frac{1}{c}\frac{E}{1 - \frac{r_s}{r}}\frac{dr}{\sqrt{E^2 - c^4 + \frac{r_s c^4}{r}}}.$$

La cual describe el movimiento de una partícula con masa cayendo sobre un objeto masivo sin momento angular. Al integrar obtenemos el tiempo que le toma a la partícula, respecto a un observador distante, moverse entre r_1 y r_2 ($r_1 < r_2$)

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2} \frac{E}{1 - \frac{r_s}{r}}\frac{dr}{\sqrt{E^2 - c^4 + \frac{r_s c^4}{r}}}. \tag{9.14}$$

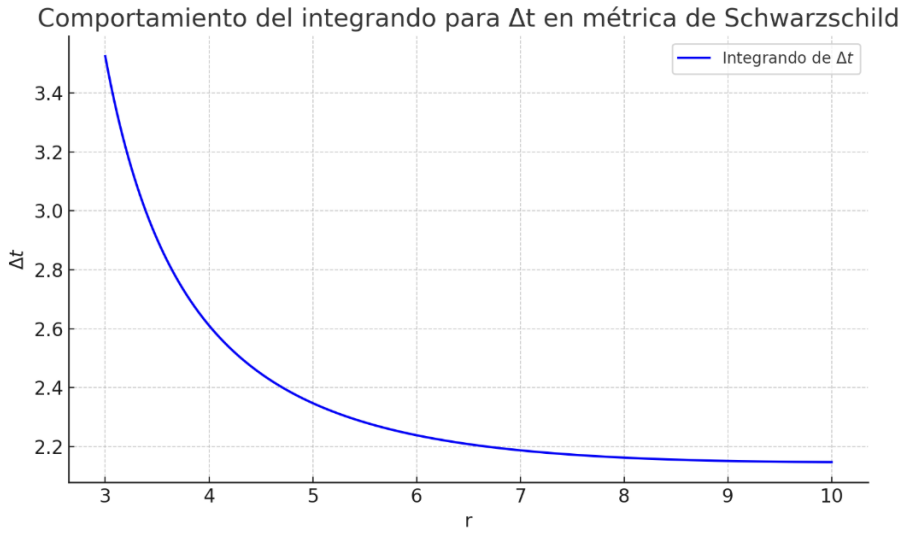


Figura 16: Tiempo relativo medido por un observador distante.

Como vemos, el tiempo medido por un observador que se encuentra infinitamente alejado de la partícula masiva que se mueve de un radio r_1 a uno r_2 crece exponencialmente. En particular cuando $r \to r_s$ el intervalo de tiempo Δt tiende a infinito. Es decir, a la partícula, para un observador distante le toma un tiempo infinito alcanzar la coordenada radial $r = r_s$.

Aunque esto sea lo que percibe un observador muy lejano, para el otro su realidad es completamente distinta. Su reloj propio no se ve alterado por el campo gravitacional.

9.6. Inversión de la coordenada espacial y temporal en coordenadas de Schwarzschild

Si partimos de la ecuación (9.2), la solución de Schwarzschild (en unidades geométricas $G = c = 1$) está dada por la métrica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2.$$

Obsérvese los factores delante de dt^2 y dr^2:

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \qquad g_{rr} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}.$$

- Para $r > 2M$ (región exterior) se tiene $1 - 2M/r > 0$, por lo que $g_{tt} > 0$ y $g_{rr} < 0$. En consecuencia la coordenada t es *temporal* y r es *espacial*.
- Para $r < 2M$ (interior del horizonte) se tiene $1 - 2M/r < 0$, de modo que $g_{tt} < 0$ y $g_{rr} > 0$. Es decir, las señales del signo cambian: ∂_t pasa a ser *espacial* y ∂_r pasa a ser *temporal*.

El cambio de signo en las componentes métricas de *Schwarzschild* implica que, dentro del horizonte, las direcciones que *aumentan* r y las que *aumentan* t ya no tienen la misma naturaleza que fuera del horizonte. Fuera de este, las trayectorias físicas tienen la libertad

de moverse a través de la coordenada radial, mientras que dentro de él, r se comporta como una coordenada temporal; toda partícula o señal avanza hacia valores decrecientes de r. Dentro del horizonte, no existe trayectoria causal que aumente la coordenada radial, el movimiento hacia la singularidad ($r = 0$) es inevitable como se vió en los diagramas de Penrose-Carter. Esto nos lleva a la conclusión que no existen observadores estáticos dentro del horizonte.

9.7. Diagramas de Penrose-Carter

Los diagramas de Penrose–Carter son representaciones bidimensionales del espacio-tiempo que permiten analizar su estructura global y causal. En estos diagramas, cada punto corresponde a una superficie esférica de dos dimensiones. Se construyen mediante una transformación conforme[10] que compactifica el espacio-tiempo infinito en una región finita y bidimensional. En estos diagramas el eje vertical será una coordenada temporal conforme (una combinación de T y R) mientrás que el eje horizontal será una coordenada espacial conforme.

9.7.1. Diagramas de Penrose-Carter para un agujero negro de Schwarzschild

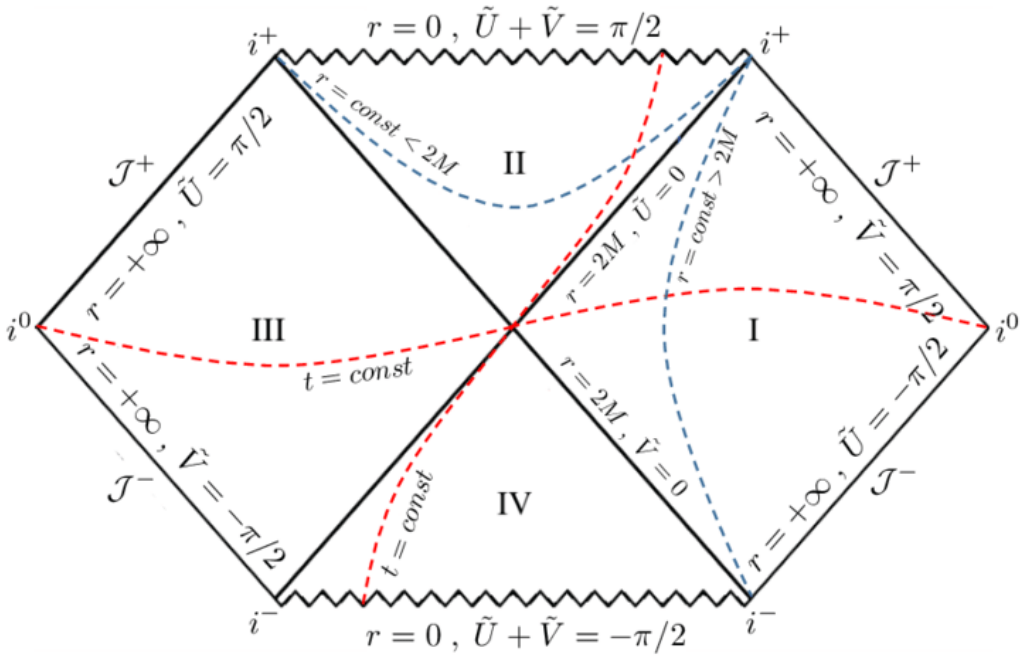


Figura 17: Diagrama de Penrose para la extensión máxima del espacio-tiempo de Schwarzschild (Kruskal Szekeres) [21]

La región **I** del diagrama de Penrose-Carter del agujero negro de Schwarzschild corresponde al exterior del agujero negro, es decir, a nuestro universo. Si un observador en esta región emite un rayo de luz en el presente, su cono de luz (representado con trayectorias nulas a 45° en el diagrama conforme) puede extenderse tanto hacia el agujero negro (región **II**) como hacia el futuro infinito nulo $\mathscr{I}^+$. La linea punteada celeste representa

[10] Al ser conforme, la transformación preserva los ángulos y, por ende, la estructura causal.

trayectorias tipo tiempo ($v < c$) mientras que las lineas punteadas color rojo representan trayectoria tipo espacio $v > c$.

En la región **II** del diagrama está representado el agujero negro de Schwarzschild. La frontera que separa la región **I** de la **II** es el horizonte de eventos que, en el caso de este agujero negro, se encuentra a una distancia $r = 2M/c^2$ o, en unidades naturales (como está en este diagrama) $r = 2M$. La línea dentada superior representa la *singularidad* del agujero negro de Schwarzschild (y es una curva tipo espacio). Toda partícula o rayo de luz que cruza el horizonte tiene un futuro inevitablemente dirigido hacia la singularidad $r = 0$.

La región **III** al igual que la región **IV** surgen de la extensión del espacio-tiempo de Schwarzschild. La región **III** corresponde a otro universo. La separación entre *I y III* está dada por una frontera causal tipo luz. Como vimos con la región I, cualquier rayo de la región III puede cruzar el horizonte de eventos o escapar hacia el futuro infinito $\mathscr{I}^+$ de su propia región. No existe comunicación causal entre región I y región III en el futuro. Ninguna geodésica nula o temporal puede ir de una a otra.

La región **IV** del diagrama corresponde al interior de un agujero blanco, que es la imagen temporal inversa de un agujero negro. Al igual que la región II surge de la extensión maximal del espacio-tiempo de Schwarzschild, pero con una diferencia fundamental: en la región II la singularidad ($r = 0$) está en el futuro, mientras que en la región IV la singularidad ($r = 0$) se encuentra en el pasado. Es decir, todas las geodésicas dentro de esta región emergen de la singularidad. Las líneas diagonales a 45° que separan la región IV de las regiones I y III corresponden a los horizontes pasados del agujero blanco, a través de los cuales las partículas y señales pueden salir hacia los universos exteriores. Sin embargo, ninguna partícula o señal puede entrar desde las regiones I o III hacia la región IV: esto está prohibido por la estructura causal del espacio-tiempo. La región IV actúa como una fuente de materia y radiación, mientras que la región II actúa como un sumidero. Desde la región IV, una partícula puede cruzar el horizonte y escapar hacia el infinito futuro $\mathscr{I}^+$ de la región I o de la región III. Aunque el agujero blanco forma parte de la solución matemática maximalmente extendida de Schwarzschild (simétrica en el tiempo), se considera que no es físicamente realista, ya que requeriría una singularidad en el pasado y es inestable ante pequeñas perturbaciones. En la práctica, cuando una estrella colapsa solo se forma la región II (agujero negro), pero no la región IV.

10. Agujero negro de Kerr

Un agujero negro de Kerr es un tipo de agujero negro en rotación, descrito por la métrica de Kerr en la relatividad general. A diferencia del agujero negro de Schwarzschild, que no tiene rotación, este posee momento angular $\vec{J}$, induciendo características geométricas y físicas adicionales en el espacio-tiempo.

Este tipo de agujero negro no es isótropo y está delimitado por dos regiones fundamentales: el horizonte de eventos y la ergosfera[11]. La ergosfera permite fenómenos energéticos únicos, como el proceso de Penrose, que no ocurren en agujeros negros no rotantes.

Una de las principales diferencias respecto al caso de Schwarzschild es la presencia de esta ergosfera, donde la luz puede escapar en determinadas condiciones, y los fotones

[11]La ergosfera es la región exterior inmediata al horizonte de eventos de un agujero negro en rotación. En ella, el campo gravitacional arrastra el espacio-tiempo, forzando a cualquier objeto a girar en la misma dirección que el agujero negro.

pueden adquirir grandes cantidades de energía debido a la rotación del espacio-tiempo. Debido a la conservación del momento angular, la geometría del espacio-tiempo se deforma en un elipsoide, dentro del cual se encuentra un único horizonte de eventos. En el centro, la singularidad adopta una forma anular, resultado directo de la rotación del agujero negro.

10.1. Formación

Un agujero negro de Kerr se forma por el colapso gravitacional de una estrella masiva en rotación o por el colapso de una colección de estrellas o gas con un momento angular total distinto de cero. Como la mayoría de las estrellas rotan, se espera que la mayor parte de los agujeros negros sean rotantes.

El agujero negro del que presentamos una fotografía en este trabajo, como dijimos, es un agujero negro supermasivo que se encuentra en el centro de la galaxia M87 y se trata de un agujero negro rotante.

10.2. Características geométricas

El espacio-tiempo de Kerr es una variedad pseudoriemanniana donde se verifican las ecuaciones de campo de Einstein cuya métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist está dada por [16, 20, 17]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1-\frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)c^2dt^2 - \frac{4aGMr\sin^2\theta}{c^3\Sigma}c\,dt\,d\phi \\ & + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma\,d\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2a^2GMr\sin^2\theta}{c^4\Sigma}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Donde

$$\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta,$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}.$$

- M representa la masa del objeto masivo en rotación
- a es la relación de rotación respecto a la masa J/M

Vemos que cuando $a = 0$

$$\Sigma = r^2,$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2},$$

por lo que la métrica recupera la forma de Schwarzschild cuando no hay rotación.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2.$$

Vemos que la métrica de Kerr es estacionaria ya que es independiente del tiempo y axisimétrica ya que no depende ϕ (coordenada azimutal).

Sin embargo, no es estática ya que tiene una componente cruzada $dtd\phi \neq 0$ por lo que la componente del tensor métrico $g_{t\phi} = g_{\phi t} \neq 0$. Esta mezcla entre tiempo y ángulo refleja el fenómeno de *frame dragging* característico de los agujeros negros en rotación (como veremos luego).

Hay dos análisis interesantes que pueden hacerse sobre las componentes de la métrica. Uno ocurre cuando $\Delta = 0$ y el otro análisis corresponde a cuando la coordenada temporal $g_{tt} = 0$ que sucede cuando $\frac{2GMr}{c^2\Sigma} = 1$. Para este caso, se define una superficie llamada *ergosfera* o superficie estática, que se encuentra fuera del horizonte de eventos. En esta región, ningún observador puede permanecer en reposo con respecto a un sistema de coordenadas estacionario, ya que la componente temporal se anula.

Singularidad bajo la condición de $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0 \implies r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 0$.

$$r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática

$$r_\pm = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2},$$

donde:

- r_+: corresponde al **horizonte de eventos**.
- r_-: corresponde al **horizonte de Cauchy**.

Para que existan horizontes reales, se requiere que el parámetro de rotación cumpla:

$$a \leq \frac{GM}{c}.$$

El caso límite $a = \frac{GM}{c}$ representa un **agujero negro extremal**, en el que ambos horizontes coinciden $r_+ = r_-$. Si $a > \frac{GM}{c}$, no existen soluciones reales para $\Delta = 0$, lo que implicaría la presencia de una **singularidad desnuda**, un objeto teóricamente posible pero prohibido por la *conjetura de censura cósmica*.

Las hipótesis de censura cósmica fuerte y débil son dos conjeturas sobre la estructura de las singularidades espaciotemporales que surgen en la relatividad general.

Las singularidades que aparecen en las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein permanecen típicamente ocultas al estar circundadas de un horizonte de sucesos y, por lo tanto, no pueden ser vistas desde el resto del espacio-tiempo. Las singularidades que no están ocultas se denominan "desnudas". La hipótesis de censura cósmica débil conjetura que no existen más singularidades desnudas en el universo aparte de la singularidad del Big Bang. No produndizaremos más sobre este tema ya que tiene muchísimas implicaciones en cosmología pero no deja de ser por demás interesante.

10.3. Frame dragging

Desde un análisis newtoniano, solo la masa del cuerpo es responsable de la fuerza gravitacional; es decir, su momento angular no tiene efectos gravitacionales. Sin embargo, en la gravedad de Einstein, el momento angular del cuerpo masivo altera la geometría del espacio-tiempo. Como vimos arriba, el *arrastre del marco de referencia* se refiere a la capacidad de un cuerpo masivo de *arrastrar* el espacio-tiempo a su alrededor.

Sea L_z el momento angular específico de una partícula de prueba, asociado a la simetría axial de la métrica de Kerr. Incluso si $L_z = 0$ (es decir, la partícula no tiene momento angular propio), su velocidad angular

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}},$$

puede ser distinta de cero debido al arrastre de marco ($g_{t\phi} \neq 0$). Es decir, el cuerpo rotante que genera el campo gravitacional induce un movimiento angular en la partícula, aunque ésta no tenga momento angular propio.

$$\Omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}. \tag{10.2}$$

En la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist tenemos

$$\Omega = \frac{2GMar}{c^2[(r^2 + a^2)\Sigma + 2Ma^2 r \sin^2\theta]}, \tag{10.3}$$

es decir, Ω es la velocidad angular del horizonte de eventos; representa la velocidad angular que cualquier partícula con $L_z = 0$ debería tener para mantenerse sobre el horizonte debido al *frame dragging*.

10.3.1. Ergosfera

Otra característica geométrica destacada del espacio-tiempo de Kerr surge al analizar el comportamiento de la componente temporal del tensor métrico g_{tt}. Esta componente determina la posibilidad de que un observador permanezca en reposo respecto al sistema de coordenadas. En particular, la condición $g_{tt} = 0$, define la llamada **superficie estática** y delimita el borde exterior de la ergosfera. Y de acá puede determinarse r_{erg} que será una función del ángulo.

$$1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2GMr}{c^2\Sigma} = 1.$$

Recordando que $\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta$, reemplazamos:

$$\frac{2GMr}{c^2\left(r^2 + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta\right)} = 1,$$

$$2GMr = c^2r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

$$c^2r^2 - 2GMr + a^2\cos^2\theta = 0,$$

Esta es una ecuación cuadrática en r, que resolvemos mediante la fórmula general:

$$r_{\text{erg}}(\theta) = \frac{2GM \pm \sqrt{(2GM)^2 - 4c^2a^2\cos^2\theta}}{2c^2},$$

simplificando:

$$r_{\text{erg}}(\theta) = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2\theta}.$$

Como estamos interesados en la solución física (la más externa), tomamos el signo positivo:

$$\boxed{r_{\text{erg}}(\theta) = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2\theta}.}$$

Esta superficie coincide con el horizonte de eventos únicamente en los polos ($\theta = 0$) y se expande hacia el exterior en el ecuador ($\theta = \pi/2$), donde:

$$r_{\text{erg}}(\pi/2) = \frac{2GM}{c^2}.$$

Dentro de esta región, ningún observador puede permanecer en reposo respecto al sistema de coordenadas inercial en el infinito, debido al arrastre del espacio-tiempo inducido por la rotación del agujero negro.

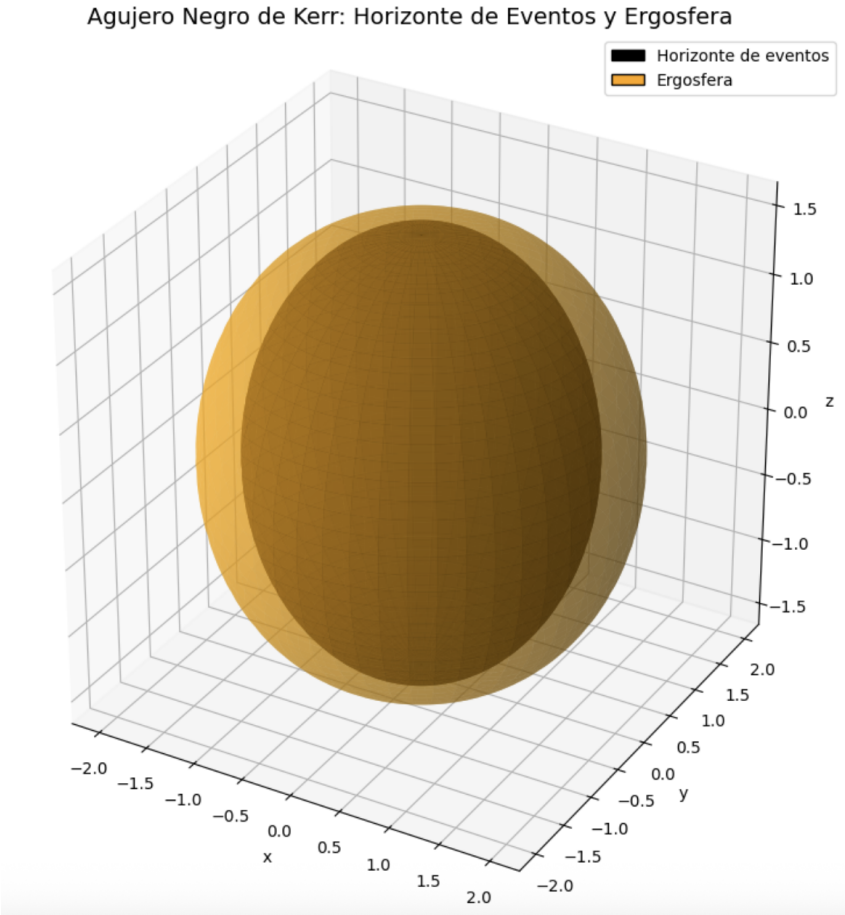


Figura 18: Vista en 3D del horizonte de eventos y ergosfera en un agujero negro de Kerr.

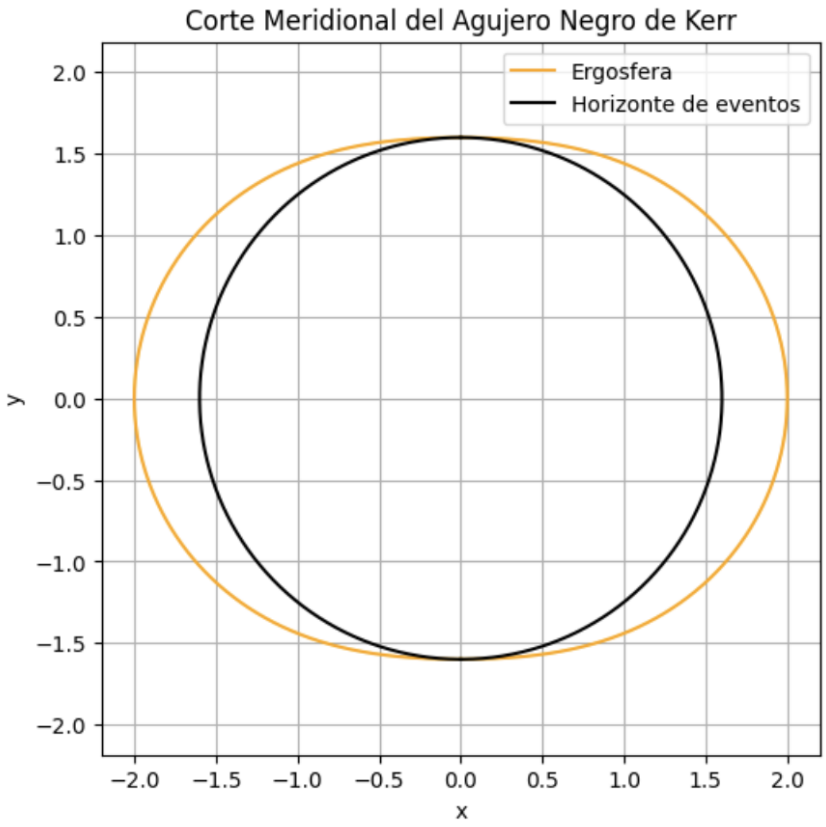


Figura 19: Puede apreciarse como la ergosfera coincide con el horizonte de eventos en los polos.

10.3.2. Propiedades físicas de la ergosfera

Como se mencionó anteriormente, la ergosfera es una región que existe en un agujero negro en rotación, ubicada justo entre su horizonte de eventos y la región exterior del espacio-tiempo (descrita por la métrica de Kerr). Su nombre proviene del griego antiguo *ergon*, que significa trabajo, ya que teóricamente es posible extraer energía y materia de esta región. La ergosfera intersecta con el horizonte de eventos en los polos del agujero negro.

En particular, un agujero negro con momento angular relativamente bajo tendrá una ergosfera con forma aproximada a una esferoide oblata. A medida que aumenta la rotación, la ergosfera se vuelve más achatada en la dirección ecuatorial.

En un agujero negro rotante, el espacio-tiempo se deforma en la dirección de la rotación a una velocidad que decrece con la distancia al horizonte de eventos. Este efecto se conoce como *arrastre de marco* o *frame-dragging*. Debido a este fenómeno, un objeto dentro de la ergosfera no puede permanecer en reposo con respecto a un observador en el infinito a menos que se mueva a una velocidad superior a la de la luz respecto al espacio-tiempo local, lo cual es físicamente imposible.

Esto ocurre porque las líneas de mundo de los observadores estáticos (de tipo tiempo) se vuelven de tipo espacio dentro de la ergosfera. Es decir, la componente temporal del tensor métrico g_{tt} se vuelve positiva, y no existen trayectorias estáticas que respeten la causalidad en esa región.

Como mencionamos, la métrica de Kerr tiene:

- Simetría temporal
- Simetría axial

En este contexto, el vector de Killing describe una dirección a lo largo de la cual el espacio-tiempo es simétrico. Por lo que la métrica de Kerr, admite dos vectores de Killing uno para la coordenada temporal $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ y otro para la coordenada angular $\eta^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Esto quiere decir que existe conservación de energía asociada al vector de Killing ∂_t y una conservación del momento angular asociada a ∂_ϕ

Un observador en reposo respecto a las coordenadas de Boyer-Lindquist tendría una cuatro-velocidad alineada con el vector temporal de Killing ∂_t, es decir:

$$u^\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0\right).$$

El intervalo propio que recorre este observador es:

$$ds^2 = g_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2.$$

Para que su trayectoria sea de tiempo tiempo es necesario que

$$ds^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad g_{tt} < 0.$$

Sin embargo, en la ergosfera, la componente g_{tt} se vuelve positiva:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2GMr}{c^2\Sigma} > 1.$$

Esto implica que $ds^2 > 0$, es decir, una trayectoria puramente temporal $dx^i = 0$ se vuelve de tipo espacial. Por lo tanto, no existen observadores que puedan mantenerse estáticos dentro de la ergosfera. Todos deben poseer algún componente de movimiento, forzados por la estructura del espacio-tiempo rotante. Este efecto es una manifestación directa del *frame-dragging* generado por el momento angular del agujero negro.

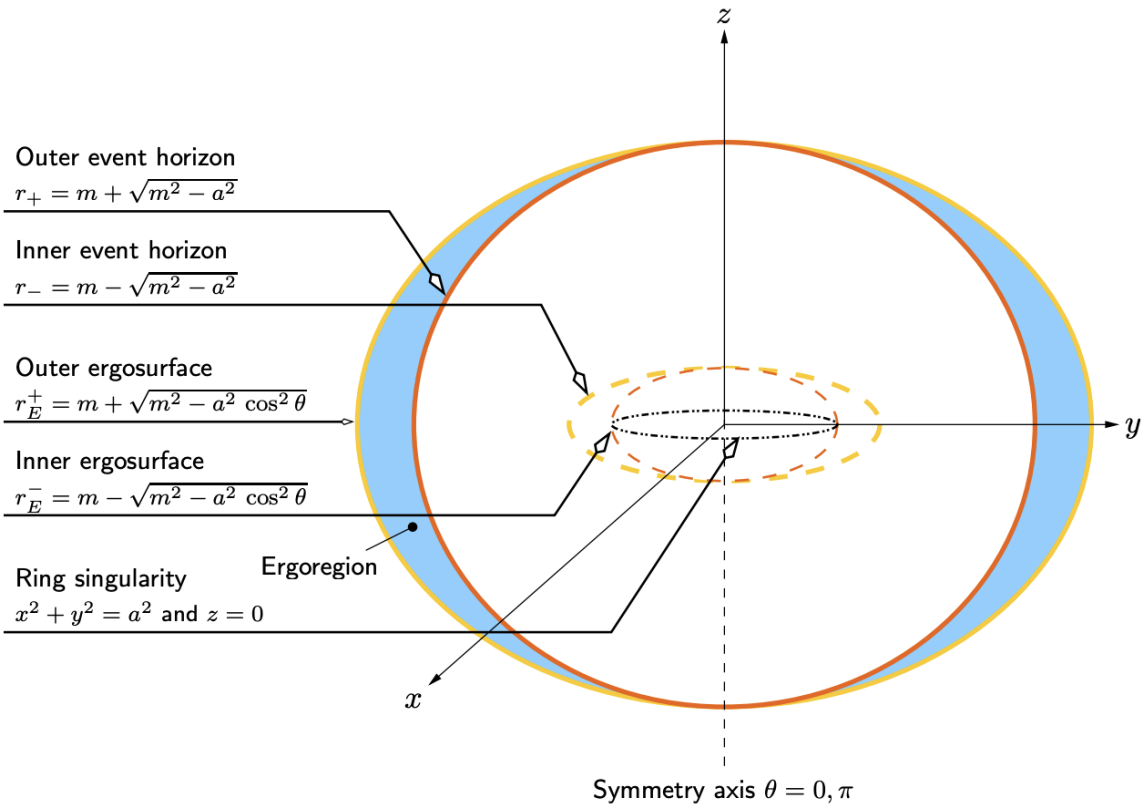


Figura 20: Ubicación esquemática de horizontes, ergosfera en el espacio-tiempo de Kerr en coordenadas de Boyer-Linquidst.[19]

10.4. Diagrama de Penrose-Carter para un agujero negro de Kerr

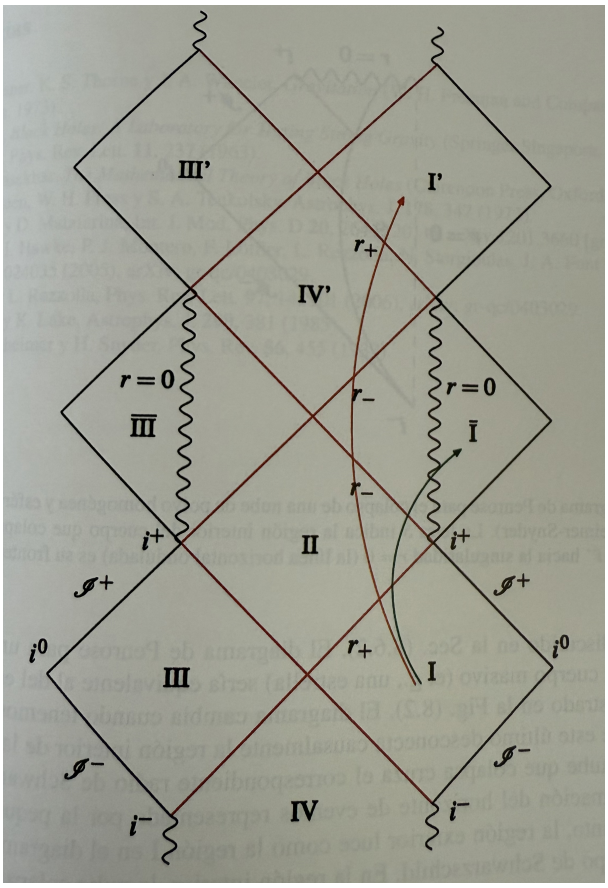


Figura 21: Diagrama de Penrose-Carter para la extensión máxima del espacio-tiempo de Kerr. [**?**]

El diagrama de *Penrose-Carter* de la solución de Kerr es mucho más complejo que el de *Schwarzschild* debido a la presencia del momento angular J. Bajo esta geometría aparecen **dos horizontes**: el horizonte exterior $r = r_+$ que actúa como horizonte de eventos (análogo a $r = 2M$ en Schwarzschild) y el horizonte interior $r = r_-$ (horizonte de Cauchy). Entre el infinito exterior y el horizonte exterior existe la **superficie límite estático**, una región donde el arrastre del espacio-tiempo producto de la rotación del agujero negro es tan intenso que ningún observador puede estar en reposo (como se vió cuando hablamos del frame-dragging). Esta zona, como mencionamos, es la *ergosfera*.

Una vez cruzado el horizonte exterior r_+, el comportamiento usual cambia. El horizonte interior marca el límite de la predictibilidad determinista del espacio-tiempo. La estructura de la métrica permite en esta extensión analítica máxima acercarse a la singularidad en forma de anillo ($r = 0; \theta = \pi/2$). Como dijimos, la singularidad en este escenario es tipo tiempo lo que hace posible que ciertas geodésicas la atraviesen y aparezcan en regiones con $r < 0$. Estas regiones corresponden, en este diagrama, a otros universos asintóticamente planos generando un conjunto infinito de regiones ($I, II, III, IV, I', II', etc$) cada una conectada mediante los diferentes horizontes; cabe aclarar que aunque matemáticamente consistente, esta extensión no se considera físicamente realista. El horizonte interior r_- es inestable y, pequeñas perturbaciones que caen dentro del agujero negro se amplificarían

enormemente produciendo una singularidad fuerte que destruye la estructura suave del espacio-tiempo. Es por esto que se cree que los agujeros negros rotantes (Kerr) no presentan esta estructura ideal y no permitirían acceso a otros universos ni la existencia de curvas temporales cerradas.

11. Conclusión

A lo largo de este trabajo se ha mostrado cómo la estructura del espacio-tiempo puede entenderse como una manifestación geométrica de la presencia de materia y energía. A partir de los fundamentos de la mecánica lagrangiana y la geometría diferencial, se construyó un marco riguroso que permite derivar las ecuaciones de campo de Einstein, donde la curvatura del espacio-tiempo —expresada mediante el tensor de Ricci y el tensor de Einstein— se encuentra directamente relacionada con el tensor energía-momento.

El análisis de las soluciones de Schwarzschild y Kerr permitió evidenciar de forma explícita la forma en que la masa y el momento angular modifican la métrica del espacio-tiempo. En el caso de Schwarzschild, la simetría esférica conduce a una métrica estática que exhibe una singularidad física en $r = 0$ y un horizonte de eventos en $r = r_s$, donde la métrica cambia de signo y el tiempo y el espacio intercambian su rol geométrico. En el caso de Kerr, la inclusión del momento angular produce un fenómeno adicional: el frame dragging, que introduce una región —la ergosfera— donde ningún observador puede permanecer en reposo respecto al infinito.

Desde una perspectiva física, ambas métricas representan las únicas soluciones de vacío asintóticamente planas que describen agujeros negros estacionarios, y su estudio ofrece una visión clara de cómo la gravedad relativista se aparta del paradigma newtoniano. En este contexto, la trayectoria de una partícula libre ya no depende de una "fuerza", sino del carácter geodésico de su movimiento sobre una variedad curva.

Desde un punto de vista conceptual, los agujeros negros constituyen uno de los mayores logros de la relatividad general: son regiones del espacio-tiempo donde la curvatura se vuelve tan intensa que los conceptos de causalidad, tiempo y observación adquieren nuevos significados. Representan, además, un punto de encuentro entre la física clásica, la relatividad y la mecánica cuántica, al plantear interrogantes sobre la conservación de la información, la termodinámica gravitacional y el destino último del espacio-tiempo.

Finalmente, el estudio de estas soluciones no solo tiene un valor teórico sino también observacional, dado que las recientes detecciones de ondas gravitacionales y la obtención de imágenes del horizonte de eventos mediante interferometría de muy larga base (EHT) confirman con notable precisión las predicciones de la relatividad general. Así, los agujeros negros, lejos de ser meras construcciones matemáticas, se consolidan como objetos reales y esenciales para comprender la estructura y evolución del universo.

Derivación de la ecuación de órbita en la métrica de Schwarzschild

Para una partícula de masa m moviéndose en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) en la métrica de Schwarzschild, la ecuación de normalización del cuadrivector es:

$$U^\mu U_\nu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -c^2$$

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2.$$

Utilizando la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Y restringiéndonos al plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$), se obtiene:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -c^2.$$

Dado que existen constantes del movimiento:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$
$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L_z}{r^2}.$$

Sustituyendo:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \left(\frac{E^2}{c^4 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2}\right) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L_z^2}{r^2} = -c^2,$$

simplificando:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(c^2 + \frac{L_z^2}{r^2}\right).$$

Ahora hacemos el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, con:

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}.$$

Entonces:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \cdot \frac{L_z}{r^2} = -L_z \frac{du}{d\phi},$$

por lo tanto

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = L_z^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2,$$

sustituyendo

$$L_z^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GMu}{c^2}\right)\left(c^2 + L_z^2 u^2\right).$$

desarrollando

$$= (E^2 - c^2) - L_z^2 u^2 + 2GMu + \frac{2GML_z^2 u^3}{c^2}$$

Dividiendo por L_z^2:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2 - c^2}{L_z^2} - u^2 + \frac{2GM}{L_z^2}u + \frac{2GM}{c^2}u^3.$$

Derivando respecto a ϕ:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L_z^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2.$$

Referencias

[1] Schutz, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press.

[2] Schwarzschild, K. (1916). On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*.

[3] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman.

[4] Laplace, P. S. (1796). *Exposition du système du monde*.

[5] Oppenheimer, J. R., & Snyder, H. (1939). On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56(5), 455.

[6] Penrose, R. (1965). Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, 14(3), 57.

[7] Abbott, B. P., et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6), 061102.

[8] Event Horizon Telescope Collaboration. (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1), L1.

[9] Carroll, S. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley.

[10] Ruffini, R., & Wheeler, J. A. (1971). Introducing the black hole. *Physics Today*, 24(1), 30–41.

[11] Bekenstein, J. D. (1973). Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8), 2333.

[12] Hawking, S. W. (1975). Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3), 199–220.

[13] C. Bambi, *Introducción a la relatividad general*, Springer, 2018.

[14] Á. Arboleya Megido, *Estudio de la evolución dinámica de estrellas de neutrones mediante simulaciones numéricas*, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Oviedo, 2022.

[15] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4ta edición, Pearson Education, 2013.

[16] Kerr, R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11(5), 237–238.

[17] Chandrasekhar, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press.

[18] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press.

[19] Visser, M. (2007). The Kerr spacetime: A brief introduction. In *The Kerr Spacetime: Rotating Black Holes in General Relativity*, edited by D. L. Wiltshire, M. Visser, & S. M. Scott. Cambridge University Press.

[20] Carter, B. (1968). Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 174(5), 1559–1571.

[21] Agujeros negros regulares con topologías exóticas `https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/0f05bc8c-7cf0-43c8-93dd-7fcc886113c1/content`

[22] Chandrasekhar, S. (1931). The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *The Astrophysical Journal*, **74**, 81–82.

[23] Michell, J. (1784). On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, etc. of the Fixed Stars. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **74**, 35–57.

[24] National Geographic (2022). Captan la primera imagen de un agujero negro masivo en el centro de la Vía Láctea. Disponible en: `https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/captan-primera-imagen-agujero-negro-masivo-centro-via-lactea_18244`