

UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

Facultad de Tecnología Informática



Carrera: Licenciatura en Matemática

“La fórmula de Black-Scholes: una forma tabular”

Autor: Antonio Aniello Avella

Director: Dr. Agustin Tomas Besteiro

Tesis Presentada para optar por el título de licenciado en matemática

- Diciembre 2021 -

A quien quiso,
siempre quiso,
fuertemente quiso.

Resumen:

En esta tesis se presenta una forma distinta y más sencilla para interpretar la fórmula de Black-Scholes en la evaluación del precio de una opción financiera tomando como base el artículo de (Arnold, Nixon, & Shockley, 2003).

Este escrito presenta de manera sintética, la deducción de la fórmula de Black-Scholes empezando por las definiciones de los conceptos básicos y concluye mostrando como se puede describir su comportamiento en forma tabular.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, diferencial estocástico, medida, integración, precio, opción.

Contenido

Resumen:	2
Introducción	5
Capítulo 1 Conocimientos preliminares	7
1.1. Parte económica y financiera	7
1.1.1. Leyes financieras	9
1.1.2. Régimen de capitalización simple	11
1.1.3. Régimen de capitalización compuesta.....	12
1.1.4. Régimen de capitalización instantánea (t continuo)	13
1.2. Conceptos básicos de las opciones clásicas	15
1.3. Parte estocástica	18
1.3.1. Procesos estocásticos	19
1.3.2. Integral estocástica de Itô	23
1.3.3. Diferenciales estocásticos y ecuaciones diferenciales estocásticas	26
1.3.4. Procesos geométricos.....	30
1.4. Parte determinística.....	31
Capítulo 2 El modelo de Black-Scholes	37
2.1. La ecuación de Black-Scholes	37
2.2. La fórmula de Black-Scholes.....	40
Capítulo 3 Reorganizando la fórmula de Black-Scholes.....	54
3.1 En camino a un abordaje tabular.....	54
3.1.1 Forma tabular de la fórmula de Black-Scholes.....	54
3.1.2 Evaluación del precio de una opción: un ejemplo	59
3.2 Las griegas	60
3.3 La volatilidad implícita	63
Capítulo 4 Conclusiones.....	65

Anexo.....	66
1.1 Determinación de la tabla para el <i>CSM</i>	66
2.1 Determinación de un gráfico 3D para el <i>CSM</i>	67
Bibliografía.....	68

Introducción

En este trabajo de tesis hablaremos de la fórmula de Black-Scholes usada para evaluar el precio de un tipo de instrumentos financieros: las opciones. En particular a partir de un artículo publicado por T. Arnold, T. Nixon, y R. Shockley, “Intuitive Black-Scholes Option Pricing with a Simple Table”, mostraremos como, en casos particulares, se puede reducir la complejidad de la formula y usarla de manera más inmediata para fines didácticos y/o profesionales. La idea de la tesis surgió después del afortunado encuentro que tuve en algunos cursos de matemática financiera con la teoría de los derivados financieros. Ahí me di cuenta del poder predictivo de la formula, de su complejidad y del enorme trabajo que esta atrás para deducirla y por el cual F. Black y M. Scholes consiguieron el premio Nobel en 1997. Siempre quise profundizar los argumentos matemáticos que sostienen la fórmula de Black-Scholes y que son objeto de estudio del último año de la carrera de Licenciatura en Matemática en la UAI. Así que este trabajo para mí fue sobre todo una ocasión para investigar en detalle la matemática que está detrás de la fórmula de Black-Scholes. Por otro lado, esta fórmula es una herramienta que se usa cotidianamente al día de hoy en ámbito profesional y didáctico en cursos de matemática financiera, por lo cual me pareció útil presentar la diferente mirada de Arnold-Nixon-Shockley para simplificar la utilización de la fórmula de Black-Scholes.

Empezaremos presentando algunas herramientas básicas de carácter financiero, estocástico y determinístico. A continuación, mostraremos como Black y Scholes obtuvieron la formula y concluiremos con la presentación de un método tabular para determinar el precio de una opción simplificando la fórmula de Black-Scholes.

A este propósito, una primera pregunta del lector podría ser “¿Qué es una opción?”.

En finanzas con el término opción nos referimos a un tipo particular de contrato que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación (por lo tanto, precisamente la "opción"), de comprar o vender el valor sobre el que se registra la opción, denominado activo subyacente (o simplemente subyacente), a un precio predeterminado (precio de ejercicio) en una fecha determinada, contra una prima, no recuperable, pagada. Las opciones pueden tener los subyacentes más diversos: acciones, materias primas, tasas de interés, etc.

La diferencia fundamental de las opciones frente a otros instrumentos derivados consiste en el derecho de desistimiento del comprador: no está obligado a comprar (o vender) el subyacente, pero puede hacerlo si ejerciendo la opción obtiene una ventaja económica efectiva. Por este motivo también se denominan valores derivados asimétricos.

Otra pregunta que el lector podría hacerse es: ¿Por qué debería comprar una opción?

Las opciones se utilizan ampliamente con fines especulativos o como cobertura financiera en inversiones de riesgo medio/alto: por ejemplo, un importador puede protegerse (al menos parcialmente) del riesgo de tipo de cambio a largo plazo

suscribiendo una opción sobre el precio de la mercancía objeto de la importación si la compra de la misma es lejana en el tiempo; esto le permite al importador mismo no comprar el activo o la moneda por adelantado e incluso no comprarlo en absoluto en caso de inconvenientes económicos al vencimiento de la opción, perdiendo así solo el costo inicial del contrato (prima) de la opción en sí y, por lo tanto, limitando cualquier pérdida importante.

De hecho, en el caso del comprador de opciones de compra, la máxima pérdida posible es la prima pagada, mientras que la ganancia es teóricamente ilimitada; por el contrario, en el caso del vendedor de opciones de compra, la ganancia máxima es la prima pagada por el comprador mientras que la posible pérdida es ilimitada.

Este trabajo de tesis está organizado en tres capítulos. En el primer capítulo introducimos algunos conceptos básicos que se necesitan para entender el modelo de Black-Scholes. En el segundo capítulo describimos el modelo de Black-Scholes, que es una ecuación diferencial en derivadas parciales, y deducimos la fórmula de Black-Scholes o sea la solución de la ecuación de Black-Scholes. En el tercer capítulo presentamos, sobre la base de un artículo (Arnold, Nixon, & Shockley, 2003), una manera simplificada de interpretar la fórmula y sus parámetros.

Capítulo 1

Conocimientos preliminares

En este primer capítulo recopilamos las principales nociones en las que se basa esta tesis. Primero presentaremos los conceptos principales de finanzas y economía que discutiremos en el curso de la tesis, luego las herramientas matemáticas que usaremos para nuestro estudio.

1.1. Parte económica y financiera

Comencemos por presentar algunos conceptos económicos y financieros.

Definición 1.1 *Un título financiero es un contrato entre dos contrapartes, el vendedor y el comprador, que establece para cada fecha futura y para cada situación financiera la cantidad (positiva o no) de una determinada mercancía, moneda o contrato financiero que el vendedor debe transferir al comprador. Se dicen títulos primarios aquellos contratos que establecen directamente transferencias de bienes o dinero. Los valores derivados son aquellos en los que la transferencia es regulada indirectamente, es decir, mediante la transferencia de otros contratos.*

Dos ejemplos de títulos primarios son bonos y acciones: títulos emitidos por empresas para financiarse. Las **obligaciones** (bonos) son títulos de **deuda**, es decir, el comprador se convierte en acreedor de la empresa que los emitió. El titular tiene derecho a la devolución del capital prestado al vencimiento y a los intereses en fechas fijas. Los bonos son valores de bajo riesgo y para ellos es posible establecer dos componentes de riesgo:

- El riesgo genérico, que depende de las fluctuaciones en el precio de mercado del título mismo y que varía con mayor o menor continuidad; por ejemplo, si se desea vender los bonos antes del vencimiento, se debe tener en cuenta el valor presente del título.
- El riesgo específico depende de las características particulares del emisor: por ejemplo, es posible que la empresa emisora no pueda pagar según lo establecido.

Definición 1.2 *Una obligación libre de riesgo es un contrato que asigna el derecho a percibir intereses y capital en los plazos establecidos, con iguales cantidades de reembolso en todas las posibles situaciones financieras relacionadas con la misma fecha.*

Por lo tanto, con una obligación libre de riesgo, el monto recibido en las fechas de vencimiento es la preestablecida, en cualquier situación financiera. Este es un caso puramente ideal.

Las **acciones** son títulos de capital, es decir, le dan al comprador los derechos patrimoniales de la empresa emisora, y el comprador se convierte en propietario de la empresa por la participación de las acciones compradas. Las acciones confieren el derecho al dividendo, si este se distribuye dentro de la empresa. Recordamos que el dividendo es la parte de las ganancias netas de una sociedad anónima que se distribuye anualmente entre los accionistas. Las acciones, a diferencia de los bonos, son inversiones riesgosas ya que el comprador participa en todo lo que le sucede a la empresa, es decir, el valor de la acción depende del éxito de la empresa. Si el valor de una obligación poco arriesgada se representa gráficamente en función del tiempo, se obtiene un gráfico bastante lineal con buena previsibilidad y bajo riesgo, por otro lado, si el valor de las acciones obtiene un gráfico muy irregular con poca previsibilidad y alto riesgo.

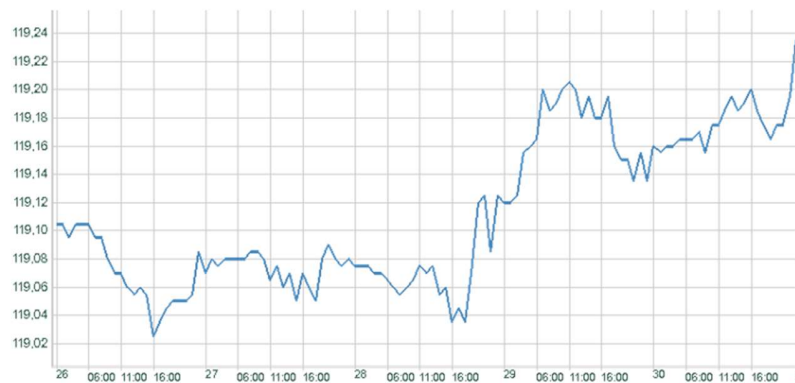


Ilustración 1.1: Evolución temporal de una obligación (1 semana)

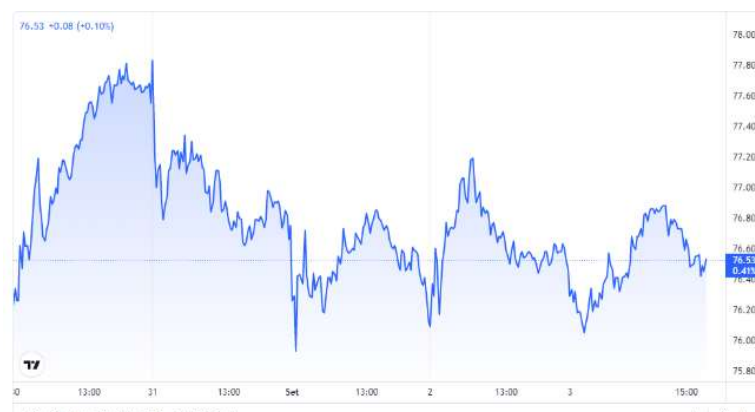


Ilustración 1.2 : Evolución temporal de una acción (1 semana)

En cuanto a los **títulos derivados**, su valor depende de otro activo financiero que toma el nombre de **subyacente**. Ejemplos de activos subyacentes son materias primas, acciones, obligaciones, pero también divisas, tipos de interés, etc. Nosotros a continuación trataremos con opciones.

1.1.1. Leyes financieras

En primer lugar, observamos que en el campo financiero hay una hipótesis de fondo: el uso de dinero durante un cierto período de tiempo o equivalentemente el traslado en el tiempo del dinero, tiene un precio o valor. Las operaciones financieras implican el uso de capital, denotamos por C el capital en la unidad monetaria. Llamaremos operador económico a una entidad física o jurídica, privada o pública, que se desempeña en el mercado de los capitales.

Supongamos que un operador económico $\mathcal{E}$ tiene un capital C al tiempo t .

Definición 1.3 *El par ordenado (C, t) se llama estado financiero.*

Sean ahora dos operadores económicos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ y supongamos que $\mathcal{E}_1$, que tiene a disposición el capital C_1 en el tiempo t_1 , considera igual encomendar su capital a $\mathcal{E}_2$, que en el tiempo $t_2 > t_1$ se compromete a devolver el capital C_2 . Entonces diremos que los pares (C_1, t_1) , (C_2, t_2) , son *indiferentes*. Por tanto, enunciamos la siguiente definición:

Definición 1.4 *Los pares (C_1, t_1) y (C_2, t_2) , se dice que son indiferentes y escribimos:*

$$(C_1, t_1) \approx (C_2, t_2)$$

si estamos dispuestos a intercambiarlos o si se pueden cambiar a la par.

Definición 1.5 *Considerando dos pares indiferentes (C_0, t_0) (C_t, t) se define ley financiera la función $\mathcal{L}(C_0, t, t_0)$, con $C_0, t, t_0 \in \mathbb{R}^+$ y $\mathcal{L}$ a valores en $\mathbb{R}^+$, tal que*

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0)$$

Si vale la relación

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0) = C_0 \cdot \mathcal{L}(1, t, t_0)$$

estamos considerando leyes homogéneas de grado 1 en C_0 y tenemos que:

- Si $t > t_0$, $\mathcal{L}(1, t, t_0) = m(t, t_0)$ se llama **ley de capitalización**;

- Si $t = t_0$, $\mathcal{L}(1, t, t_0) = 1$;
- Si $t < t_0$, $\mathcal{L}(1, t, t_0) = v(t, t_0)$ se llama **ley de descuento** o **de actualización**.

En el caso $t > t_0$

$$C_t = C_0 \cdot m(t, t_0)$$

se llama **monto**.

Por lo tanto, el monto es el valor del capital en un tiempo posterior al tiempo en el cual está disponible. En ese caso la diferencia

$$C_t - C_0$$

se llama **interés**.

Si se presta un capital por un período determinado, al vencimiento la cantidad devuelta es el monto, es decir, el capital inicial más los intereses.

En el caso donde $t < t_0$

$$C_t = C_0 \cdot v(t, t_0)$$

se llama **valor actual** o **valor presente**.

Así que el valor actual o valor presente es el valor de un capital en un tiempo anterior al tiempo en el cual está disponible. En ese caso la diferencia

$$C_t - C_0$$

se llama **descuento**.

Dada una ley de capitalización, es fácil determinar la correspondiente ley de descuento. De hecho, si $t' < t$, tendremos:

$$C_{t'} = C_t \cdot v(t', t)$$

pero vale también:

$$C_t = C_{t'} \cdot m(t, t') = C_t \cdot v(t', t) \cdot m(t, t')$$

por lo cual

$$v(t', t) = \frac{1}{m(t, t')}$$

Por lo tanto, si $t < t_0$, para la ley de capitalización m , tenemos la siguiente ley de descuento:

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)}. \quad (1.1)$$

En los contratos financieros deben establecerse algunas condiciones:

- **Tasa de interés unitaria r** , es decir, el interés producido en la unidad de tiempo de una unidad de capital, expresado como porcentaje;
- **Período de uso del capital**, es decir, la duración del contrato;
- **Período de capitalización (del interés)**, es decir, el tiempo después que el interés pasa a estar disponible, es decir, se convierte en capital;
- **Régimen de capitalización**, es decir, las reglas que rigen la operación.

En general, el período de capitalización es menor o igual al período de empleo del capital. Veamos algunos esquemas de capitalización.

1.1.2. Régimen de capitalización simple

Supongamos que el período de capitalización coincide con el período de uso del capital. El interés desde el tiempo t_0 al tiempo t ($t > t_0$) viene dado por

$$C_0 \cdot r \cdot (t - t_0)$$

es decir, el interés es proporcional al capital C_0 y al intervalo de tiempo $t - t_0$ por medio de una constante de proporcionalidad, la tasa de interés r . La correspondiente ley de capitalización resulta

$$m(t, t_0) = 1 + r \cdot (t - t_0)$$

y el monto es

$$C_t = C_0 \cdot [1 + r \cdot (t - t_0)] \quad (1.2)$$

También se puede determinar la ley de descuento relativa; teniendo en cuenta la (1.1), para $t < t_0$ tenemos

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)} = \frac{1}{1 + r \cdot (t - t_0)}$$

de donde resulta el capital descontado

$$C_t = \frac{C_0}{1 + r \cdot (t - t_0)}.$$

1.1.3. Régimen de capitalización compuesta

Supongamos que el período de capitalización es más corto que el período de empleo del capital y más precisamente

$$\frac{P_i}{P_c} = n$$

con

- P_i = período de uso del capital;
- P_c = período de capitalización;
- n = número natural .

Utilizando $P_c = 1$, resulta $P_i = n$.

Indicamos con C_n el capital después del período de empleo igual a n . Supongamos primero $n = 1$, entonces volvemos al régimen de capitalización simple y como se vio antes (ecuación 1.2), obtenemos

$$C_1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

siendo $t - t_0 = 1$.

Si suponemos que el período de empleo sea $n = 2$ y expresamos C_2 en términos primero de C_1 y luego de C_0 , obtenemos:

$$C_2 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

En el período n habrá un capital

$$C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n$$

Si el intervalo de tiempo es $t - t_0$ (n periodos), tenemos

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r)^{t-t_0} \quad (1.3)$$

por lo que la ley de capitalización resulta

$$m(t, t_0) = (1 + r)^{t-t_0}$$

El interés en el tiempo $t > t_0$ viene dado por

$$C_t - C_0 = C_0 \cdot [(1 + r)^{t-t_0} - 1]$$

Por la ley de descuento correspondiente con $t < t_0$ se llega a

$$v(t, t_0) = (1 + r)^{-(t_0-t)}$$

y el valor descontado de C_0 viene dado por

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r)^{-(t_0-t)}$$

La ley de capitalización compuesta también se llama ley de capitalización exponencial.

1.1.4. Régimen de capitalización instantánea (t continuo)

Consideremos un intervalo de tiempo $[t_0, t]$ que suponemos dividir en k intervalos de igual ancho $\Delta t = \frac{t-t_0}{k}$. Sea Δt el período de capitalización y r la tasa de interés unitaria. Bajo un régimen de capitalización compuesta (ecuación 1.3), en el momento t el monto será dado por

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r \cdot \Delta t)^k = C_0 \cdot \left(1 + r \cdot \frac{t - t_0}{k}\right)^k$$

En el régimen de capitalización instantánea, Δt tiende a cero o equivalentemente k a $+\infty$. Siendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + r \cdot \frac{t - t_0}{k}\right)^k = e^{r(t-t_0)}$$

en el régimen de capitalización instantánea la ley de capitalización es

$$m(t, t_0) = e^{r(t-t_0)}$$

el monto resulta

$$C_t = C_0 \cdot e^{r(t-t_0)}$$

y el interés es dado por

$$C_t - C_0 = C_0 \cdot [e^{r(t-t_0)} - 1]$$

En consecuencia, la ley de descuento para $t < t_0$ es

$$v(t, t_0) = e^{-r(t_0-t)}$$

para el cual el valor descontado de C_0 en el tiempo $t < t_0$ viene dado por

$$C_t = C_0 \cdot e^{-r(t_0-t)} \tag{1.4}$$

En el régimen de capitalización instantánea, los intereses crecen en cada instante y se acumulan a la capital. Este régimen, que tiene poca importancia práctica, es de gran relevancia teórica, como veremos a continuación.

1.2. Conceptos básicos de las opciones clásicas

Definición 1.6 *Las opciones son contratos derivados que atribuyen a un sujeto, previo pago de una contraprestación llamada prima (precio de las opciones), el derecho para comprar o vender ciertos activos a un precio fijo, llamado precio de ejercicio, a ser ejercido antes de la fecha de vencimiento o en la fecha de vencimiento, llamada fecha de ejercicio.*

Por lo tanto, dos partes están involucradas en el contrato:

- el **comprador (holder)** que pagando la prima adquiere el derecho a ejercer la opción al precio de ejercicio. Por tanto, adquiere un derecho sobre el activo subyacente sin ser sujeto a cualquier obligación;
- el **vendedor (writer)** que cede la opción a la contraparte. Su cargo implica una obligación y no un derecho.

Los activos subyacentes al contrato pueden estar representados por materias primas, instrumentos financieros como bonos del gobierno, acciones, índices bursátiles, tasas de interés, etc.

La principal clasificación de las opciones consiste en la diferenciación entre:

- **opciones de compra (call options)** que otorgan al titular el derecho a comprar a un precio predeterminado;
- **opciones de venta (put options)** que le dan al titular el derecho a vender a un precio predeterminado.

Desde el punto de vista del tiempo en el que se puede ejercer el derecho, es posible distinguir:

- **opciones europeas** si el derecho sólo puede ejercerse en la fecha de ejercicio;
- **opciones americanas** si el derecho se puede ejercer en cualquier tiempo dentro de la fecha de ejercicio.

Consideremos una opción de compra europea (call) que tiene T como fecha de ejercicio. Sea X el precio de ejercicio y $S(T)$ el precio del subyacente en la fecha T . Si $S(T) > X$, el comprador de la opción call debe ejercer la opción porque compra el activo subyacente al precio X que es más bajo que su precio de mercado y por lo tanto tiene una ganancia dada por $S(T) - X$. Obviamente, si $S(T) \leq X$, el comprador de una opción de compra no ejerce la opción y tiene una pérdida igual a la prima pagada al firmar el contrato. Si, por otro lado, la opción es una opción de venta (put), el comprador debe ejercer la opción si $S(T) < X$ porque vende el activo subyacente al precio más alto X que es superior al precio de mercado y, por lo tanto, tiene una

ganancia dada por $X - S(T)$. Si $S(T) \geq X$, el comprador de una opción de venta no ejerce la opción y tiene una pérdida igual a la prima. Veamos un ejemplo práctico.

Ejemplo 1.1 El comprador (holder) compra una opción de compra (call) sobre 500 acciones al precio de ejercicio (strike) de 1.00\$ con una fecha de vencimiento de un mes. Para adquirir la opción, paga 0.10\$ por título. Por tanto, paga una prima total de 50.00\$ (costo de la opción) o sea $500 \times 0.10\$$. Si en la fecha de vencimiento el precio de mercado de la acción sube de 1.00\$ a 1.15\$ superando el precio de ejercicio (strike), el operador tiene la conveniencia de ejercer su derecho de compra. ¿Por qué el operador ejerce el derecho de opción? El comprador compra 500 acciones al precio de 1.00\$ (strike) a través de la opción y las revende en el mercado al precio de 1.15\$. En este caso el comprador (holder) tiene una ganancia de 25.00\$ = *ganancia bruta* – *precio opcion* = $(1.15\$ - 1.00\$) \times 500 - 50.00\$$. El vendedor (writer) tiene una pérdida de 25.00\$ = *perdida bruta* – *precio opcion* = $(1.15\$ - 1.00\$) \times 500 - 50.00\$$. Por el contrario, si el precio de mercado cae por debajo del precio de ejercicio, el comprador no tiene ninguna ventaja en el ejercicio de su derecho de opción, pero solo sufre una pérdida máxima de 50.00\$ igual al costo incurrido para comprar la opción. En este caso el vendedor tiene una ganancia igual al precio pagado inicialmente por el comprador de la opción.

Si consideramos las opciones de compra o venta estadounidenses, estas consideraciones deberían hacerse relativamente a todos los tiempos anteriores T . Quien vende la opción tiene una pérdida (o una ganancia) igual a la ganancia (o la pérdida) de quienes compraron la opción. El comprador de una call como el vendedor de una put, espera un aumento del precio del activo subyacente, mientras que el comprador de una opción de venta, así como el vendedor de una call espera una disminución en el precio del activo subyacente. Los compradores de opciones pagan una prima porque tienen posibilidades ilimitadas de ganancias, mientras que tienen posibilidades limitadas de pérdida (a lo sumo pierden la prima pagada). Por otro lado, los vendedores de opciones reciben una prima porque frente a las ganancias limitadas tienen pérdidas potenciales ilimitadas.

Las opciones son títulos riesgosos, pero un aspecto importante que explotaremos en el modelo de Black-Scholes es la cobertura de riesgo que se puede actuar con las opciones. De hecho, es posible combinar una o más opciones con el título subyacente, de manera tal que el activo subyacente y las opciones se protejan recíprocamente en caso de pérdida de una de las dos. Antes de hacer esto presentamos la siguiente definición

Definición 1.7 Una *cartera* es un conjunto de tenencias de títulos: una cierta cantidad por cada título.

Para implementar un ejemplo de cobertura de riesgo en una hipotética cartera, tomamos simultáneamente una posición de signo opuesto en una o más call y sobre el activo subyacente representado por un cierto número de acciones. Recordamos que una posición corta se toma cuando se esperan bajadas en bolsa y suponen vender un activo

que no hemos comprado antes, con la idea de que el precio bajará y que lo podremos comprar en un futuro a un nivel más bajo. También es conocida como venta al descubierto. De manera contraria con la posición larga se entiende una compra de un activo financiero con la previsión de que éste pueda subir de valor en el futuro. Queremos determinar cuál es el número óptimo de call y acciones sobre las cuales tomar posiciones opuestas para tener una protección perfecta contra el riesgo. Supongamos que tenemos una cartera con una posición larga en una call que tiene como subyacente una acción y tenemos una posición corta en la acción misma. La figura 1.3 muestra la gráfica del precio de la call en función del precio de la acción subyacente.

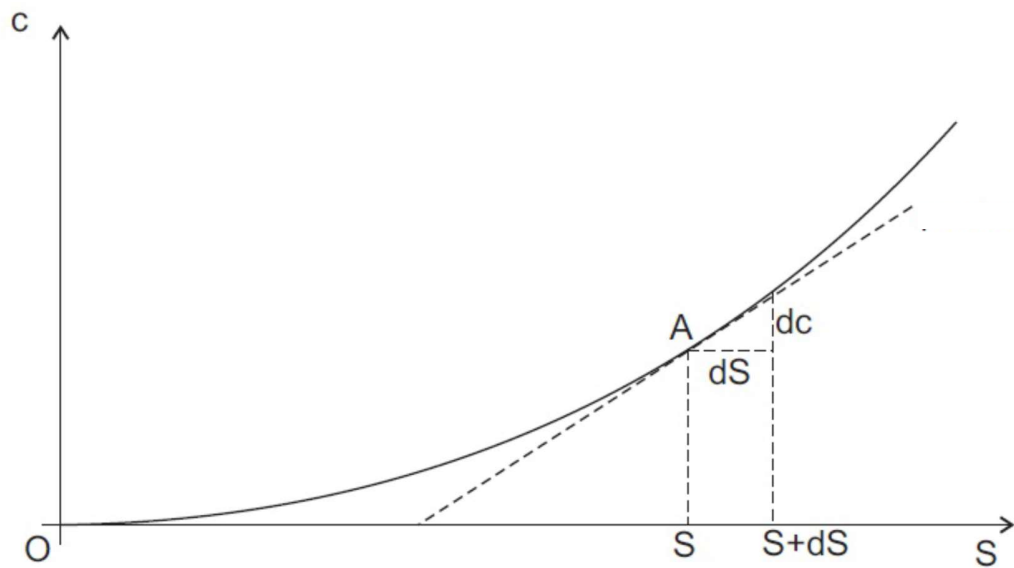


Ilustración 1.3: Precio de la call en función del precio de la acción subyacente

Supongamos que el precio de la acción es tal que estamos en el punto A de la figura. Si el precio de las acciones aumenta dS , nuestra cartera, debido a la posición corta en la acción, experimentará una variación de $-dS$ y por lo tanto una pérdida, pero al mismo tiempo tendrá una ganancia igual al aumento de dc que tiene el precio de la call debido al aumento en el precio de la acción subyacente. Sin embargo, si tenemos en cuenta que $dc < dS$, tenemos que $\partial_S c = \frac{dc}{dS} < 1$, y la cartera en general sufre una pérdida debida al incremento en el precio de la acción. Entonces, con una call y una sola acción no existe una cobertura perfecta contra el riesgo. Pero con los ajustes apropiados de posiciones se puede eliminar la pérdida de la cartera. Definimos $\Delta = \partial_S c < 1$, que llamaremos delta de la opción call. Si en lugar de tener una posición corta en una acción, tenía una posición corta en Δ acciones, entonces un aumento en el precio de la acción de dS daría lugar a una pérdida igual a ΔdS , que está muy cerca de dc si el aumento de dS es muy pequeño. Como resultado, la ganancia en la posición en

opciones compensa, aproximadamente, la pérdida en la posición opuesta en la acción. La aproximación es mejor cuanto menor es la variación. El procedimiento de contrarrestar los cambios en c con una posición del signo opuesto en Δ unidades del valor subyacente se llama **delta hedging**. Se dice que la cartera así obtenida es **neutral** con respecto a Δ . Una cartera de este tipo no está sujeta a movimientos impredecibles, se dice cubierta y cómo tal libre de riesgos. Observamos que la posición de la cartera permanece neutral durante un período de tiempo relativamente breve porque Δ cambia durante la vida de una opción. Prácticamente, cuando se utiliza una estrategia de cobertura delta hedging, la cartera se debe ajustar periódicamente. Se puede demostrar que se puede obtener una cartera cubierta incluso contratando una posición larga en una acción y una posición corta en un número de opciones call, con la acción como subyacente, igual a $\frac{1}{\Delta}$. Veamos un ejemplo para aclarar mejor esta última parte.

Ejemplo 1.2 Imaginamos una cartera constituida por una cantidad de acciones Δ , cada acción del valor de 10\$ sobre las cuales tenemos una posición corta y una opción call que hemos comprado a cierto precio. Supongamos que el delta de la opción es $\Delta = 0.6$. Tenemos en cuenta que Δ es la variación del precio de la call al variar de precio de subyacente por un lado y es también la cantidad de subyacentes (acciones) que tenemos en cartera. Como no se pueden comprar cantidades de acciones menor a uno, en la realidad, las cantidades se multiplicarán de manera proporcional para conseguir valores enteros. Si el valor de la acción sube a 15\$, la posición corta sobre las acciones registra una pérdida de $(15\$ - 10\$) \times \Delta = 5 \times 0.6 = 3\$$. La posición corta espera una baja en el precio: si esto no pasa registra una pérdida. De manera converso la call registra una ganancia de $(15\$ - 10\$) \times 0.6 = 3\$$. La call es el derecho a comprar a un cierto precio y aumenta de valor cuando el precio del subyacente aumenta.

Supongamos ahora una cartera constituida por una cantidad de opciones call igual a $\frac{1}{\Delta}$ que hemos comprado a 3\$ cada una, sobre las cuales tenemos una posición corta y una acción que hemos comprado a 10\$ y que también es el subyacente de la call. Supongamos que el delta de la opción es $\Delta = 0.6$. Si el valor de la acción sube a 15\$, la posición larga sobre las acciones registra una ganancia de $(15\$ - 10\$) \times 1 = 5 \times 1 = 5\$$. De manera contraria la call registra una pérdida de $3\$ \times \frac{1}{\Delta} = 5\$$. Teniendo en cuenta que sobre la call tenemos una posición corta entonces esperamos que el valor baje, pero nunca va a ser más bajo que el precio de compra, por lo cual la pérdida máxima es igual al precio de compra por la cantidad comprada.

1.3. Parte estocástica

Comenzamos enfatizando que mientras en procesos deterministas estudiamos fenómenos que dependen del tiempo, de los cuales somos capaces de predecir la evolución exacta al paso del tiempo, para describir aquellos fenómenos cuya evolución

está influenciada por eventos aleatorios, el análisis clásico ya no es adecuado y es necesario introducir los procesos estocásticos estudiados en el contexto del cálculo estocástico que se basa en la teoría de la probabilidad. Particularmente en el sector financiero, no es posible predecir con precisión el precio futuro de un dado título riesgoso, por ejemplo, una acción, conociendo su historia pasada, porque el azar influye en su dinámica. De hecho, eventos impredecibles, como la quiebra de una empresa, la caída de un gobierno, un acto terrorista de considerable violencia puede producir notables fluctuaciones en el precio del mercado de valores. Debido a las frecuentes e intensas variaciones debidas a eventos aleatorios la función que asocia el valor de una acción a la variable tiempo no es derivable y por lo tanto no puede ser la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

1.3.1. Procesos estocásticos

Aquí introduciremos una serie de conceptos y teoremas relacionados que posteriormente servirán para la formulación de la ecuación de Black-Scholes y su solución. Un concepto clave con el cual vamos a trabajar es el de proceso estocástico. Un proceso estocástico es una variable que cambia en el tiempo, por lo menos en parte, de manera aleatoria. El precio de una acción es un ejemplo; fluctúa aleatoriamente, pero a largo plazo tiene una tasa de crecimiento esperada positiva que recompensa a los inversores por el riesgo de tener la acción. De manera más formal, un proceso estocástico es la ley x_t con que evoluciona una variable x en el tiempo t . Entonces en los instantes $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$, tenemos una cierta probabilidad de que la variable tome los correspondientes valores $x_1, x_2, x_3, \dots$. Uno de los ejemplos más sencillos de proceso estocástico es la caminata aleatoria (random walk). En este caso x_t es una variable aleatoria que empieza en un valor conocido x_0 , y en los tiempos siguientes $t = 1, 2, 3, \dots$, hace un salto de amplitud 1 hacia arriba o abajo con probabilidad $\frac{1}{2}$. Cada salto es independiente de los demás y podemos describir la dinámica de x_t con la ecuación

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$$

En la cual ϵ_t es una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$prob(\epsilon_t = 1) = prob(\epsilon_t = -1) = \frac{1}{2}$$

Diremos que x_t es proceso discreto porque puede tomar solo valores discretos. El proceso de Wiener, que introduciremos mas adelante es la versión continua de la caminata aleatoria que de ella se deriva cuando la distancia entre los instantes de tiempo tiende a cero.

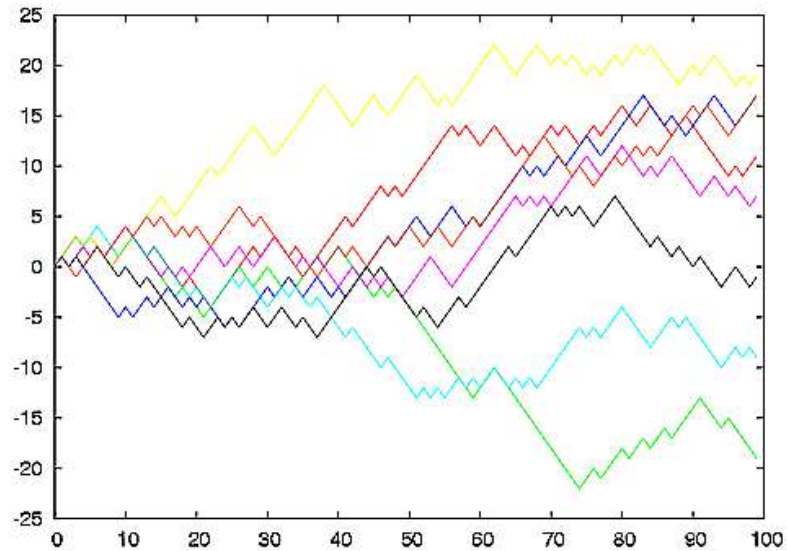


Ilustración 1.4: Varias caminadas aleatorias en una dimensión empezando en 0. La gráfica muestra la posición actual sobre una línea (eje vertical) versus los intervalos de tiempo (eje horizontal).

A continuación, detallaremos algunas definiciones relacionadas con los espacios utilizados en los capítulos siguientes. El lector que quiera profundizar puede consultar (Halmos, 1974).

Se define **espacio medible**, un par $(X, \mathcal{F})$ que consta de un conjunto no vacío X y un σ -álgebra $\mathcal{F}$ sobre X . Los elementos de $\mathcal{F}$ se denominan conjuntos medibles de X . En la práctica, la σ -álgebra $\mathcal{F}$ nos permite asociar a algunos subconjuntos de X una medida (longitud, volumen, probabilidad, etc.) y el espacio medible es el conjunto de tales subespacios de medida asignada. La elección de una medida para asociarla con estos subespacios produce un espacio de medida. Definimos **espacio de medida** un espacio medible $(X, \mathcal{F})$ con una medida positiva μ definida sobre la σ -álgebra $\mathcal{F}$ que consta de subconjuntos medibles de X (Rudin, 1987). Dicho espacio está representado por un triple $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Un **espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de medida tal que $\forall E \in \mathcal{F}, P(E) \geq 0$ y $P(\Omega) = 1$. En este contexto P se denomina medida de probabilidad.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea Λ un conjunto no vacío, cuyos elementos son los instantes que se toman en consideración en el estudio del fenómeno evolutivo. Generalmente tendremos $\Lambda = [0, +\infty)$ o $[0, T]$ o un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{N}$.

Definición 1.9 *Un proceso estocástico es una aplicación*

$$X: \Lambda \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada t fijo en Λ

$$X(t, \cdot): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Las variables aleatorias se caracterizan en términos de la distribución de probabilidad y de sus parámetros como el valor esperado $E[X]$ y la varianza $V[X]$. Veamos brevemente que significa esto. Si X es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, denotamos con $E[X]$ el **valor esperado** de X definido como

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP. \quad (1.5)$$

La varianza de la variable X a su vez será $V[X] = E[(X - E[X])^2]$. La distribución de probabilidad está ligada a la función densidad de probabilidad (Papoulis, 1991) que modela los eventos aleatorios en examen. A continuación, describimos brevemente dos de las distribuciones más usadas en ámbito financiero.

- **La distribución Normal o Gaussiana.** Una variable aleatoria X tiene una distribución Normal de media μ y varianza σ^2 si su densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

y se la nota como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. En este caso es $E[X] = \mu$ y $V[X] = \sigma^2$;

- **La distribución Log-normal.** En algún caso puede ocurrir que ciertos eventos sean representados por variables aleatorias cuyos logaritmos son normales, o sea $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X \sim LN(\mu, \sigma^2)$. La densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

En este caso es $E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ y $V[X] = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. La distribución log-normal se usa en ciertos contextos para modelizar el precio de un activo. El precio de un activo, así como el logaritmo, nunca es negativo en el dominio.

Definición 1.10 *Definimos realización o trayectoria o función de muestra del proceso estocástico relativa al estado ω fijo en Ω , a la función del tiempo*

$$X(\cdot, \omega): \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

Por lo tanto, un proceso estocástico puede verse como una familia de variables aleatorias dependiendo del parámetro real t que varía en Λ o como el conjunto de todas las funciones de muestra relacionadas con los estados, que son funciones del tiempo definidas en Λ . A continuación, usaremos la notación $X_t(\cdot)$ en lugar de $X(t, \cdot)$ y por lo tanto escribiremos $X_t(\omega)$ en lugar de $X(t, \omega)$. Introducimos ahora unos procesos estocásticos que son fundamentales para nosotros: los procesos de Wiener. Estos juegan un papel importante en la descripción de los precios de los valores en un mercado financiero, en el tiempo continuo.

Definición 1.11 *Un proceso de Wiener estándar es un proceso estocástico W_t con $t \geq 0$ tal que:*

- $W_0 = 0$ con probabilidad 1;
- W_t tiene incrementos independientes, es decir, si se eligen cuatro instantes de tiempo $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ (tales que los intervalos (s_1, t_1) y (s_2, t_2) no se intersecan), entonces $W_{t_1} - W_{s_1}$ y $W_{t_2} - W_{s_2}$ son variables aleatorias independientes;
- cada incremento $W_t - W_s$ con $0 \leq s \leq t$ tiene una distribución normal con media cero y varianza $t - s$, es decir, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.

En matemáticas, un proceso de Wiener, también conocido como movimiento browniano, es un proceso estocástico utilizado para modelar el movimiento browniano en sí y varios fenómenos aleatorios observados en matemáticas aplicadas, finanzas y física. El proceso de Wiener también juega un papel importante en la matemática pura, donde dio lugar al estudio de la martingala de tiempo continuo, que resultó ser fundamental para la descripción y modelado de procesos estocásticos más complejos. Para ello, este tipo de procesos juegan un papel vital en el cálculo estocástico, los procesos de difusión y también en la teoría del potencial. En matemáticas aplicadas, el proceso de Wiener se utiliza para representar la integral del ruido blanco; y es muy útil como modelo de ruido en ingeniería electrónica, en teoría de filtros y para representar entradas desconocidas en la teoría de control. Es la versión continua del proceso estocástico más básico conocido como cadena de Markov (Karatzas & Shreve, 1998).

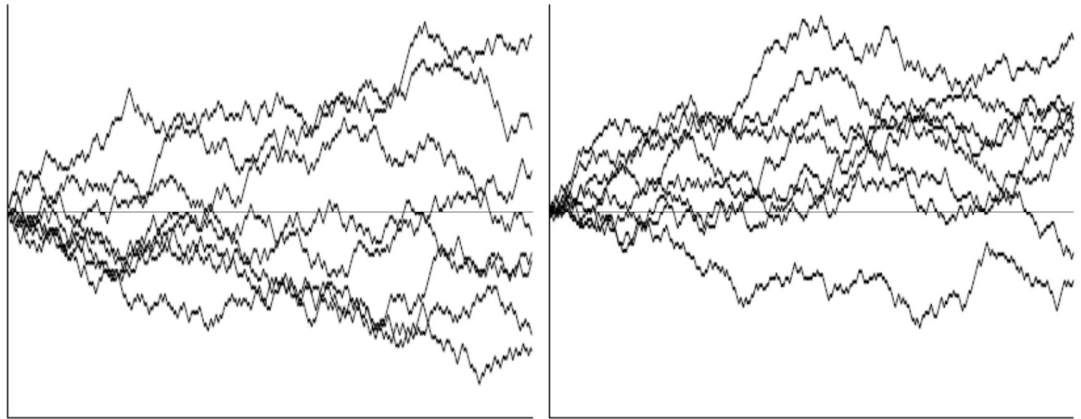


Ilustración 1.5: Algunas trayectorias de un Proceso de Wiener

1.3.2. Integral estocástica de Itô

En el cálculo estocástico hay integrales en las que la función integrada también puede ser un proceso estocástico G_t y el diferencial es un proceso de Wiener, W_t , es decir, integrales de la forma

$$\int_{t_0}^T G_t dW_t.$$

En este caso la integral no es un número, sino una función con valores reales definido en Ω , siendo G_t y W_t , variables aleatorias para las cuales:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \left(\int_{t_0}^T G_t dW_t \right) (\omega) = \int_{t_0}^T G(t, \omega) dW(t, \omega).$$

Por lo tanto, en la integral escrita arriba, las trayectorias de W_t relativas a varios estados ω , son funciones de variación ilimitada en cada intervalo de tiempo finito. Damos la definición de la integral de Itô procediendo por pasos sucesivos empezando por el caso más simple para llegar al caso más general. Sea $G(t, \omega)$ una función con valores reales definida en $[t_0, T] \times \Omega$ y W_t un proceso de Wiener.

Paso 1. Supongamos que la función G es constante, es decir

$$G(t, \omega) = g \quad \forall (t, \omega) \in [t_0, T] \times \Omega.$$

Entonces definimos la integral estocástica de Itô de G con respecto a W_t desde t_0 hasta T como sigue:

$$I_G = \int_{t_0}^T G_t dW_t = g \cdot (W_T - W_{t_0})$$

Observación: obviamente, dado que W_T y W_{t_0} son variables aleatorias, la integral I_G así definida es a su vez una variable aleatoria y por lo tanto

$$\forall \omega \in \Omega \quad I_G(\omega) = g \cdot (W_T(\omega) - W_{t_0}(\omega)).$$

Paso 2. Supongamos que la función G no es estocástica, es decir, que $G(t, \omega) = G(t)$ y que $G(t)$ es una **función simple elemental**, es decir que existe una partición del intervalo $[t_0, T]$ obtenido a través de los puntos: $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ tal que

$$G(t) = g_j \quad \text{si} \quad t_{j-1} \leq t < t_j \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

y

$$G(t_n = T) = g_n.$$

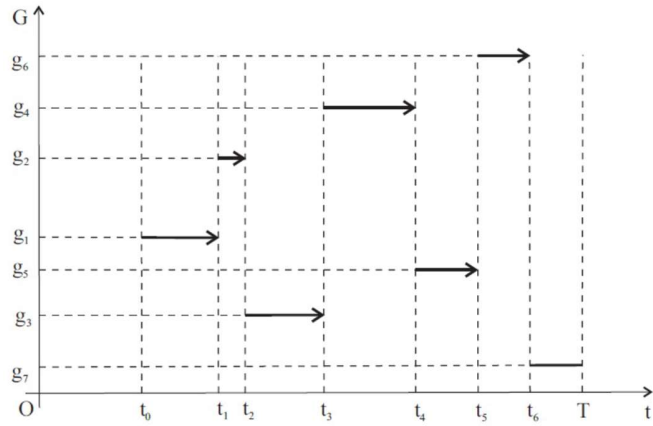


Ilustración 1.6: Gráfico de una función simple elemental

Definimos la integral estocástica de Itô de G con respecto a W_t desde t_0 hasta T como:

$$I_G = \int_{t_0}^T G_t dW_t = \sum_{j=1}^n g_j \cdot (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

Paso 3. En el caso general suponemos que la función G es estocástica, es decir:

$$\begin{aligned} G: [t_0, T] \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto G(t, \omega) \end{aligned}$$

La integral de Itô se define siempre que las siguientes hipótesis sean satisfechas por G :

1. La función G es $\mathcal{B}([t_0, T]) \otimes \mathcal{A}$ - medible;
2. $G(t, \omega)$ es *No Anticipante*;
3. $E \left[\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \right] < +\infty$

En general con la notación $\mathcal{B}(\Omega)$ nos referimos a la más pequeña σ -álgebra generada por los abiertos en Ω , mientras que la condición 3 hace referencia al valor esperado $E[X]$ definido en (1.5). Las condiciones 1 y 3 son esencialmente de naturaleza técnica y se necesitan para asegurar la convergencia de un tipo de sucesión que definiremos a seguir, mientras que la 2, que ahora definiremos, llamada la **condición de No Anticipación (NA)**, es la más significativa.

Definición 1.12 Decimos que la función estocástica $G: [t_0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de no anticipación si $\forall t \in [t_0, T]$,

$G(t, \cdot)$ es medible con respecto a la σ – algebra $\mathfrak{T}_{[t_0, T]} = \sigma(\{W_\tau: t_0 \leq \tau \leq t\})$ es decir, con respecto a σ – algebra generada por los W_τ con $\tau \in [t_0, T]$.

Observación: decir que la función $G(t, \cdot)$ es *No Anticipante* es equivalente a requerir que la variable aleatoria $G(t, \cdot)$ dependa solo de los valores pasados y actuales del proceso de Wiener y no de sus valores futuros.

Denotamos por $\mathcal{V}([t_0, T])$ la clase de las funciones estocásticas que cumplen con las condiciones 1, 2 y 3. Definiremos la integral de Itô para funciones pertenecientes a la clase de funciones $\mathcal{V}([t_0, T])$. Antes de dar la definición general de la integral estocástica de Itô, enunciamos el siguiente Lema

Lema 1.1 Sea $G(t, \omega) \in \mathcal{V}([t_0, T])$, entonces existe una sucesión $G_n(t, \omega)$ de funciones estocásticas simples elementales pertenecientes a la clase $\mathcal{V}([t_0, T])$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left(\int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right) = 0 \quad (1.6)$$

Demostración

Véase (Pascucci, 2008) pág. 199. ■

Ahora damos la definición de la integral de Itô en el caso general.

Definición 1.13 Si $G(t, \omega) \in \mathcal{V}([t_0, T])$, se define integral estocástica de Itô de G con respecto a W_t desde t_0 hasta T de la siguiente manera:

$$I_G = \int_{t_0}^T G_t(t, \cdot) dW_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T G_n(t, \cdot) dW_t \quad (1.7)$$

donde G_n es una sucesión de funciones estocásticas simples elementales pertenecientes a la clase $\mathcal{V}([t_0, T])$, por las cuales vale la condición (1.6) y el límite se entiende en el sentido de la norma L^2 , es decir, en media cuadrática.

Respecto a esta última definición para referencias o aclaraciones véase (Pascucci, 2008) cap. 4.

1.3.3. Diferenciales estocásticos y ecuaciones diferenciales estocásticas

Daremos una definición de diferencial estocástico usando la integral de Itô.

Definición 1.14 Sea X_t un proceso estocástico definido en $[t_0, T]$ tal que $\forall t \in [t_0, T]$ vale la siguiente relación:

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t F(\tau, \omega) d\tau + \int_{t_0}^t G(\tau, \omega) dW_\tau \quad (1.8)$$

donde F es una función real medible con respecto a la σ – algebra $\mathcal{B}([t_0, T]) \otimes \mathcal{A}$, no anticipante y tal que la integral $\int_{t_0}^t F(\tau, \omega) d\tau < +\infty$ con probabilidad 1 $\forall t \in [t_0, T]$, G es una función real perteneciente a la clase $\mathcal{V}([t_0, T])$, y X_{t_0} es una variable aleatoria medible con respecto al σ – algebra generada desde W_{t_0} . En este caso el proceso estocástico X_t se denomina **proceso de Itô**. Diremos que X_t tiene un diferencial estocástico dado por:

$$dX_t = F(t, \cdot) dt + G(t, \cdot) dW_t \quad (1.9)$$

El diferencial estocástico es, por lo tanto, sólo una escritura simbólica para expresar la relación (1.8) de una manera más compacta.

Definición 1.15 Se define ecuación diferencial estocástica de Itô una ecuación de la forma:

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad (1.10)$$

para la cual la incógnita es el proceso estocástico X_t .

Del proceso estocástico X_t se deben determinar las trayectorias y las probabilidades asociadas. En cuanto a las funciones μ y σ , ellas describen respectivamente el coeficiente de difusión y el coeficiente de drift o sea de dirección. Se supone que μ y σ son funciones determinísticas asignadas. W_t es un proceso Wiener. El término dW_t representa los eventos impredecibles que ocurren durante el intervalo de tiempo infinitesimal dt y que influyen en la tendencia de proceso en ese intervalo.

Aquí damos un pequeño adelanto de algunos conceptos que se aclararán más adelante pero que en este punto pueden dar una idea de la utilidad de todo lo dicho hasta ahora. Primero que nada, es necesario observar que las variaciones absolutas del precio de un activo no son interesantes de monitorear. Es interesante monitorear lo que en economía se llama rendimiento (return), definido como la relación entre la variación absoluta del precio del activo y su valor original. Matemáticamente expresamos esta cantidad como $\frac{dS_t}{S_t}$ entendiendo con S el genérico precio del activo, en particular S_t es el precio al tiempo t . Supongamos en este punto que esta variación se puede dividir en dos términos:

1. Un término puramente determinista similar al retorno de dinero. sin riesgo invertido en el banco y caracterizado por el parámetro μ (interés), dicho parámetro mide la tasa media de crecimiento del precio del activo. En la práctica es, en los modelos más simples, un valor constante que indica el rendimiento medio de la acción: si gana o pierde y cuánto. Matemáticamente, por lo tanto, este término se puede expresar como

$$dS_{deter} = S_t \mu dt.$$

2. Un segundo término estocástico para modelar los aspectos aleatorios relacionados a la evolución del precio

$$dS_{stoc} = S_t \sigma dW_t,$$

donde el coeficiente σ se llama volatilidad y mide el desvío estándar del precio (riesgo), mientras que con W_t , indicamos un proceso de Wiener.

Por tanto, la ecuación diferencial estocástica que representa la tendencia del precio del activo es la siguiente:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

que se puede reescribir como:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t.$$

La ecuación (1.10) es necesaria para llegar a la ecuación de Black-Scholes.

A la ecuación diferencial estocástica (1.8) está asociada la condición inicial

$$X_{t_0} = \xi$$

donde ξ es una variable aleatoria conocida que representa el valor del proceso estocástico en el tiempo inicial t_0 . La ecuación (1.10) combinada con la condición inicial es una forma simbólica de escribir:

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^t \mu(\tau, X_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, X_\tau) dW_\tau \quad (1.11)$$

Como puede verse en la (1.11), encontrar la solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô significa determinar la dependencia de los valores pasados y contemporáneos del proceso Wiener. Nos limitaremos a considerar solo los procesos estocásticos X_t y W_t con valores reales.

Definición 1.16 La ecuación diferencial estocástica (1.10) se llama lineal si μ y σ se presentan en la forma:

$$\mu(t, X_t) = A_t X_t + a_t, \quad \sigma(t, X_t) = B_t X_t + b_t. \quad (1.12)$$

Si $a_t = b_t = 0$, se dice que la ecuación es lineal y homogénea, si $B_t = 0$ se dice que la ecuación es lineal en sentido estricto.

Consideremos ahora ecuaciones diferenciales estocásticas lineales de tipo general:

$$dX_t = (A_t X_t + a_t) dt + (B_t X_t + b_t) dW_t$$

con la condición inicial

$$X_{t_0} = \xi$$

la solución de esta ecuación usa el siguiente teorema.

Teorema 1.1 Sea X_t un proceso estocástico definido en $[t_0, T]$ que tiene diferencial estocástico

$$dX_t = F(t, \cdot) dt + G(t, \cdot) dW_t$$

y sea $U: [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Entonces en $[t_0, T]$ vale la **fórmula de Itô**:

$$\begin{aligned} U(t, X_t) &= U(t_0, X_{t_0}) \\ &+ \int_{t_0}^t \left\{ \partial_\tau U(\tau, X_\tau) + F(\tau, \cdot) \partial_x U(\tau, X_\tau) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} G^2(\tau, \cdot) \partial_{xx}^2 U(\tau, X_\tau) \right\} d\tau + \int_{t_0}^t G(\tau, \cdot) \partial_x U(\tau, X_\tau) dW_\tau \end{aligned} \quad (1.13)$$

con probabilidad 1 y con $t_0 \leq t \leq T$.

Demostración

Véase (Pascucci, 2008) pág. 218. ■

Por medio de la fórmula de Itô, la solución de este problema viene dada por:

$$X_t = \Psi_{t,t_0} \left(\xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} (a_\tau - B_\tau b_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right) \quad (1.14)$$

donde Ψ_{t,t_0} es la solución del problema

$$\begin{aligned} d\varphi_t &= A_t \varphi_t dt + B_t \varphi_t dW_t \\ \varphi_{t_0} &= 1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Se debe tener en cuenta que la ecuación diferencial estocástica satisfecha por Ψ_{t,t_0} es la ecuación homogénea asociada a la de partida. Sin embargo, la fórmula de la solución escrita arriba generalmente no se puede escribir en forma completa porque no se puede determinar Ψ_{t,t_0} explícitamente. Esto es posible si los coeficientes A_t y B_t son constantes, es decir, $A_t = A$, $B_t = B$. con A y B constantes. De hecho, en este caso tenemos

$$\Psi_{t,t_0} = e^{\left(A - \frac{B^2}{2}\right)(t-t_0) + B(W_t - W_{t_0})} = e^{\left(A - \frac{B^2}{2}\right)(t-t_0)} e^{B(W_t - W_{t_0})} \quad (1.16)$$

1.3.4. Procesos geométricos

Un proceso geométrico es un proceso estocástico que satisface la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

con μ y σ constantes y la condición inicial

$$X_{t_0} = \xi \quad (t_0 = 0).$$

Entonces en este caso:

$$A_t = \mu, \quad B_t = \sigma, \quad a_t = 0, \quad b_t = 0$$

Por lo tanto, remplazando en (1.16) y (1.14), tenemos:

$$\Psi_{t,0} = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \quad X_t = \xi \Psi_{t,0} \quad (1.17)$$

Una propiedad interesante del proceso geométrico se obtiene explicitando la (1.17) y teniendo en cuenta que $X_0 = \xi$, obtenemos:

$$X_t = X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \quad (1.18)$$

y de acá se deduce que

$$\log \frac{X_t}{X_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t, \quad (1.19)$$

donde hemos asumido $X_0 \neq 0$.

Se puede mostrar que $\log \frac{X_t}{X_0}$ sigue una distribución gaussiana con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ y varianza $\sigma^2 t$. Teniendo en cuenta la definición de variable aleatoria con distribución log-normal, podemos afirmar que, si X_t es un proceso geométrico, entonces $\frac{X_t}{X_0}$ tiene una distribución log-normal.

1.4. Parte determinística

En esta sección daremos una breve introducción sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Más adelante se utilizarán algunos conceptos relacionados a este tipo de ecuaciones diferenciales para determinar la fórmula de Black-Scholes. El lector que quiera profundizar u aclarar algunos pasajes puede consultar (Evans, 1997). Empezaremos dando algunas definiciones.

Definición 1.17 *Una ecuación diferencial en derivadas parciales en n variables independientes $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una relación entre estas variables, una función*

incógnita v de $x_1, x_2, \dots, x_n$ y una o más derivadas parciales de la función incógnita. Diremos que una ecuación diferencial en derivadas parciales es de orden m si m es el orden de las derivadas de orden máximo de la función incógnita que aparecen en la ecuación.

Por ejemplo, una ecuación diferencial en derivadas parciales de II orden más general en n variables independientes $x_1, x_2, \dots, x_n$ tiene la forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, v, \partial_{x_1} v, \dots, \partial_{x_n} v, \partial_{x_1 x_1}^2 v, \dots, \partial_{x_n x_n}^2 v) = 0,$$

donde $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es la función incógnita. Si F es lineal con respecto a la función incógnita y todas sus derivadas, la ecuación se dice que es **lineal**. La ecuación en derivadas parciales lineal de II orden en 2 variables independientes x, y más general es del tipo:

$$A(x, y) \partial_{xx}^2 v + 2B(x, y) \partial_{xy}^2 v + C(x, y) \partial_{yy}^2 v + a(x, y) \partial_x v + b(x, y) \partial_y v + c(x, y) v = f(x, y), \quad (1.20)$$

con A, B, C, a, b, c, f funciones conocidas. Si $f = 0$, se dice que la ecuación es **homogénea**. Las siguientes tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de II orden son particularmente importantes para los numerosos fenómenos físicos que gobiernan:

$$\frac{1}{V^2} \partial_{tt}^2 v - (\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v) = f(t, x_1, x_2, x_3), \quad (1.21)$$

($V = \text{constante positiva}$), llamada ecuación de onda o ecuación de D'Alembert;

$$\frac{1}{a^2} \partial_t v - (\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v) = f(t, x_1, x_2, x_3), \quad (1.22)$$

($a = \text{constante positiva}$), llamada ecuación del calor o ecuación de Fourier;

$$\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v = f(x_1, x_2, x_3), \quad (1.23)$$

llamada ecuación de Poisson. La última ecuación se llama ecuación de Laplace si $f = 0$.

Las ecuaciones (1.21) y (1.22) son ecuaciones diferenciales parciales en las 4 variables independientes (t, x_1, x_2, x_3) , de II orden, lineal y con coeficientes constantes. Tales

ecuaciones gobiernan los fenómenos evolutivos que ocurren en regiones del espacio geométrico en un intervalo de tiempo dado y que se describen no solo por cantidades dependientes desde el tiempo sino también de las coordenadas espaciales en el que se consideran. La tercera ecuación, que es una ecuación diferencial parcial en las tres variables independientes (x_1, x_2, x_3) , de II orden, lineal, con coeficientes constantes, en general gobierna los fenómenos estacionarios, es decir, independientes del tiempo y, por tanto, identificada por medio de cantidades que dependen sólo de las coordenadas espaciales en el que se consideran.

Definición 7.3 *Dada una ecuación diferencial parcial de orden m en n variables independientes, diremos que la función $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una solución clásica o fuerte de la ecuación en el dominio (conjunto abierto conexo) $D \in \mathbb{R}^n$ si $v \in C^n(D)$ y, remplazada en lugar de la función incógnita, reduce la ecuación a una identidad con respecto a las variables independientes.*

Con la notación $v \in C^n(D)$ se quiere decir que la función v en el conjunto D admite derivadas continuas hasta el orden n . Diremos que una ecuación diferencial parcial es **semilineal** si es lineal con respecto a las derivadas de orden máximo de la función incógnita y sus coeficientes son únicamente funciones de las variables independientes. La ecuación diferencial en derivadas parciales de II orden semilineal en las 2 variables independientes x, y más general se presenta en la forma:

$$A(x, y)\partial_{xx}^2 v + 2B(x, y)\partial_{xy}^2 v + C(x, y)\partial_{yy}^2 v = \Phi(x, y, v, \partial_x v, \partial_y v). \quad (1.24)$$

En el resto de este párrafo nos ocuparemos principalmente de las ecuaciones en derivadas parciales de II orden en 2 variables independientes, dado que la ecuación de Black-Scholes es de ese tipo.

Definición 7.4 *Dada la ecuación en derivadas parciales semilineal (1.24), en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, se define el discriminante de la ecuación como la siguiente función:*

$$\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (1.25)$$

Definición 7.5 *(Clasificación en un punto para una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en dos variables independientes semilineales). Considerando $(x, y) \in D$, y asumiendo que los coeficientes A, B, C no se anulan simultáneamente, diremos que en (x, y) la ecuación (1.24) es:*

- de **tipo hiperbólica** si $\delta(x, y) > 0$;
- de **tipo parabólica** si $\delta(x, y) = 0$;
- de **tipo elíptica** si $\delta(x, y) < 0$.

Ejemplo 1.2

1. Ecuación de onda de dos variables, también llamada ecuación de cuerda vibrante:

$$\frac{1}{V^2} \partial_{tt}^2 v - \partial_{xx}^2 v = f(t, x).$$

Tenemos:

$$A = \frac{1}{V^2}, \quad B = 0, \quad C = -1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{V^2} > 0$$

La ecuación es de tipo hiperbólica.

2. Ecuación de calor en dos variables

$$\frac{1}{a^2} \partial_t v - \partial_{xx}^2 v = f(t, x).$$

Tenemos:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -1 \Rightarrow \delta = 0$$

La ecuación es de tipo parabólica.

3. Ecuación de Poisson en dos variables:

$$\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v = f(x, y),$$

Tenemos:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -1 \Rightarrow \delta = -1 < 0$$

La ecuación es de tipo elíptica.

Definición 7.6 La aplicación

$$H: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$$

tal que:

- 1) $\xi, \eta \in C^2(D)$
- 2) $\det \begin{pmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{en } D$

se llama transformación regular de las variables independientes (x, y) .

Respecto a las transformaciones regulares, usando la definición (7.6) se demuestran las siguientes proposiciones.

Proposición 1.1 Después de una transformación regular H de las variables independientes, la transformada de la ecuación diferencial de II orden en dos variables independientes semilineal (1.24) sigue siendo semilineal y en cada punto de $H(D)$ es del mismo tipo que la ecuación inicial en el punto correspondiente de D .

Demostración

Véase (Salsa, 2010) pág. 94. ■

Proposición 1.2. Si la ecuación (1.24) es de tipo hiperbólico o parabólico en D y $A, B, C \in C^2(D)$ o si la ecuación es elíptica en D y A, B, C son funciones analíticas en D , entonces hay una transformación regular de las variables independientes que permite escribir la ecuación transformada al menos en uno de los subdominios de D , en la siguiente forma, denominada II forma canónica:

- $\partial_{\xi\xi}^2 \tilde{v} - \partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$ en el caso hiperbólico;
- $\partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$ en el caso parabólico;
- $\partial_{\xi\xi}^2 \tilde{v} + \partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$ en el caso elíptico;

donde con e y $\tilde{v}$ denotamos la transformada de v .

Demostración

Véase (Salsa, 2010) pág. 97. ■

Recordamos que se dice que una función es analítica en un dominio si en una vecindad de cada punto del dominio se puede desarrollar en series de Taylor y estas resultan uniformemente convergentes.

Así como ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias, también una ecuación en derivadas parciales admite infinitas soluciones. Por lo tanto, como para determinar una solución de una ecuación diferencial ordinaria se asocian a esta las condiciones iniciales o de Cauchy, de manera similar para determinar una solución de una ecuación en derivadas parciales se asocian a la ecuación algunas **condiciones en los límites**. Si

tenemos una ecuación diferencial en derivadas parciales en n variables independientes de orden m , las condiciones en los límites consisten en asignar sobre un determinado subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - 1$, los valores de la función incógnita o de algunas de sus derivadas, como máximo hasta el orden $m - 1$. Cuando hablamos de problema en los límites relacionado con una dada ecuación diferencial en derivadas parciales nos referimos al problema que consiste en encontrar una solución a la ecuación que satisface condiciones apropiadas condiciones en los límites. Como ya hemos observado, existen ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen fenómenos físicos que cambian con el tiempo. En tales ecuaciones, por tanto, una de las variables independientes es la variable de tiempo t , mientras que las otras variables son coordenadas espaciales. En este caso, si las condiciones asociadas con la ecuación se refieren al hiperplano $t = t_0$ ($t_0 =$ instante inicial), se llaman las **condiciones iniciales**. Si se refieren a la frontera del dominio D en el que varían las coordenadas espaciales se dicen **condiciones de frontera**.

Los principales problemas en los límites relacionados con las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de II orden que describen fenómenos físicos se puede agrupar en tres clases:

- **Problemas de Cauchy o problemas de valores iniciales** para ecuaciones de tipo hiperbólicas o parabólicas que gobiernan los fenómenos evolutivos. La solución se busca en $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ y se asignan solo las condiciones iniciales. $[0, +\infty)$ es un intervalo de tiempo ilimitado y las coordenadas espaciales toman sus valores en $\mathbb{R}^n$;
- **Problemas de valores en la frontera** para ecuaciones elípticas en las que la variable del tiempo no aparece. La solución se busca en el cerrado $\bar{D}$ con D dominio de $\mathbb{R}^n$. Solo se asignan las condiciones de contorno a las que se hace referencia en ∂D ;
- **Problemas de tipo mixto** para ecuaciones hiperbólicas o parabólicas. La solución se busca en $[0, T] \times D$, donde $[0, T]$ es un intervalo de tiempo y $D \subset \mathbb{R}^n$. Se asignan las condiciones iniciales y las condiciones de frontera en ∂D .

Es muy importante probar que para un problema en los límites la solución existe y es única, por lo menos en una determinada clase. Muchos problemas en los límites satisfacen esta importante propiedad bajo las adecuadas condiciones de regularidad de los datos del problema.

Capítulo 2

El modelo de Black-Scholes

En este capítulo nos ocuparemos del modelo de Black-Scholes. Empezaremos en la primera sección derivando la ecuación y en la siguiente sección nos ocuparemos de la determinación de su solución.

2.1. La ecuación de Black-Scholes

La fórmula de Black-Scholes fue obtenida por F. Black y M. Scholes en 1973 y R.C. Merton hizo varias generalizaciones en el mismo año. Ella permite encontrar una solución al problema del precio de las opciones call europeas antes de la fecha de ejercicio. El modelo se basa en algunas hipótesis, válidas tanto en el mercado de opciones como en el mercado del valor subyacente, que en este caso es una acción. Las hipótesis son las siguientes:

1. El mercado es perfecto, es decir:
 - Es perfectamente competitivo, o sea, los operadores no pueden influir en el precio de los valores con sus operaciones;
 - Es sin fricciones, es decir, no hay costos de transacción y/o impuestos y es posible endeudarse indefinidamente, se puede comprar y/o vender en cantidades arbitrarias e infinitamente divisibles a una tasa de interés r a corto plazo, conocida y constante en el tiempo;
 - No hay posibilidad de arbitraje¹.
2. El precio del valor subyacente dS_t , sigue un proceso geométrico mediante el cual
- 3.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.1)$$

con μ tasa de interés esperada, σ volatilidad de la acción y W_t proceso de Wiener;

4. El precio de ejercicio X de la opción es conocido y constante en el tiempo, el valor del subyacente no paga dividendos.

Consideremos el caso de una opción de compra europea. El valor de la opción c , gracias a las hipótesis formuladas, depende solo del precio del valor subyacente y del tiempo t . Por lo tanto, escribiremos $c = c(t, S)$ donde S es el precio de la acción subyacente y t indica el tiempo. Supondremos $t \in [0, T]$, siendo T la fecha de vencimiento de la

¹ El arbitraje es una estrategia financiera que consiste en aprovechar la diferencia de precio entre diferentes mercados sobre un mismo activo financiero para obtener un beneficio económico, normalmente sin riesgo.

call. También tenemos en cuenta que en el momento T , es decir al vencimiento de la opción, debemos tener

$$c(T, S_T) = \max\{S_T - X, 0\}$$

con S_T el precio de la acción S en el momento T . La idea detrás del modelo de evaluación de Black and Scholes se basa en la creación de una cartera de títulos que consiste en una posición larga sobre la acción subyacente y una posición corta sobre un cierto número de acciones tal que, en equilibrio, su rendimiento es exactamente el mismo que el de un activo sin riesgo. Para este fin, utilizamos un procedimiento de delta-hedging (Fig. 1.3): la cartera, por lo tanto, consiste en una acción sobre la que se toma una posición larga y de un número de call igual a $\frac{1}{\Delta}$, con $\Delta = \partial_S c$, sobre las cuales se asume una posición corta. Si la cobertura se realiza de forma continua, la cartera se vuelve totalmente independiente de las fluctuaciones en el precio de la acción y su rendimiento es conocido. Denotado por V el valor de la cartera, tendremos:

$$V = S - \frac{1}{\Delta} c.$$

El único factor de riesgo para V está representado por el precio S de la acción de la cual V depende tanto directamente como indirectamente a través de c . Como sabemos, S tiene un carácter estocástico y se describe mediante el proceso geométrico (2.1), c también tiene un carácter estocástico y se describe mediante el proceso estocástico

$$c = c(t, S_t).$$

Si asumimos que la función $c(t, S_t)$ es continua y que son continuas $\partial_t c$, $\partial_S c$, y $\partial_{SS}^2 c$, el diferencial estocástico de c_t viene dado por la fórmula de Itô. Teniendo en cuenta que $S = S_t$ para el cual $F = \mu S_t$ y $G = \sigma S_t$, usando el Teorema 1.1 y la fórmula de Itô (1.11), obtenemos:

$$dc_t = \partial_t c(t, S_t)dt + \partial_S c(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial_{SS}^2 c(t, S_t)dt. \quad (2.2)$$

Consideremos ahora la evolución temporal de V en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ con Δt suficientemente pequeño como para considerarlo constante en este intervalo el Δ de la call. Por lo tanto, en los siguientes consideraremos dado por $\Delta = \partial_S c(t, S_t)$. En el intervalo de tiempo inducido, tenemos que V es descrito por el proceso estocástico:

$$V_t = S_t - \frac{c_t}{\Delta} \quad (2.3)$$

y, por lo tanto:

$$dV_t = dS_t - \frac{dc_t}{\Delta} \quad (2.4)$$

A continuación, para no sobrecargar la escritura, omitiremos el subíndice t . Si en la formula (2.3) reemplazamos el diferencial estocástico del precio de la acción por su expresión (2.1) y al diferencial estocástico de c la fórmula de Itô escrita arriba (2.2), deducimos:

$$\begin{aligned} dV &= \mu S dt + \sigma S dW - \frac{1}{\Delta} \left(\partial_t c dt + \mu S \partial_S c dt + \sigma S \partial_S c dW + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 c dt \right) \\ &= \left[\mu S - \frac{1}{\Delta} \left(\partial_t c + \mu S \partial_S c + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 c \right) \right] dt + \sigma S \left(1 - \frac{1}{\Delta} \partial_S c \right) dW. \end{aligned}$$

Por otro lado, el coeficiente de dW es cero ya que $\Delta = \partial_S c$ y por lo tanto con la estrategia de delta-hedging se elimina la influencia de eventos aleatorios en el valor de la cartera. Por tanto, la expresión de dV es:

$$\begin{aligned} dV &= \left[\mu S \left(1 - \frac{1}{\Delta} \partial_S c \right) - \frac{1}{\Delta} \left(\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c \right) \right] dt \\ &= -\frac{1}{\Delta} \left(\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c \right) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

En este punto observamos que, habiendo asumido la ausencia de posibilidades de arbitraje (hipótesis 1 – ítem 3), dado que la cartera es libre de riesgo, se comporta como una obligación libre de riesgos (definición 1.2). Al adoptar el régimen de capitalización instantánea (sección 1.1.4), el valor B_t de una obligación que en el tiempo $t = 0$ tiene valor B_0 será tal que:

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

con r la tasa de interés del mercado. B_t es una función no estocástica y, por tanto, su diferencial está dada por

$$dB_t = r B_0 e^{rt} dt = r B_t dt$$

Entonces, usando la ecuación (2.3) tendremos que para la cartera existe la relación:

$$dV = rVdt = r\left(S - \frac{c}{\Delta}\right)dt. \quad (2.6)$$

Sustituyendo en (2.5), obtenemos

$$-\frac{1}{\Delta}\left(\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial_{SS}^2 c\right)dt = r\left(S - \frac{c}{\Delta}\right)dt$$

de lo cual multiplicando ambos miembros por Δ deducimos:

$$-\partial_t c - \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial_{SS}^2 c = r\Delta S - rc$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\Delta = \partial_S c$, llegamos a la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial_{SS}^2 c + rS\partial_S c - rc = 0 \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) se llama **ecuación de Black-Scholes**. La incógnita de esta ecuación es la función de dos variables $c(t, S_T)$ que representa el precio de una call europea. A la ecuación, que debe satisfacerse para $t \in (0, T)$ debemos asociar la condición final:

$$c(T, S_T) = \max\{S_T - X, 0\} \quad (2.8)$$

2.2. La fórmula de Black-Scholes

La ecuación (2.7) es una ecuación diferencial en derivadas parciales en las dos variables independientes (t, S) con función incógnita $c(t, S)$. En particular se trata de una ecuación de II orden, lineal y homogénea. Observamos, por lo que hemos dicho en la sección 1.4, que la ecuación es de tipo parabólico en $\mathbb{R}^2$. En efecto en este conjunto los

coeficientes de las segundas derivadas no se cancelan simultáneamente y el discriminante es nulo. También podemos notar que la ecuación no se reduce a la II forma canónica porque el coeficiente de la segunda derivada con respecto a S no es igual a 1. Luego observamos que la ecuación está asociada con la condición (2.8) que es una condición final y por lo tanto no cae dentro de las condiciones habituales que están asociadas a una ecuación en derivadas parciales en las que aparece el tiempo entre las variables. Nuestro objetivo es mostrar que con una transformación regular de las variables independientes y con un cambio de función incógnita es posible llegar a una ecuación parabólica reducida a la II forma canónica y al mismo tiempo transformar la condición final en una habitual condición inicial o de Cauchy para una ecuación parabólica. Presentamos el procedimiento “original” seguido por Black y Scholes (Black & Scholes, 1973). Tenemos en cuenta que, dado que en realidad el precio de una acción es siempre positivo, consideramos la ecuación (2.7) en $(0, T) \times (0, +\infty)$. Introducimos en lugar de (t, S) las dos nuevas variables (z, u) definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (t - T) \\ u &= \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left[\log \frac{S}{X} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - T) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Asumimos que $r \neq \frac{\sigma^2}{2}$. Luego hacemos un cambio de función incógnita tomando como nueva incógnita la función $Y(z, u)$ tal que:

$$c(t, S) = e^{r(t-T)} Y(z, u). \quad (2.10)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \partial_t z &= -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 & \partial_t u &= -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ \partial_S u &= \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{S} & \partial_{SS} u &= -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{S^2}, \end{aligned}$$

y aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas y denotando por simplicidad con Y_u y Y_z , la primera derivada con respecto a u y z , y con Y_{uu} la segunda derivada respecto a u de la función Y , obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t c(t, S) &= r e^{r(t-T)} Y(z, u) - e^{r(t-T)} [Y_u(z, u) + Y_z(z, u)] \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \\ \partial_S c(t, S) &= e^{r(t-T)} Y_u(z, u) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{1}{S} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{SS}c(t,S) &= e^{r(t-T)}Y_{uu}(z,u)\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)^2\frac{1}{S^2} \\ &\quad - e^{r(t-T)}Y_u(z,u)\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\frac{1}{S^2}\end{aligned}$$

Si sustituimos en la ecuación (2.7), dividiendo ambos lados por $e^{r(t-T)}$ y haciendo algunas simplificaciones, deducimos:

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(Y_z+Y_u) &+ \frac{\sigma^2}{2}\left[\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)^2Y_{uu}-\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)Y_u\right] \\ &+ r\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)Y_u = 0.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Al dividir ambos miembros de (2.11) por $\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)$ y simplificando, obtenemos:

$$-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(Y_z+Y_u) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)Y_{uu} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)Y_u = 0.$$

por la cual

$$-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)Y_z + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)Y_{uu} = 0,$$

y dividiendo por $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)$ llegamos a la siguiente ecuación:

$$Y_z = Y_{uu} \quad (2.13)$$

que tiene la misma forma de la ecuación de calor (1.21) homogénea en dos variables en la cual en lugar de la variable de tiempo t y la variable de espacio x aparecen respectivamente, las variables z y u definidas previamente y $a = 1$.

Ahora mostramos que con las nuevas variables independientes y con la nueva función incógnita la condición (2.8), que resultaba final para la ecuación (2.7), se transforma en una condición inicial para la ecuación transformada (2.13).

De hecho, por las ecuaciones (2.9) y (2.10):

$$c(T, S_T) = e^{r(T-T)}Y\left(0, \left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\log\frac{S_T}{X}\right) = Y(0, u_T)$$

Por tanto (2.8) se reduce a:

$$Y(0, u_T) = \max\{S_T - X, 0\} \quad (2.14)$$

ya que para $t = T$ tenemos $z = 0$.

Vamos a expresar el segundo miembro de esta condición inicial utilizando las nuevas variables. Observemos primero que a partir de las ecuaciones (2.9) se deduce:

$$\log \frac{S}{X} = \frac{u - z}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}.$$

Entonces para $t = T$, o sea $z = 0$, tenemos

$$\log \frac{S_T}{X} = \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \Rightarrow S_T = X e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}}$$

En conclusión, la condición (2.8) ahora se escribe en la forma:

$$Y(0, u_T) = \max \left\{ X \left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\} \quad (2.15)$$

Esta condición se puede especificar ulteriormente como sigue.

Consideramos primero el caso en el cual $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) > 0$. Entonces

$$e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \geq 0 \Leftrightarrow u_T \geq 0.$$

Por lo cual en el caso que $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) > 0$

$$\begin{aligned} \max \left\{ X \left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\} &= 0 & \text{si } u_T < 0 \\ \max \left\{ X \left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\} &= X \left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right) & \text{si } u_T \geq 0 \end{aligned}$$

y la ecuación (2.15) se escribe

$$\begin{aligned} Y(0, u_T) &= 0 & \text{si } u_T < 0 \\ Y(0, u_T) &= X \left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right) & \text{si } u_T \geq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se procede de manera similar para el caso: $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) < 0$.

En conclusión, la determinación del precio de una call europea se basa en la búsqueda de la solución en $[0, z_0) \times \mathbb{R}$ del problema:

$$\begin{cases} Y_z = Y_{uu} \\ Y(0, u) = g(u) \end{cases}$$

obtenido al asociar a la ecuación (2.13) la condición inicial, y en donde, si por el momento nos limitamos a considerar el caso $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) > 0$, g es definida como:

$$\begin{aligned} g(u) &= 0 & \text{si } u < 0 \\ g(u) &= X \left(e^{\frac{u}{\sigma^2 - 1}} - 1 \right) & \text{si } u \geq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ahora deducimos la solución de la ecuación (2.13), es decir, una función $v \in C^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$, derivable con continuidad una vez en el tiempo y dos en el espacio, que satisface la ecuación dada en cada punto (t, x) con $t > 0$. Hay que tener en cuenta que una condición necesaria para que el problema de Cauchy tenga solución es que $g \in C(\mathbb{R})$. Se pueden demostrar varios teoremas de existencia y unicidad de la solución del problema (2.13), (2.15) dependiendo de las propiedades de regularidad de la función g . Un teorema clásico de existencia de la solución de Cauchy para la ecuación de calor requiere que la función g sea continua y acotada en $\mathbb{R}$. Pero para el problema de Black-Scholes, tal teorema no es aplicable porque la función g no está acotada. Para lo que queremos conseguir, es conveniente que enunciemos el siguiente teorema que establece la existencia de la solución del problema de Cauchy (2.13), (2.15) en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ con la función g no acotada.

Teorema 2.1 Supongamos que la función g es continua en $\mathbb{R}$ y es tal que

$$|g(x)| \leq C e^{d|x|^\gamma} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

donde C, d, γ son constantes positivas con $\gamma < 2$. Entonces la función $v(t, x)$ definida $\forall (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y) g(y) dy \quad (2.19)$$

Con

$$K_t(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

es la solución del problema de Cauchy (2.13), (2.15) en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Demostración

En primer lugar, observamos que la función

$$K_t(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

llamada **núcleo de Gauss-Weierstrass**, definida en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$, para cada y fijo en $\mathbb{R}$ tiene las siguientes propiedades (Zayed, 1996, cap.18):

1. $\lim_{t \rightarrow 0^+} K_t(x, y) = 0$
2. $K_t(x, y) \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$
3. $K_t(x, y)$ es la solución de la ecuación del calor (2.13) en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$;
4. $\forall t > 0$ fijo tenemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y) dy = 1$

La propiedad 4 se obtiene inmediatamente al observar que para y fijo en $\mathbb{R}$ y para $t > 0$ fijo, el núcleo de Gauss-Weierstrass representa la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria con distribución gaussiana teniendo media igual a y y varianza igual a $2t$. Si fijamos x en $\mathbb{R}$, el núcleo de Gauss-Weierstrass, en función de (t, y) tiene propiedades que son completamente similares a las cuatro enumeradas anteriormente.

Ahora mostramos que $v \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$, en lugar de $C^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$, es decir que la función v tiene derivadas continuas de cada orden con respecto a t y a x en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ y que tales derivadas se obtienen de (2.19) derivando el Núcleo de Gauss-Weierstrass bajo el signo integral. Con este fin observamos que, si derivamos con respecto a t bajo el signo de integral, la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy \quad (2.20)$$

obtenemos

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + \frac{1}{4} \frac{1}{t^{5/2}} (x-y)^2 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \right] g(y) dy$$

mientras que si derivamos la igualdad (2.20) con respecto a x bajo el signo de integral obtenemos

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{t^{3/2}} (x-y)^2 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \right] g(y) dy.$$

Por lo cual, si derivamos con respecto a t y x un cierto número de veces la igualdad (2.20) bajo el signo de integral, obtenemos una combinación lineal en coeficientes constantes de integrales del tipo:

$$I_{k,m}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} (x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy, \quad (2.21)$$

donde k, m son números enteros no negativos. En particular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} I_{0,0}(t,x)$$

Por el teorema de derivación bajo el signo integral (Azagra, 2007, cap.8), el resultado que pretendemos obtener se prueba si mostramos que la integral (2.21) es uniformemente convergente con respecto a (t,x) en cada rectángulo $\mathcal{R} := [t_0, T] \times [-l, l] \in \mathbb{R}^2$ con t_0, T, l números positivos arbitrarios, cualesquiera que sean k, m .

Recordamos (Azagra, 2007, cap.6) que la integral (2.21) converge uniformemente con respecto a (t,x) en cada rectángulo $[t_0, T] \times [-l, l]$ si en cada uno de estos rectángulos existe una función $\varphi(y)$ no negativa y integrable en $\mathbb{R}$ tal que

$$\left| \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} (x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \leq \varphi(y) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Por otro lado, $\forall (t,x) \in \mathcal{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\left| \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} (x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \leq \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} (l - |y|)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |g(y)| \quad (2.23)$$

Además, si $(t,x) \in \mathcal{R}$, podemos escribir:

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \leq e^{-\frac{(x-y)^2}{4T}} = e^{-\frac{x^2+y^2-2xy}{4T}} = e^{-\frac{x^2}{4T}} e^{-\frac{-y^2+2xy}{4T}} \leq e^{-\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta (2.23) y (2.24), tomando un número $\delta > 0$, que por el momento supongamos arbitrario, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} (x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \\ \leq \frac{1}{t_0^{k+\frac{1}{2}}} (l+|y|)^m e^{-\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} |g(y)| e^{-\frac{y^2}{\delta}} \\ \forall (t, x) \in \mathcal{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por la desigualdad (2.18) tenemos:

$$|g(y)| e^{-\frac{y^2}{\delta}} \leq C e^{d|y|^\gamma} e^{-\frac{y^2}{\delta}} = C e^{-\frac{y^2}{\delta}(1-d\delta|y|^{\gamma-2})}. \quad (2.26)$$

Siendo por hipótesis $\gamma < 2$, deducimos que la función

$$\frac{C}{t_0^{k+\frac{1}{2}}} (l+|y|)^m e^{-\frac{y^2}{\delta}(1-d\delta|y|^{\gamma-2})} \quad (2.27)$$

es integrable en $\mathbb{R}$.

Luego, para concluir que toda integral $I_{k,m}(t, x)$ es uniformemente convergente respecto a (t, x) en todo rectángulo $\mathcal{R}$ es suficiente demostrar que, eligiendo apropiadamente el número δ , la función

$$e^{-\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} = e^{\frac{(4T-\delta)y^2+2l\delta|y|}{4T\delta}} \quad (2.28)$$

es acotada en $\mathbb{R}$.

Con este fin definimos:

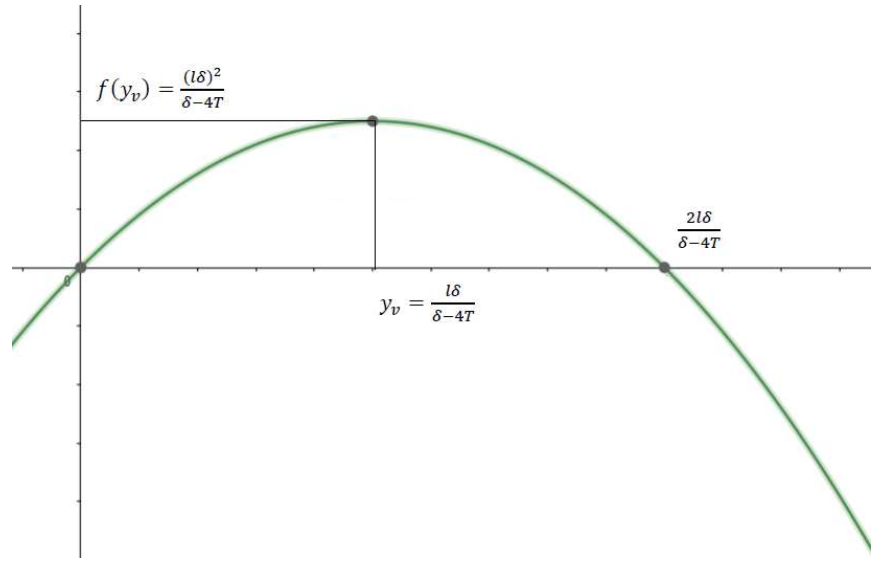
$$f(y) = (4T - \delta)y^2 + 2l\delta|y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

y supongamos $\delta > 4T$.

Como se verifica fácilmente, la gráfica de la función $f(y)$ para $y \geq 0$ es el arco de una parábola que parte del origen y tiene la convexidad hacia abajo, tiene el vértice en el punto de abscisas $y_v = \frac{l\delta}{\delta-4T}$ y ordenada $f(y_v) = \frac{(l\delta)^2}{\delta-4T}$, interseca el eje y nuevamente en el punto de abscisas $\frac{2l\delta}{\delta-4T}$ y después de ese punto se encuentra debajo del eje y .

Entonces

$$f(y) \leq f(y_v) = \frac{(l\delta)^2}{\delta-4T} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$



de lo que deducimos

$$e^{\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} \leq e^{\frac{-\left(\frac{l\delta}{\delta-4T}\right)^2+2l\left|\left(\frac{l\delta}{\delta-4T}\right)\right|\left(\frac{l\delta}{\delta-4T}\right)}{4T}} e^{\frac{\left(\frac{l\delta}{\delta-4T}\right)^2}{\delta}} = e^{\frac{(l\delta)^2}{4T(\delta-4T)}} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

En conclusión, tomando

$$M = \frac{C}{t_0^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{(l\delta)^2}{4T(\delta-4T)}},$$

es verdadera la desigualdad (2.22) con $\varphi(y)$ dada por

$$\varphi(y) = M(l + |y|)^m e^{-\frac{y^2}{\delta}(1-d\delta|y|^{r-2})}.$$

Por lo tanto, $v \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$, es decir, la función v tiene derivadas continuas de cualquier orden con respecto a t y a x en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ y estas derivadas se obtienen de la definición (2.19) derivando el núcleo de Gauss-Weierstrass bajo el signo integral. De este resultado deducimos inmediatamente que v es la solución de la ecuación (2.3) en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, ya que lo es el núcleo de Gauss-Weierstrass como función de (t, x) para cada y fijo en $\mathbb{R}$. De hecho, tenemos

$$\partial_t v(t, x) - \partial_{xx}^2 v(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_t K_t(x, y) - \partial_{xx}^2 K_t(x, y)] g(y) dy = 0$$

$$\forall (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$$

Para que el teorema se demuestre completamente, es necesario demostrar que la función v , que es continua en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, también es continua para $t = 0$. Teniendo en cuenta que v está definida para $t = 0$, es suficiente mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t, x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En aras de la brevedad, omitimos la prueba de este último resultado que se puede ver en (Friedman, 1983, cap 10). ■

Volvamos ahora al problema de Black-Scholes:

$$Y_z = Y_{uu} \tag{2.29}$$

$$Y(0, u) = g(u) \tag{2.30}$$

donde g se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(u) &= 0 & \text{si } u < 0 \\ g(u) &= X \left(e^{\frac{u}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) & \text{si } u \geq 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dado que el problema inicial se consideró en $(0, T] \times (0, +\infty)$, para la relación (2.9) que existe entre las variables anteriores (t, S) y las nuevas (z, u) , el problema (2.29),

(2.30), debe resolverse en $[0, z_0) \times \mathbb{R}$ donde z_0 es el valor que asume z para $t = 0$ dado por

$$z_0 = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T.$$

Como es fácil de verificar, la función g de la (2.31) satisface las hipótesis del Teorema 2.1. De hecho, teniendo en cuenta la definición de g , vemos que es continua en $\mathbb{R}$ y que verifica la siguiente desigualdad

$$|g(u)| \leq X e^{\frac{|u|}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, la condición (2.18) se satisface con

$$C = X, \quad d = \frac{1}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}, \quad \gamma = 1.$$

Entonces, gracias al Teorema 2.1, sabemos cómo escribir la solución del problema de Cauchy para la ecuación (2.29) con el dato inicial g y la solución del problema de Black-Scholes es su restricción a $[0, z_0) \times \mathbb{R}$. Por lo tanto, la solución del problema (2.29), (2.31) está dada por

$$Y(z, u) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4z}} X \left(e^{\frac{\xi}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right) d\xi \quad \forall (z, u) \in [0, z_0) \times \mathbb{R} \quad (2.32)$$

Hacemos un cambio de la variable de integración en (2.32), poniendo $q = -\frac{u-\xi}{\sqrt{2z}}$. Teniendo en cuenta que si $\xi = 0$ entonces $q = -\frac{u}{\sqrt{2z}}$, y que si $\xi \rightarrow +\infty$ entonces $q \rightarrow +\infty$ y que además $dq = \frac{d\xi}{\sqrt{2z}}$, la ecuación (2.31) se escribe en la forma

$$Y(z, u) = \int_{-\frac{u}{\sqrt{2z}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \left(e^{\frac{q\sqrt{2z}+u}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right) dq \quad (2.33)$$

En este punto definimos:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Entonces usando las ecuaciones (2.9) y para $t < T$:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{2z}} &= \frac{\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \log \frac{S}{X} + \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (T-t)}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (T-t)}} \\ &= \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\frac{q\sqrt{2z} + u}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} = \sigma q\sqrt{T-t} + \log \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \quad (2.36)$$

por lo tanto, la ecuación (2.33) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} Y(z, u) &= \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \left(e^{\sigma q\sqrt{T-t} + \log \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - 1 \right) dq \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \frac{S}{X} e^{\sigma q\sqrt{T-t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} dq \\ &\quad - \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X dq \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq - XN(d_2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde hemos utilizado:

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

que es la función de distribución para una distribución gaussiana estándar (media 0 y varianza 1) y en la integral $\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X dq$ hicimos el cambio de la variable de integración $q = -s$.

Con respecto a la integral $\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq$, cambiamos la variable de integración usando $y = q - \sigma\sqrt{T-t}$ por lo cual

$$q = -d_2 \Rightarrow y = -d_2 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1.$$

Por lo tanto, la integral se escribe como

$$\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq = S e^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = S e^{r(T-t)} N(d_1)$$

En conclusión, para $Y(z, u)$ encontramos la siguiente expresión:

$$Y(z, u) = S e^{r(T-t)} N(d_1) - X N(d_2) \quad (2.38)$$

Finalmente, para la relación (2.10) deducimos:

$$c(t, S) = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.39)$$

que es la **fórmula de Black-Scholes para evaluar el precio de una call europea**. Llegamos a la fórmula (2.39) asumiendo $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) > 0$. Al mismo resultado se llega planteando la hipótesis opuesta $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) < 0$.

Observamos que en la expresión de $c(t, S)$ aparecen S , el precio de la acción subyacente, y $Xe^{r(T-t)}$, que representa el precio de ejercicio descontado en el momento actual usando la formula (1.4), y que se ponderan con $N(d_1)$ y $N(d_2)$.

Observamos que en la fórmula de Black-Scholes, teniendo en cuenta las expresiones de d_1 y d_2 , para establecer el precio de una call europea en el momento actual se deben conocer los siguientes datos:

- El precio de ejercicio X y la fecha de ejercicio T establecida en el contrato;
- La tasa de interés de mercado r ;
- El precio S y la volatilidad σ de la acción subyacente.

Capítulo 3

Reorganizando la fórmula de Black-Scholes

En este capítulo se hará referencia al artículo de (Arnold, Nixon, & Shockley, 2003). La fórmula de Black-Scholes puede resultar compleja para el principiante. Reordenando y combinando algunas de las variables, se puede reducir el número de variables de cinco a dos: la razón monetaria de la opción (*moneyness ratio*) y su volatilidad ajustada al tiempo (*time-adjusted volatility*). Esto permite que una fórmula computacionalmente compleja como la de Black-Scholes se pueda contraer en una forma tabular, fácil de usar. El enfoque tabular proporciona una herramienta excelente para entender la estática comparativa² en la ecuación de Black-Scholes.

3.1 En camino a un abordaje tabular

Ya Cox y Rubinstein (1985) mostraron cómo crear una tabla bidimensional simple para calcular fácilmente los valores de una call europea. Armados con esta tabla y una calculadora básica, solo necesitamos tres cálculos simples para fijar el precio de cualquier opción de compra europea. Nuestro propósito es mostrar que las tablas de precios de opciones descritas por Cox y Rubinstein (1985) todavía tienen un valor importante. Seguimos los siguientes pasos:

- 1) Describimos el método de construcción de las tablas. A través de una simple manipulación, el modelo Black-Scholes se reduce a dos variables (la razón monetaria de la opción y su volatilidad ajustada en el tiempo), permitiendo la creación de una tabla de precios bidimensional.
- 2) Mostramos cómo podemos usar las tablas para ayudar a desarrollar la estática comparativa del modelo de Black-Scholes (es decir, lo que llamaremos las "griegas") sin referencia a derivadas parciales.
- 3) Presentamos una forma de invertir las tablas para que las volatilidades implícitas se puedan extraer rápidamente de los precios de las opciones.

3.1.1 Forma tabular de la fórmula de Black-Scholes

Rescribimos la fórmula de Black-Scholes y sus variables

$$c(t, S) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (3.1)$$

² La estática comparativa es un método en economía que consiste en comparar dos puntos de equilibrio. Se utiliza para contrastar dos situaciones, una antes y otra después de la modificación en una variable del modelo analizado.

en donde c es el precio de una call europea. Para calcular se deben conocer los siguientes datos:

- El precio de ejercicio X y la fecha de ejercicio T establecida en el contrato;
- La tasa de interés de mercado r ;
- El precio S y la volatilidad σ de la acción subyacente.

Se requieren cuatro pasos para llegar a la forma tabular de la formula (3.1):

- I. Definimos la razón monetaria de la opción (*Moneyness Ratio*) como

$$MR = \frac{S}{Xe^{-r(T-t)}}. \quad (3.2)$$

La razón monetaria de la opción es el cociente entre el precio de la acción subyacente y el valor descontado, usando el régimen de capitalización instantánea (1.4), del precio de ejercicio. Cuando

- $MR > 1$ la opción se dice **en dinero**;
- $MR = 1$ la opción se dice **a dinero**;
- $MR < 1$ la opción se dice **fuera de dinero**.

- II. Definimos la volatilidad ajustada al tiempo de la opción (*Time-Adjusted Volatility*) como

$$TAV = \sigma\sqrt{T-t}. \quad (3.3)$$

La volatilidad ajustada al tiempo de la opción es la volatilidad de la acción subyacente σ , ajustada al horizonte temporal de la opción $\sqrt{T-t}$, o sea el tiempo hasta la fecha de ejercicio.

- III. Dividimos ambos miembros de la formula (3.1) por S obteniendo

$$\frac{c}{S} = N(d_1) - \frac{X}{S} e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (3.4)$$

y reemplazando la (3.2) tenemos

$$\frac{c}{S} = N(d_1) - \frac{N(d_2)}{MR}. \quad (3.5)$$

Esto define el cociente $\frac{c}{S}$ llamado también multiplicador call-stock (CSM). El CSM será el resultado final que se encontrará en la tabla bidimensional que estamos elaborando. El precio de la opción se calculará multiplicando el CSM por el precio S de la acción subyacente.

- IV. Rescribimos la expresión de d_1 y d_2 (2.34) usando las fórmulas (3.2) y (3.3) de manera que la fórmula de Black-Scholes sea pueda expresar en función de los coeficientes MR y TAV . Entonces

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\log(MRe^{-r(T-t)}) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{TAV} \\ &= \frac{\log(MR) \log(e^{-r(T-t)}) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{TAV} \\ &= \frac{\log(MR) - r(T-t) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{TAV} \\ &= \frac{\log(MR) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{TAV} \end{aligned}$$

por lo cual

$$d_1 = \frac{\log(MR) + \frac{TAV^2}{2}}{TAV}. \quad (3.6)$$

De manera análoga, usando la igualdad (2.34)

$$d_2 = \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = d_1 - TAV$$

obtenemos

$$d_2 = \frac{\log(MR) - \frac{TAV^2}{2}}{TAV}. \quad (3.7)$$

La ecuación (3.4) se rescribe como

$$CSM = \frac{c}{S} = N\left(\frac{\log(MR) + \frac{TAV^2}{2}}{TAV}\right) - \frac{1}{MR} N\left(\frac{\log(MR) - \frac{TAV^2}{2}}{TAV}\right) \quad (3.8)$$

que requiere solo dos datos de ingreso: la razón monetaria MR y la volatilidad ajustada en el tiempo TAV . El cálculo resultante nos da el multiplicador call-stock (CSM), que fija fácilmente el precio de la opción. Por lo que podemos formar una tabla bidimensional de combinaciones de MR y TAV que presente el CSM resultante. Todo lo que se necesita hacer para calcular el precio de una opción es calcular su MR y TAV , buscar el CSM en la tabla y luego multiplicar el CSM por el precio de la acción.

El Anexo muestra cómo crear la tabla en Excel. La razón monetaria avanza a lo largo de las columnas, aumentando hacia la derecha, y la volatilidad ajustada en el tiempo está en la primera columna de la tabla, aumentando hacia abajo en las filas. Los incrementos en los tamaños de paso entre MR y TAV consecutivos pueden ser tan pequeños como se desee y la tabla puede ser de cualquier tamaño.

TAV	MR										
	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10
0.05	0.0003	0.0010	0.0027	0.0060	0.0116	0.0199	0.0311	0.0445	0.0595	0.0754	0.0914
0.1	0.0079	0.0118	0.0169	0.0232	0.0309	0.0399	0.0501	0.0613	0.0734	0.0863	0.0996
0.15	0.0225	0.0283	0.0349	0.0424	0.0507	0.0598	0.0695	0.0799	0.0907	0.1020	0.1136
0.2	0.0399	0.0467	0.0542	0.0622	0.0707	0.0797	0.0891	0.0988	0.1090	0.1193	0.1299
0.25	0.0586	0.0660	0.0738	0.0821	0.0906	0.0995	0.1086	0.1180	0.1276	0.1373	0.1472
0.3	0.0779	0.0857	0.0937	0.1020	0.1105	0.1192	0.1281	0.1372	0.1463	0.1556	0.1649
0.35	0.0976	0.1055	0.1136	0.1219	0.1304	0.1389	0.1476	0.1563	0.1651	0.1740	0.1829
0.4	0.1175	0.1255	0.1336	0.1418	0.1501	0.1585	0.1670	0.1754	0.1839	0.1925	0.2010
0.45	0.1374	0.1454	0.1535	0.1616	0.1698	0.1780	0.1862	0.1945	0.2027	0.2109	0.2191
0.5	0.1573	0.1653	0.1733	0.1813	0.1894	0.1974	0.2054	0.2134	0.2214	0.2293	0.2372
0.55	0.1772	0.1852	0.1931	0.2010	0.2088	0.2167	0.2245	0.2323	0.2400	0.2477	0.2553
0.6	0.1971	0.2049	0.2127	0.2204	0.2282	0.2358	0.2434	0.2510	0.2585	0.2659	0.2733
0.65	0.2168	0.2245	0.2322	0.2398	0.2473	0.2548	0.2622	0.2696	0.2769	0.2841	0.2912
0.7	0.2364	0.2440	0.2515	0.2590	0.2664	0.2737	0.2809	0.2880	0.2951	0.3021	0.3090
0.75	0.2559	0.2634	0.2707	0.2780	0.2852	0.2923	0.2994	0.3063	0.3132	0.3200	0.3267
0.8	0.2752	0.2825	0.2898	0.2969	0.3039	0.3108	0.3177	0.3244	0.3311	0.3377	0.3442
0.85	0.2944	0.3015	0.3086	0.3156	0.3224	0.3292	0.3358	0.3424	0.3489	0.3552	0.3615
0.9	0.3134	0.3204	0.3272	0.3340	0.3407	0.3473	0.3538	0.3601	0.3664	0.3726	0.3787
0.95	0.3321	0.3390	0.3457	0.3523	0.3588	0.3652	0.3715	0.3777	0.3838	0.3898	0.3957
1	0.3507	0.3574	0.3639	0.3704	0.3767	0.3829	0.3890	0.3951	0.4010	0.4068	0.4125

Ilustración 3.1: Tabla MR – TAV (la tabla se detalla en el Anexo 1)

En el Anexo, mostramos también los cálculos para las razones de monetarias que van desde 0.90 a 1.10 en incrementos de 0.02, y para volatilidades ajustadas en el tiempo que van desde 0.05 a 1.00 en incrementos de 0.05.

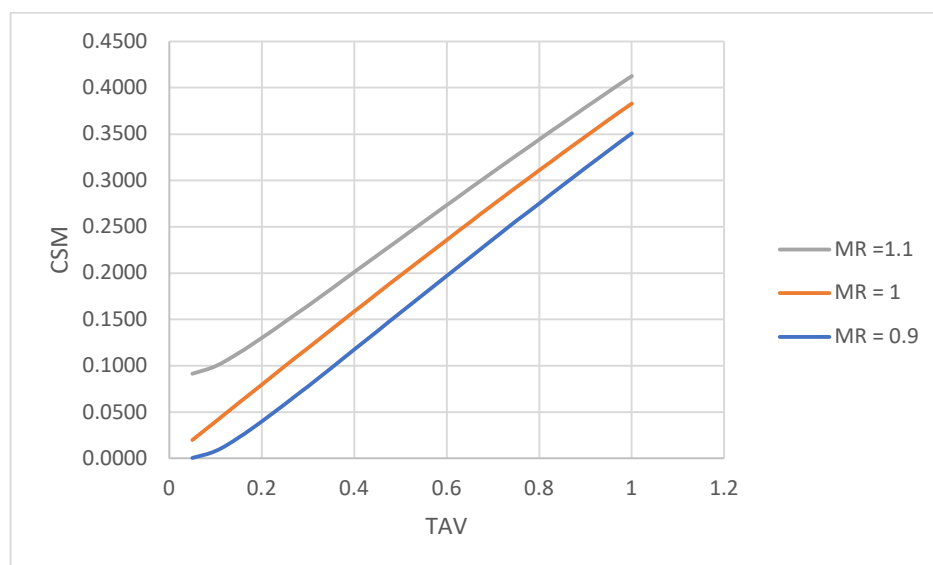


Ilustración 3.2: grafico TAV – CSM para MR fijo

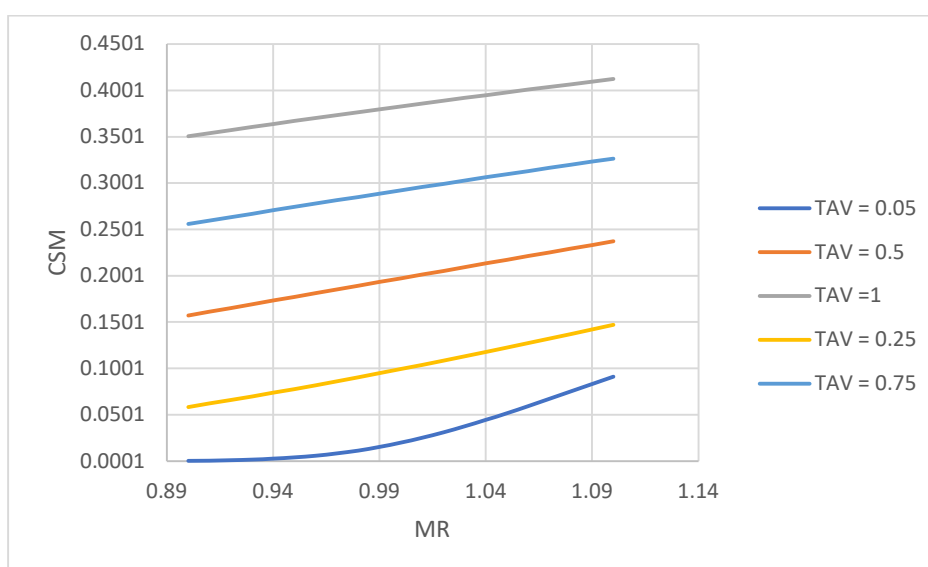


Ilustración 3.3: grafico MR – CSM para TAV fijo

La ilustración 3.2 muestra lo mismos cálculos de la tabla anterior en una elaboración grafica usando el software Mathematica. En el Anexo se encontrará el código para generar los gráficos.

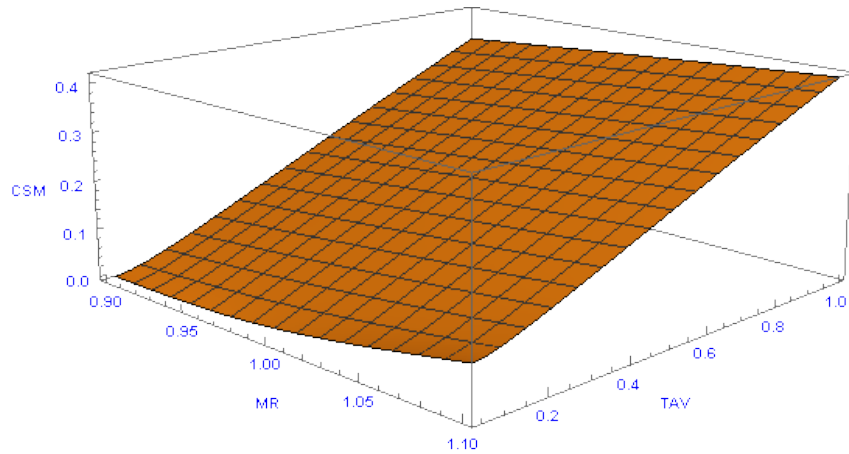


Ilustración 3.4: grafico 3D MR – TAV-CSM (el código se detalla en el Anexo)

3.1.2 Evaluación del precio de una opción: un ejemplo

Supongamos que el precio de la acción subyacente S es actualmente de 48\$, y se desea fijar el precio de una opción call a nueve meses $(T - t) = 0.75$ años, sobre las acciones con un precio de ejercicio X de 50\$. Supongamos además que la volatilidad de acción es del 52% ($\sigma = 0.52$) y la tasa libre de riesgo es del 8% ($r = 0.08$). Primero, calculamos la razón monetaria:

$$MR = \frac{S}{Xe^{-r(T-t)}} = \frac{48}{50e^{-0.08 \times 0.75}} = \frac{48}{47.08} = 1.02,$$

Y a continuación calculamos la volatilidad ajustada en el tiempo

$$TAV = \sigma\sqrt{T-t} = 0.52\sqrt{0.75} \cong 0.45$$

Ahora buscamos la columna para $MR = 1.02$ en la tabla de la ilustración 3.1 y leemos hacia abajo hasta llegar a la intersección con la fila para $TAV = 0.45$. El CSM para esta opción es 0.1862, por lo que el precio de la call es:

$$CSM \times S = 0.1862 \times 48 = 8.94\$.$$

La forma tabular del CSM es simple y flexible. El usuario no necesita una engorrosa tabla de la distribución normal acumulativa y puede concentrarse en otros aspectos del

precio de las opciones determinando los efectos relacionados en un cambio de los dos parámetros relevantes (MR y TAV).

Además, todas las opciones de compra europeas se pueden cotizar utilizando esta tabla. La unicidad de una opción se captura en sus cálculos asociados de MR y TAV ; todas las opciones con parámetros MR y TAV que sean iguales tendrán idénticos CSM . En consecuencia, no es necesario crear tablas diferentes para opciones de diferentes vencimientos o precios de ejercicio. Sin embargo, el aspecto del precio de las opciones de este enfoque tabular no es la principal contribución del artículo en examen (Arnold, Nixon, & Shockley, 2003), ya que se puede crear fácilmente una hoja de cálculo Excel para fijar el precio de las opciones. La principal contribución de este enfoque es la intuición detrás de lo que llamaremos las "griegas".

3.2 Las griegas

El término *griega* se refiere a cantidades que representan la sensibilidad del precio de la opción $c(t, S)$, a la variación de algunas de sus variables. Su nombre proviene del hecho de que cada una de las medidas se representa con diferentes letras griegas. Cada griega mide diferentes aspectos de su precio. Las griegas más frecuentes son:

- **Delta (Δ):** mide la sensibilidad a los cambios en el precio del subyacente. La Δ de una opción es la derivada de la función $c(t, S)$ con respecto al precio S del activo subyacente

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}.$$

Ya habíamos encontrado el Δ cuando definimos el diferencial estocástico en la ecuación (2.2).

- **Gamma (Γ):** mide la tasa de cambio de Δ . Γ es la segunda derivada de la función $c(t, S)$ con respecto al precio S del activo subyacente

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

Γ muestra cómo reaccionará la opción frente a un cambio importante en el precio S del activo subyacente.

- **Vega (v):** que en realidad no es una letra griega (v no es la letra que se emplea para designarla), mide la sensibilidad a la volatilidad σ del activo subyacente. v es la derivada de la función $c(t, S)$ con respecto a la volatilidad σ del subyacente

$$v = \frac{\partial c}{\partial \sigma};$$

- **Theta (Θ):** mide la sensibilidad al paso del tiempo. Θ es la negativa de la derivada de la función $c(t, S)$ con respecto al tiempo restante hasta la finalización de la opción

$$\Theta = -\frac{\partial c}{\partial (T - t)};$$

- **Rho (ρ):** mide la sensibilidad a la tasa de interés r . ρ es la derivada de la función $c(t, S)$ con respecto a la tasa de interés r

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r}.$$

Las griegas salen fácilmente de la forma tabular. Determinar de manera intuitiva las derivadas parciales del precio de la opción de compra respecto a sus parámetros se simplifica enormemente utilizando una presentación tabular.

Primero, consideramos cómo los cambios en el precio S del subyacente afectan el MR en la tabla del CSM . Porque el precio actual S del subyacente está en el numerador del MR , y entonces el MR aumenta a medida que aumenta el precio de las acciones subyacentes. En consecuencia, esto refleja un movimiento hacia la derecha en la Ilustración 3.2, lo que implica que el precio de la opción de compra aumenta. Se puede comprobar que un aumento en el MR refleja de hecho un aumento en el CSM y, por lo tanto, un aumento en el precio de la opción de compra. Alguien con poco conocimiento de las opciones puede ver cómo un cambio en el precio del activo subyacente afecta el precio de la opción. Este efecto representa el Delta (Δ) de la opción: la sensibilidad del precio de la opción al precio del activo subyacente. Este se calcula matemáticamente tomando la primera derivada con respecto al precio S del activo subyacente del modelo de Black-Scholes. Consideramos un ejemplo:

Supongamos de tener una call con una TAV del 20% y un MR de 1.0; mirando la tabla en la ilustración 3.1 se determina que el CSM es 0.0797. Si el precio del activo subyacente cae de 0.02 unidades a 0.98, el CSM se reduce en $0.0797 - 0.0707 = 0.0090$. Pero si el precio del activo subyacente aumenta de manera que el MR aumenta de 0.02 unidades (es decir, se mueve de 1.00 a 1.02), el CSM aumenta más: $0.0891 - 0.0797 = 0.0094$.

TAV	MR										
	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10
0.2	0.0399	0.0467	0.0542	0.0622	0.0707	0.0797	0.0891	0.0988	0.1090	0.1193	0.1299

En otras palabras, para una TAV del 20%, a medida que la MR aumenta de 0,98 a 1,00 a 1,02, el CSM cambia a una tasa no constante (primero en 0,0090 y luego en 0,0094). El valor de compra es *convexo* respecto al precio del activo subyacente.

Esto muestra lo que se conoce como Gamma (Γ) de una call. Gamma es la derivada segunda del precio de la opción de compra $c(t, S)$, respecto al precio S del valor subyacente. Generalmente, Delta y Gamma se usan juntos para protegerse contra movimientos de precios desventajosos. La presentación tabular proporciona una forma sencilla de comprender estas dos sensibilidades de la opción a las variaciones del precio del subyacente.

Como sabemos la Vega (v) de una call mide la sensibilidad del precio $c(t, S)$, en relación a un aumento en la volatilidad σ . El parámetro TAV aumenta a medida que aumenta la volatilidad σ y esto es equivalente a moverse hacia abajo en las filas en la ilustración 3.1 y notar que el CSM aumenta. En consecuencia, un aumento de la volatilidad σ conduce a un aumento del precio de la opción de compra.

Theta (Θ) mide la sensibilidad de la opción de compra en relación al alargamiento del vencimiento de una opción. Un cambio en el vencimiento de la opción de compra aumenta tanto en MR (al reducir su denominador) como la TAV . Este efecto doble es equivalente a moverse hacia la derecha y hacia abajo en la tabla de la ilustración 3.1. Ambos efectos elevan el precio de la opción de compra.

Rho (ρ) mide la sensibilidad de la opción de compra a un aumento en la tasa de interés r . La presentación tabular hace que ρ sea mucho más fácil de entender. El aumento de la tasa de interés r reduce el denominador del parámetro MR , pero no cambia la TAV . En consecuencia, el parámetro MR incrementa con un aumento de la tasa de interés r . El efecto se refleja en el movimiento de izquierda a derecha en la tabla de la ilustración 3.1, es decir, el valor de la call aumenta.

Esto también aclara el significado intuitivo detrás de la ρ ; un aumento en la tasa de interés r reduce el valor presente del precio de ejercicio X que debe pagar el titular de la opción call y, por lo tanto, aumenta el valor de la opción call.

Aunque no se identifica con una letra griega, también se puede evaluar la sensibilidad del precio de la opción de compra a un aumento en el precio de ejercicio X . El aumento del precio de ejercicio reduce el parámetro MR , porque el precio de ejercicio está en el denominador del MR . Esto se refleja en el movimiento de derecha a izquierda en la tabla de la ilustración 3.1. Al aumentar el precio de ejercicio X , se reduce el precio de la opción de compra.

3.3 La volatilidad implícita

Muchos operadores bursátiles de opciones afirman que en realidad negocian con la volatilidad σ . Esta interpretación surge debido a las cinco variables del modelo de Black-Scholes: cuatro son observables (tiempo hasta el vencimiento, precio de ejercicio, tasa libre de riesgo y precio actual del activo subyacente), mientras que la volatilidad no lo es. Por lo tanto, los operadores del mercado estarán de acuerdo en todo menos en el parámetro de volatilidad, y un buen operador puede comprar call con estimaciones de volatilidad más bajas y venderlas a otros con estimaciones más altas. Mirando la cotización de precio en el mercado, el operador determina una estimación de la volatilidad implícita, que junto con los cuatro parámetros observables da el precio de la opción.

Determinar la volatilidad implícita de una opción no es una tarea sencilla. Dada la importancia de la volatilidad para los operadores de opciones, presentamos una forma de llegar a la volatilidad ajustada en el tiempo TAV , de una opción a través del formato tabular usando la tabla del *CSM* la ilustración 3.1 como antes.

Por ejemplo, supongamos que la acción subyacente todavía cotiza a 48\$ por cada una, pero observamos que el precio de mercado de una call de 50\$ a nueve meses sobre la acción, ha aumentado a 9,86\$. El MR de la call es $\frac{48}{50 - 0.08 \times 0.75} = 1.02$, y el CSM es $\frac{9.86\$}{48\$} = 0.2054$.

En la tabla del *CSM*, se debe buscar la columna para $MR = 1.02$ para encontrar un CSM de 0.2054. Luego seguimos a la izquierda a lo largo de la fila para determinar la TAV . La TAV para esta call es del 50% que es la volatilidad a nueve meses.

TAV	MR										
	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10
0.05	0.0003	0.0010	0.0027	0.0060	0.0116	0.0199	0.0311	0.0445	0.0595	0.0754	0.0914
0.1	0.0079	0.0118	0.0169	0.0232	0.0309	0.0399	0.0501	0.0613	0.0734	0.0863	0.0996
0.15	0.0225	0.0283	0.0349	0.0424	0.0507	0.0598	0.0695	0.0799	0.0907	0.1020	0.1136
0.2	0.0399	0.0467	0.0542	0.0622	0.0707	0.0797	0.0891	0.0988	0.1090	0.1193	0.1299
0.25	0.0586	0.0660	0.0738	0.0821	0.0906	0.0995	0.1086	0.1180	0.1276	0.1373	0.1472
0.3	0.0779	0.0857	0.0937	0.1020	0.1105	0.1192	0.1281	0.1372	0.1463	0.1556	0.1649
0.35	0.0976	0.1055	0.1136	0.1219	0.1304	0.1389	0.1476	0.1563	0.1651	0.1740	0.1829
0.4	0.1175	0.1255	0.1336	0.1418	0.1501	0.1585	0.1670	0.1754	0.1839	0.1925	0.2010
0.45	0.1374	0.1454	0.1535	0.1616	0.1698	0.1780	0.1862	0.1945	0.2027	0.2109	0.2191
0.5	0.1573	0.1653	0.1733	0.1813	0.1894	0.1974	0.2054	0.2134	0.2214	0.2293	0.2372
0.55	0.1772	0.1852	0.1931	0.2010	0.2088	0.2167	0.2245	0.2323	0.2400	0.2477	0.2553
0.6	0.1971	0.2049	0.2127	0.2204	0.2282	0.2358	0.2434	0.2510	0.2585	0.2659	0.2733
0.65	0.2168	0.2245	0.2322	0.2398	0.2473	0.2548	0.2622	0.2696	0.2769	0.2841	0.2912
0.7	0.2364	0.2440	0.2515	0.2590	0.2664	0.2737	0.2809	0.2880	0.2951	0.3021	0.3090
0.75	0.2559	0.2634	0.2707	0.2780	0.2852	0.2923	0.2994	0.3063	0.3132	0.3200	0.3267
0.8	0.2752	0.2825	0.2898	0.2969	0.3039	0.3108	0.3177	0.3244	0.3311	0.3377	0.3442
0.85	0.2944	0.3015	0.3086	0.3156	0.3224	0.3292	0.3358	0.3424	0.3489	0.3552	0.3615
0.9	0.3134	0.3204	0.3272	0.3340	0.3407	0.3473	0.3538	0.3601	0.3664	0.3726	0.3787
0.95	0.3321	0.3390	0.3457	0.3523	0.3588	0.3652	0.3715	0.3777	0.3838	0.3898	0.3957
1	0.3507	0.3574	0.3639	0.3704	0.3767	0.3829	0.3890	0.3951	0.4010	0.4068	0.4125

Para convertir esto a términos anuales, simplemente se debe multiplicar 50% por la raíz cuadrada de $4/3$ para obtener una volatilidad implícita anual de 57.7%:
 $0.5 \times \sqrt{4/3} \cong 0.577$

Aunque el precio de la acción subyacente no ha cambiado, la opción call ha aumentado de valor porque ha aumentado la volatilidad.

Capítulo 4

Conclusiones

Una forma tabular del modelo de Black-Scholes simplifica enormemente los cálculos y facilita la comprensión de la sensibilidad del modelo a los cambios de parámetros dados. La tabla es fácil de generar en Excel y se puede invertir para obtener la volatilidad implícita. Aunque la presentación tabular no es nueva, la inversión de la tabla para producir volatilidad es una contribución nueva en el artículo que presentamos en esta tesis (Arnold, Nixon, & Shockley, 2003). Además, la exposición sobre las griegas es mucho más completa que la que existía anteriormente.

A parte de estos beneficios, si uno simplemente quiere educar a una audiencia sobre la aplicación del modelo Black-Scholes sin entrar en grandes detalles sobre el modelo, la presentación tabular es una alternativa muy viable. Los cálculos se simplifican y el significado intuitivo detrás de los griegos se demuestra fácilmente. Para las personas que necesitan comprender los atributos de las opciones, pero no necesariamente comprenden el precio de las opciones (por ejemplo, en una clase de introducción a las finanzas o una clase no financiera), la representación tabular es una buena solución. Se podría proporcionar la tabla y luego hacer preguntas o dar una conferencia usando la tabla. Además, esta interpretación de la fórmula de Black-Scholes se podría extender a otros tipos de opciones como por ejemplo las opciones que pagan dividendos, las opciones que tienen como subyacente unas tasas de cambio monetario (Foreign Exchange), contratos a futuro (Future). La interpretación tabular es excelente por su sencillez y esto es su punto de fuerza. Indudablemente se puede mejorar, sin embargo, al precio de una mayor complejidad.

El objetivo final no es subvertir las matemáticas del modelo Black-Scholes, más bien, es un complemento más sencillo, intuitivo y práctico.

Anexo

1.1 Determinación de la tabla para el *CSM*

La fórmula de la celda inicial se copia en el resto de la hoja de cálculo, asumiendo que uno ya ha creado una columna de valores para la volatilidad ajustada al tiempo (*TAV*) y una fila de valores de razón monetaria (*MR*). La configuración de Excel se puede aplicar a gradaciones más finas de la *TAV* y de la razón *MR* simplemente cambiando el valor inicial y/o el valor incremental. La fórmula es sustancialmente la igualdad (3.8) escrita usando las correspondientes fórmulas de Excel.

Formula =DISTR.NORM.ESTAND((LN(B\$2)+0.5*\$A3^2)/\$A3)-
DISTR.NORM.ESTAND((LN(B\$2)-0.5*\$A3^2)/\$A3)/B\$2

	A	B	C	D
1				
2	TAV	0.90	0.92	0.94
3	0.05	Formula	Copia Formula	Copia Formula
4	0.1	Copia Formula	Copia Formula	Copia Formula
5	0.15	Copia Formula	Copia Formula	Copia Formula
6	0.2	Copia Formula	Copia Formula	Copia Formula

2.1 Determinación de un gráfico 3D para el *CSM*

La visualización del gráfico en 3D se obtiene por medio del comando `Plot3D` que tiene como argumento la fórmula simplificada (3.8). Para expresar la fórmula de manera compatible con el lenguaje del Mathematica se usa la función `Probability[ $x \leq a$ ]` que devuelve la probabilidad del evento $\{x \leq a\}$ con $a \in \mathbb{R}$. Para los eventos x se considera una Distribución Gaussiana a media 0 y varianza 1 con la caracterización $x \approx \text{NormalDistribution}[]$. Se cierra el comando con algunas particularizaciones de estilo:

```
Plot3D[Probability[x ≤ (Log[MR] + 0.5 * TAV * TAV)/TAV, x
      ≈ NormalDistribution[]] − Probability[x
      ≤ (Log[MR] − 0.5 * TAV * TAV)/TAV, x
      ≈ NormalDistribution[]
      /MR, {MR, 0.9, 1.1}, {TAV, 0.05, 1}, AxesLabel
      → {MR, TAV, CSM}, Directive[Blue, Bold]]
```

Bibliografia

- Arnold, T., Nixon, T., & Shockley, R. (2003). Intuitive Black-Scholes Option Pricing with a Simple Table. *University of Richmond Scholarship Repository Finance Faculty Publications*, 46-55.
- Azagra, D. (2007). *Calculo Integral*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*(81(3)), 637–654.
- Evans, L. (1997). *Partial differential equations*. Berkeley: American Mathematical Society.
- Friedman, A. (1983). *Pertial differential equations of parabolic type*. Malabar: Krieger Publishing Company.
- Halmos, P. R. (1974). *Measure Theory*. New York: Springer - Verlag.
- Karatzas, I., & Shreve, S. (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Tokyo: McGraw-Hill.
- Pascucci, A. (2008). *Calcolo stocastico per la finanza*. Milano: Springer.
- Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. Mladinska Knjiga: McGraw-Hill.
- Salsa, S. (2010). *Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*. Milano: Springer .
- Zayed, A. (1996). *Handbook of function and generalized function transformations*. CRC Press.