

UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA
Facultad de Tecnología Informática



Carrera: Licenciatura en Matemática

Desarrollo matemático del comportamiento dinámico de un péndulo doble

Autor: Hernán Fernando Pérez
Directora: Dra. Samira Abdel Masih

***TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA***

- Diciembre de 2020 -

Firmas del jurado

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a mi querida Universidad Abierta Interamericana, por su excelente ámbito académico y acompañamiento durante la carrera.

A la Dra. Samira Abdel Masih, por guiarme, con la sabiduría y grandeza que en pocas personas pueden reconocerse, en la preparación de esta tesis, Por su paciencia en transmitirme y enseñarme mayores y nuevos conocimientos. Por su incansable entusiasmo en el acompañamiento y guía con tanta dedicación, profesionalismo y compromiso. Gracias, estimadísima profesora.

Al Ingeniero Fernando Lagomarsino, por su desinteresada e importante colaboración para el desarrollo del prototipo de análisis de la presente tesis. Mi gratitud para usted. A todos los docentes por su dedicación y consejos, gracias.

A mi familia, mis padres Jorge Pérez y Noemí Antonucci, los amo, ellos que siempre me alentaron y acompañaron en este estupendo camino de estudiar. Aun en momentos de incertidumbre y dificultad.

A mi hermano Martin y sobrina Sofía, los quiero.

A mis abuelos que ya no están y hoy estarían felices y orgullosos de su nieto.

A mis amigos que son muchos, en especial a mi amigo y hermano Peca.

En especial a Graciela, el amor de mi vida, que me ha dado a Lola nuestra hija, y juntas son el motor de mi vida, me han motivado muchísimo en esta etapa, esto es también para ustedes.

Y en especial a mi amiga Yesica, siempre codo a codo juntos en este bello camino. Sos la columna vertebral de este logro, socia muchas gracias.

Resumen

El presente trabajo analiza la publicación presentada por Julio Pozo y Jonathan Makuc, citada en la Referencia [1]. Allí se estudia el caso del péndulo doble, como ejemplo sencillo de un sistema físico que puede exhibir un comportamiento caótico. Para modelar matemáticamente este sistema, aplicaremos la Mecánica Lagrangiana. De este modo obtendremos un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones nos permitirán determinar los ángulos de desplazamiento de cada una de las masas que componen el péndulo doble. Así lograremos analizar y describir directamente el funcionamiento del sistema en términos de dos parámetros relevantes: las masas y las longitudes de los alambres del péndulo.

En base al modelo matemático diseñado, mostraremos la simulación del movimiento del péndulo mediante el software Wolfram Mathematica 11.0.

Posteriormente, utilizando una placa especialmente fabricada para este objetivo, se capturarán, en tiempo real, los ángulos de desplazamiento de dichas masas y se las comparará con los obtenidos mediante la simulación. Los resultados serán sorprendentes, ya que el modelo matemático reproduce de manera fiel la situación real.

Esta tesis pone de manifiesto cómo diversas ramas de la Ciencia, en este caso, la Física y la Informática, interactúan con la Matemática para crear modelos matemáticos que simulen una situación de la vida real.

Palabras claves:

Péndulo doble, Simulaciones en Wolfram Mathematica, Ecuaciones Diferenciales, Mecánica Lagrangiana.

Índice General

Introducción

<i>¿Qué es la Teoría del Caos?</i>	7
<i>¿Cuándo surgió La Teoría del Caos?</i>	7
<i>El péndulo doble: un ejemplo de sistema caótico</i>	9

Capítulo 1: Nociones matemáticas previas

<i>Sistemas dinámicos y su modelado</i>	10
<i>Ecuaciones diferenciales ordinarias</i>	11
<i>Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias</i>	12
<i>Resolución de ecuaciones diferenciales lineales, a coeficientes constantes y homogéneas</i>	13
<i>Sistemas de ecuaciones diferenciales</i>	14
<i>Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales</i>	16
<i>Resolución de sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, lineales, homogéneas y a coeficientes constantes</i>	18
<i>Resolución de sistemas de dos ecuaciones diferenciales de orden superior, lineales, a coeficientes constantes y homogéneas</i>	25
<i>Estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales</i>	28
<i>Diagrama de fase de un sistema autónomo</i>	36
<i>Puntos críticos de un sistema autónomo</i>	37
<i>Clasificación de los puntos críticos</i>	38
<i>Descripción de los puntos críticos para sistemas autónomos lineales planos</i>	41
<i>Descripción de los puntos críticos para sistemas autónomos: Caso General</i>	42
<i>Aplicaciones del estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales</i>	47
<i>Aplicaciones ecológicas: depredadores y presas</i>	48
<i>Aplicaciones a la Meteorología: El atractor de Lorenz</i>	51

Capítulo 2: Nociones de Física

<i>Estudio del movimiento de una partícula</i>	55
<i>Energía cinética, potencial y mecánica</i>	58
<i>Fuerzas conservativas y no conservativas</i>	58

<i>Fuerzas con las que trabajaremos</i>	60
<i>La Mecánica Lagrangiana</i>	62
<i>Desarrollo de la ecuación de movimiento de un péndulo simple</i>	64
<i>¿Qué es un péndulo simple?</i>	64
<i>Diagrama de Fase del péndulo simple: estudio cualitativo</i>	68
<i>Simulación del movimiento del péndulo simple</i>	72
<i>Código fuente del programa que simula el movimiento de un péndulo simple</i>	74

Capítulo 3: Análisis del péndulo doble

<i>¿Qué es un péndulo doble?</i>	75
<i>Cálculo del Lagrangiano</i>	76
<i>Cálculo de las Ecuaciones de Euler-Lagrange</i>	78
<i>Estudio cualitativo del péndulo doble sin rozamiento</i>	80
<i>Experimentando el comportamiento caótico</i>	92
<i>Simulación del movimiento del péndulo doble sin rozamiento</i>	94
<i>Código fuente del programa que simula el movimiento de un péndulo doble</i>	97
<i>Movimiento del péndulo doble considerando el rozamiento del aire</i>	101
<i>Simulación del movimiento del péndulo doble con rozamiento</i>	104

Capítulo 4: Una prueba experimental

<i>Una prueba experimental</i>	106
--------------------------------	-----

Capítulo 5: Conclusiones

<i>Conclusiones</i>	110
<i>Referencias</i>	111

Introducción

¿Qué es la Teoría del Caos?

Cuando se habla en la vida cotidiana de “caos”, es común relacionar esta palabra con la noción de “desorden”, “ausencia de reglas” o de “comportamiento imprevisible”. Pero en el mundo de la Ciencia este concepto tiene un significado completamente diferente, ya que al afirmar que cierto fenómeno tiene un comportamiento caótico, se hace referencia al *caos determinístico*, es decir, a ciertos sistemas dinámicos que pueden determinarse, en cada instante, cómo evolucionan, pero que son muy sensibles a las condiciones iniciales. Pero ¿qué significa “sensibilidad a las condiciones iniciales”? Significa que un pequeño cambio en las condiciones iniciales provocará que el sistema evolucione de manera diferente, aunque dicho cambio sea muy pequeño.

Son numerosos los fenómenos de la naturaleza que tienen estas características y, para estudiarlos exhaustivamente, surgió *La Teoría del Caos*.

Más específicamente, *La Teoría del Caos* es la rama de la Matemática y de otras Ciencias (Física, Biología, Meteorología, entre otras) que estudia sistemas dinámicos, modelados matemáticamente mediante un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales y que son muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales.

El Sistema Solar, las placas tectónicas y los fluidos en régimen turbulento son ejemplos de tales sistemas. El cuerpo humano tampoco escapa a fenómenos de tipo caótico. Por ejemplo, la actividad eléctrica del cerebro puede registrarse mediante un electroencefalograma (EEG). Según la publicación presentada por Rivera Durán y Campos Cantón (véase en la Referencia [2]), se ha observado que los EEG provenientes de pacientes sanos manifiestan actividad caótica en el sistema nervioso. Es decir, que el comportamiento caótico en la actividad eléctrica cerebral, lejos de ser un signo de enfermedad, representa un estado saludable.

¿Cuándo surgió La Teoría del Caos?

La Teoría del Caos surgió en la década de 1950 al aparecer los primeros ordenadores, gracias a los cuales se pudieron graficar las soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Como sabemos, la mayoría de estos sistemas no tienen solución analítica.

Podemos afirmar que esta teoría comenzó formalmente en 1963, cuando el matemático y meteorólogo estadounidense Edward Lorenz (1917-2008), en su intento por predecir el clima con ayuda de una computadora, descubrió casualmente que pequeñas diferencias en los datos de entrada producían un gran impacto en las predicciones resultantes.

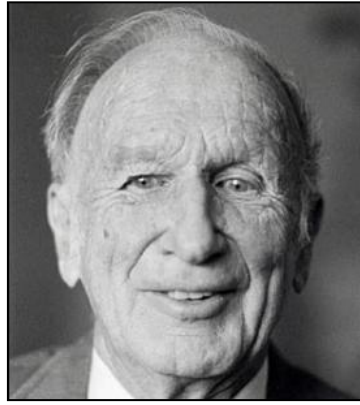


Figura 1: Edward Lorenz, considerado el Padre de la Teoría del Caos.
Fuente: <https://www.elmundo.es/elmundo/2008/04/17/obituarios/1208392642.html>

Las ecuaciones diferenciales con las que trabajó para predecir el tiempo en la atmósfera son las siguientes, conocidas mundialmente como *Ecuaciones de Lorenz*:

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

Donde

$$\begin{cases} \sigma = 10 \\ \rho = 28 \\ \beta = 8/3 \end{cases}$$

Cuando Lorenz tomó las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = 27$$

Y representó gráficamente, en una computadora, la proyección de los puntos $(x(t), y(t), z(t))$ sobre uno de los planos coordenados, se encontró con una imagen que hoy se conoce como *atractor de Lorenz*, el cual se muestra continuación.



Figura 2: El atractor de Lorenz
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_del_caos

Tras hacer pruebas con diferentes parámetros (tanto valores iniciales como las constantes del sistema), Lorenz llegó a la conclusión de que las simulaciones eran muy

diferentes para condiciones iniciales muy próximas. Así, los sucesos de tipo caótico son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales, a punto tal que alteraciones muy pequeñas en las causas pueden provocar grandes efectos. De aquí que Lorenz haya acuñado el concepto de “*efecto mariposa*” para explicar metafóricamente este fenómeno, como si un pequeño aleteo de una mariposa fuera capaz de producir un tornado. En el Capítulo 1 nos ocuparemos con más detalle de las Ecuaciones de Lorenz.

El péndulo doble: un ejemplo de sistema caótico

El péndulo doble es uno de los sistemas caóticos más simples que existen. Consiste en un péndulo unido a otro péndulo, según se muestra en la Figura 3.

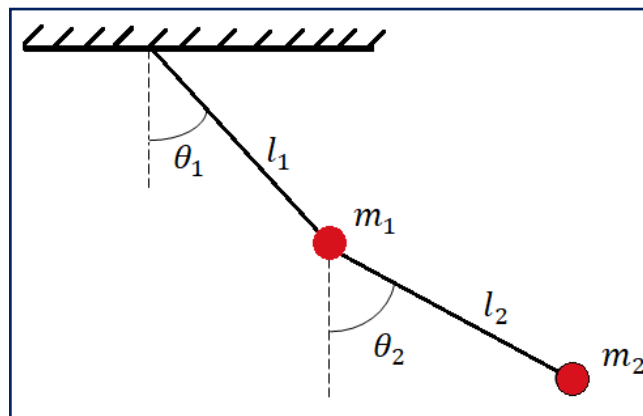


Figura 3: Péndulo doble

Se supone que el sistema oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad, que las masas m_1 y m_2 están atadas a dos alambres rígidos de masas insignificantes, de longitudes l_1 y l_2 respectivamente. Su trayectoria es irregular y puede determinarse resolviendo un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales. Además, dando al péndulo una posición inicial ligeramente diferente se obtiene, pasado un tiempo, una trayectoria completamente diferente. Estas características son las que definen el comportamiento caótico del péndulo doble. De todo esto nos ocuparemos en este trabajo de tesis.

Capítulo 1

Nociones matemáticas previas

En este capítulo expondremos los conceptos matemáticos que necesitaremos para desarrollar este trabajo.

1.1 Sistemas dinámicos y su modelado

El estudio de sistemas dinámicos es una rama de la Matemática que adquiere gran interés debido a sus aplicaciones en otras ciencias, ya que permite comprender y predecir su comportamiento. Su definición es la siguiente:

Definición 1.1 : Sistemas y Sistemas dinámicos

Un Sistema es un conjunto formado por elementos que interactúan entre sí.

Un Sistema dinámico es un sistema que cambia o evoluciona con el paso del tiempo.

Ejemplo 1.2

El Sistema Solar, un conjunto de peces que se reproducen con el tiempo o dos cuerpos que se dejan caer a una determinada altura, son ejemplos de sistemas dinámicos.

Para estudiar y predecir el comportamiento de un sistema dinámico es preciso crear un modelo matemático. Veamos qué significa este concepto.

Definición 1.3: Modelo

*Un **modelo** es una representación simplificada de la realidad, una aproximación a la misma, con el objeto de poder analizar y describir esta realidad.*

Definición 1.4: Modelo Matemático

*Un **modelo matemático** es la descripción matemática de un fenómeno de la vida real. Dicha descripción puede llevarse a cabo mediante una función, una ecuación algebraica o una ecuación diferencial.*

Como mencionamos anteriormente, los modelos matemáticos nos permiten estudiar el fenómeno, comprenderlo y predecir su comportamiento.

Numerosas ramas de la ciencia requieren describir matemáticamente cierto fenómeno, ya que esto ayuda a tomar decisiones correctas.

Por ejemplo, un biólogo podría estar interesado en determinar, en cada instante, la cantidad de bacterias existentes en un cultivo a fin de controlar su reproducción.

O un médico desearía saber qué le ocurriría a su paciente, en caso de duplicarle la dosis del medicamento que debe ingerir.

La mayoría de los modelos matemáticos se plantean en términos de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales. De esto nos ocuparemos a continuación.

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias

La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó a desarrollarse a fines del siglo XVII en estrecha relación con el naciente Cálculo Diferencial e Integral. Las ecuaciones diferenciales surgieron a raíz de la investigación de distintos problemas de la Física, como la Ley de Gravitación Universal o el movimiento de un péndulo, entre otros. Pero a medida que la ciencia avanzaba, se planteaban nuevos problemas que necesitaban ser formulados en términos de una ecuación diferencial. Es así como su uso se extendió no sólo a la Física, sino también, por ejemplo, a la Biología, la Medicina la Economía y la Química. Veremos primeramente su definición.

Definición 1.5: Ecuación Diferencial Ordinaria

Una ecuación diferencial ordinaria (simbolizada mediante la sigla EDO) es una ecuación que contiene las derivadas de una función real de variable real, llamada $y(t)$. En este caso, la incógnita de la ecuación es la función $y(t)$.

Ejemplo 1.6

Las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales ordinarias:

- 1) $y'(t) = t^2 \operatorname{sen}(t)$
- 2) $10y'''(t) - 2y'(t) = y(t)$

Observación

Siempre supondremos que el argumento de la función incógnita es la variable independiente t . Por esta razón en algunos casos omitiremos dicho argumento escribiendo, por ejemplo, y' en lugar de $y'(t)$.

Definición 1.7: Orden de una ecuación diferencial ordinaria

El orden de una ecuación diferencial ordinaria es la derivada de mayor orden que figura en la ecuación.

Ejemplo 1.8

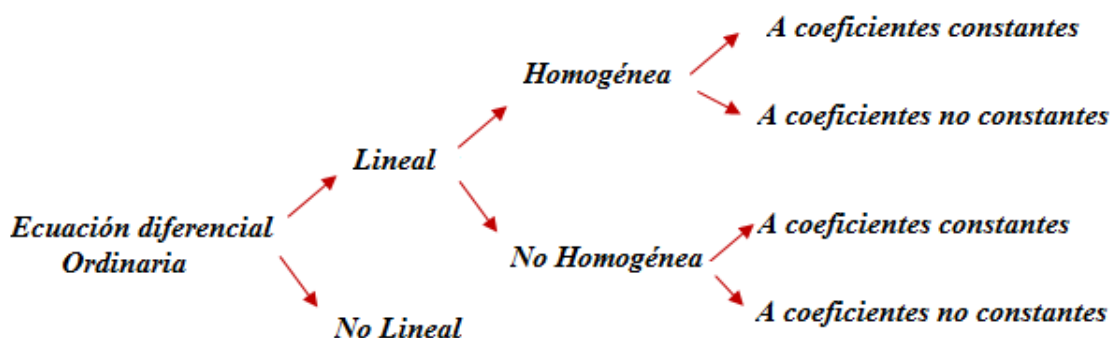
Indicar el orden de las ecuaciones diferenciales del Ejemplo 1.6

Solución

- 1) Orden 1 o de primer orden.
- 2) Orden 3.

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se clasifican del siguiente modo:



Ecuación Diferencial Lineal

Una ecuación diferencial de orden n es lineal si es de la forma

$$a_n(t) y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = g(t) \quad [I]$$

Donde

$y^{(k)}(t)$ es la derivada k -ésima de $y(t)$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$.

$a_i(t)$ son funciones continuas para $i = 1, 2, \dots, n$.

Ecuación Diferencial No Lineal

Cuando no es de la forma que indica la expresión [I].

Ecuación Diferencial Lineal homogénea

Cuando, en la expresión [I], $g(t) = 0 \quad \forall t$.

Ecuación Diferencial Lineal no homogénea

Cuando, en la expresión [I], $g(t) \neq 0$.

Ecuación Diferencial Lineal a coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de orden n es lineal y a coeficientes constantes si es de la forma

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t)$$

Donde

a_i son constantes reales para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 1.9

Clasificar la ecuación diferencial $3t y^{(4)}(t) + 8 y''(t) + 2y(t) = \sin(t)$

Solución

La ecuación es de orden 4, lineal, no homogénea y a coeficientes no constantes.

1.3 Resolución de ecuaciones diferenciales lineales, a coeficientes constantes y homogéneas.

En esta sección veremos un método para resolver este tipo de ecuaciones, llamado el *Método de la Ecuación Característica*. Por razones didácticas, el siguiente Teorema mostrará cómo es la solución cuando la ecuación es de segundo orden ya que, si el orden es superior a 2, el procedimiento es similar.

Teorema 1.10: Método de la Ecuación Característica

Sea la ecuación diferencial

$$a.y''(t)+b.y'(t)+c.y(t)=0$$

Con a, b, c constantes reales.

Sean λ_1, λ_2 las raíces de la Ecuación Característica:

$$a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$$

Entonces

1) Si λ_1, λ_2 son reales y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la solución es

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Donde c_1, c_2 son constantes.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la solución es:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Donde c_1, c_2 son constantes.

3) Si λ_1, λ_2 son complejos conjugados, es decir, $\lambda_1 = \alpha + i.\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i.\beta$ entonces la solución es

$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta.t) + c_2 \sen(\beta.t))$$

Donde c_1, c_2 son constantes.

Demostración: Véase Referencia [5] ■

Ejemplo 1.11

Resolver la ecuación

$$y''(t) - 10y'(t) + 25y(t) = 0$$

Solución

Hallamos las raíces de la Ecuación Característica:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

$$\text{Entonces } \lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(25)}}{2} = 5 \pm 0$$

Luego, los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Por lo tanto, la solución es

$$y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t}$$

1.4 Sistemas de ecuaciones diferenciales

En algunos casos, no basta expresar un modelo matemático mediante una sola ecuación diferencial, sino que se necesita más de una ecuación. Por esta razón surge el concepto de sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.12: *Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*

Un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en las incógnitas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ es una expresión de la forma

[illegible]

Donde $f_1, f_2, \dots, f_n$ son funciones en las variables $t, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales surgen de forma natural en muchos problemas científicos. En nuestro caso veremos cómo aparecen en el estudio de un péndulo doble. Por otro lado, cabe destacar que una ecuación diferencial de orden n puede llevarse a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. Más específicamente, dada la ecuación diferencial de orden n en la incógnita $y(t)$:

$$y^{(n)}(t)=f\left(t,y,y',...,y^{(n-1)}\right) \quad [I]$$

Entonces, si definimos

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \dots\dots\dots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

La ecuación [I] es equivalente al sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ y_n' = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Esta reducción de una ecuación de orden n a un sistema de n ecuaciones de primer orden tiene algunas ventajas. Entre ellas, está la simplificación de la expresión de la solución mediante la notación matricial y vectorial, como veremos más adelante.

Ejemplo 1.13

Dada la ecuación diferencial de orden 4:

$$3y^{(4)}(t) + 5t^2y''(t) + 2\sin(t)y'(t) = 10$$

Expresarla como un sistema de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución

Primeramente despejamos $y^{(4)}(t)$ de la ecuación diferencial:

$$y^{(4)}(t) = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}t^2 y''(t) - \frac{2}{3} \sin(t) y'(t)$$

Luego definimos

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \\ y_4 = y''' \end{cases}$$

Entonces, la ecuación diferencial es equivalente al sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}t^2 y_3 - \frac{2}{3} \sin(t) y_2 \end{cases}$$

También es posible transformar un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior a 1 en un sistema de primer orden, como lo ilustramos en el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 1.14

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x''(t) = 2x'(t) + 4t^2 y(t) \\ y''(t) = 5x(t)y(t) + e^t y'(t) \end{cases}$$

Expresarlo como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución

Definimos

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y \\ y_3 = x' \\ y_4 = y' \end{cases}$$

Entonces, la ecuación diferencial es equivalente al sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = x'' = 2x'(t) + 4t^2 y(t) = 2y_3 + 4t^2 y_2 \\ y_4' = y'' = 5x(t)y(t) + e^t y'(t) = 5y_1 y_2 + e^t y_4 \end{cases}$$

Es decir

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = 2y_3 + 4t^2 y_2 \\ y_4' = 5y_1 y_2 + e^t y_4 \end{cases}$$

1.5 Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

En esta sección centraremos primeramente la atención en la solución de sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, lineales, a coeficientes constantes y homogéneas, para luego mostrar cómo resolver sistemas del mismo tipo, pero de orden superior. Previamente introduciremos las siguientes definiciones.

Definición 1.15: Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y lineales

Un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y lineal, en las incógnitas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, es una expresión de la forma

[illegible]

Donde $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ son funciones continuas para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

El sistema [I] es homogéneo si $f_i(t) = 0 \quad \forall i=1,2,\dots,n$

En caso contrario, se dice no homogéneo.

Forma matricial de un sistema de primer orden y lineal

Si definimos las siguientes matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema [I] puede representarse matricialmente del siguiente modo:

$$X' = A.X + F$$

Ejemplo 1.16

Escribir el siguiente sistema lineal en forma matricial:

$$\begin{cases} x'(t) = 3t x(t) + 4y(t) + e^t z(t) + t - 2 \\ y'(t) = 5x(t) + 9z(t) + \sin(2t) \\ z'(t) = y(t) + 6z(t) + 10 \end{cases}$$

Solución

En este caso

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3t & 4 & e^t \\ 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} t-2 \\ \sin(2t) \\ 10 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema se representa matricialmente por

$$X' = A.X + F$$

Cabe preguntarnos si existe una única solución del sistema que pase por un punto

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$$

La respuesta está dada en el siguiente Teorema.

Teorema 1.17: *Existencia de única solución para un sistema lineal de primer orden*

Dado el sistema lineal

$$X' = A.X + F$$

Con condición inicial

$$X(t_0) = X_0$$

Si todos los elementos de las matrices A y F son funciones continuas en un intervalo I que contiene a t_0 , entonces existe una solución única en dicho intervalo.

Demostración: Véase Referencia [5] ■

En este apartado sólo nos detendremos a describir la solución de ciertos sistemas lineales de primer orden: aquéllos cuya matriz A tiene coeficientes constantes.

Definición 1.18: *Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden , lineales y a coeficientes constantes*

Un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, lineal y a coeficientes constantes, en las incógnitas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, es una expresión de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{array} \right. \quad [\text{II}]$$

Donde a_{ij} son constantes reales para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

La representación matricial de estos sistemas es muy útil porque, como veremos, las soluciones quedan expresadas en términos de autovalores y autovectores.

Mostraremos cómo resolver este tipo de sistemas homogéneos y para el caso $n = 2$, ya que cuando $n > 2$ el procedimiento es similar.

1.5.1 Resolución de sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, lineales, homogéneas y a coeficientes constantes.

Estos sistemas son de la forma

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11} x(t) + a_{12} y(t) \\ y'(t) = a_{21} x(t) + a_{22} y(t) \end{cases}$$

En este caso, su representación matricial es

$$X' = A \cdot X$$

Donde

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

La técnica que nos permitirá hallar las soluciones de estas ecuaciones requiere de los siguientes conceptos de Álgebra Lineal.

Definición 1.19: Autovalores y Autovectores

Dada una matriz cuadrada A de orden n , un número λ es autovalor de A si existe un vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ tal que

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

En este caso, el vector no nulo $\vec{v}$ recibe el nombre de autovector asociado al autovalor λ .

Cómo calcular autovalores

Para hallar los autovalores de una matriz cuadrada A , se resuelve la ecuación

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

Donde

I es la matriz Identidad

$\det(A - \lambda \cdot I)$ es el determinante de la matriz $A - \lambda \cdot I$

Esta ecuación recibe el nombre de Ecuación característica de A y el polinomio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$$

Se lo llama el Polinomio característico de A .

La siguiente Proposición permitirá hallar los autovalores de una manera más sencilla, cuando la matriz A es de orden 2.

Proposición 1.20

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ entonces

1) El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A)$

Donde $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$

2) Si λ_1, λ_2 son los autovalores de A entonces

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A) \end{cases}$$

Demostración

$$\begin{aligned} 1) \quad p(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = \\ &= (a_{11} \cdot a_{22}) - \lambda \cdot a_{11} - \lambda \cdot a_{22} + \lambda^2 - a_{12} \cdot a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \end{aligned}$$

Es decir,
$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) \quad [\text{I}]$$

2) Como λ_1, λ_2 son las raíces de $p(\lambda)$ entonces, por el Teorema Fundamental del Álgebra, resulta $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)$. Al aplicar la Propiedad Distributiva obtenemos

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \quad [\text{II}]$$

Igualando las ecuaciones [I] y [II] tenemos que

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = \lambda^2 - \lambda \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 \cdot \lambda_2)$$

Por igualdad de polinomios resulta finalmente que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A) \end{cases} \quad \blacksquare$$

El siguiente Teorema muestra cómo son las soluciones de este tipo de sistemas.

Teorema 1.21

Sea el sistema

$$X' = A \cdot X$$

Donde

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Sean λ_1, λ_2 los autovalores de A . Entonces

1) Si λ_1, λ_2 son reales y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Donde c_1, c_2 son constantes.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son los autovectores asociados a los autovalores λ_1, λ_2 respectivamente.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, se pueden presentar dos casos:

2.1) Si existen dos autovectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linealmente independientes asociados al autovalor λ , la solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda t}$$

Donde c_1, c_2 son constantes.

2.2) Si existe un solo autovector $\vec{v}_1$ linealmente independiente asociado al autovalor λ , la solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 (\vec{v}_1 t e^{\lambda t} + \vec{v}_2 e^{\lambda t})$$

Donde c_1, c_2 son constantes.

$\vec{v}_2$ es el autovector generalizado, que se obtiene resolviendo el sistema

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

3) Si λ_1, λ_2 son complejos conjugados, la solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \operatorname{Re}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) + c_2 \operatorname{Im}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t})$$

Donde c_1, c_2 son constantes.

$\vec{v}_1$ es el autovector asociado a λ_1

$\operatorname{Re}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t})$, $\operatorname{Im}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t})$ son, respectivamente, la parte real e imaginaria del vector $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$

Demostración: Véase Referencia [5] ■

Ejemplo 1.22

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

Solución

En este caso, la matriz asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los autovalores de A

La Ecuación Característica es

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda \cdot 4 - 5 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática, obtenemos los autovalores:

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$$

Cálculo del autovector asociado a $\lambda_1 = 5$

Resolvemos el sistema

$$(A - \lambda_1 \cdot I) \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el Método de Eliminación de Gauss, resulta el sistema:

$$\begin{cases} -4 v_{11} + 2 v_{12} = 0 \\ 0 \cdot v_{11} + 0 \cdot v_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{12} = 2 v_{11}$$

Luego, los autovectores son de la forma:

$$v_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ con } v_{11} \in \mathbb{R}$$

Si elegimos $v_{11} = 1$, obtenemos el siguiente vector propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo del autovector asociado a $\lambda_2 = -1$

Resolvemos el sistema

$$(A - \lambda_2 \cdot I) \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el Método de Eliminación de Gauss, resulta el sistema:

$$\begin{cases} 2 v_{21} + 2 v_{22} = 0 \\ 0 \cdot v_{21} + 0 \cdot v_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{22} = -v_{21}$$

Luego, los autovectores son de la forma:

$$v_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ con } v_{21} \in \mathbb{R}$$

Si elegimos $v_{21} = 1$, obtenemos el siguiente vector propio:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, aplicando el Teorema 1.21, inciso 1) resulta

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_1 2 e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 e^{-t} \\ -c_2 e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 2e^{5t} - c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} \end{cases}$$

Ejemplo 1.23

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = 9x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

Solución

En este caso, la matriz asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los autovalores de A

La Ecuación Característica es

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0$$

Luego, los autovalores son repetidos:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$$

Cálculo de los autovectores asociados a $\lambda = 0$

Resolvemos el sistema

$$(A - \lambda I) \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el Método de Eliminación de Gauss, resulta el sistema:

$$\begin{cases} 3 v_{11} - v_{12} = 0 \\ 0 \cdot v_{11} + 0 \cdot v_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{12} = 3 v_{11}$$

Luego, los autovectores son de la forma:

$$v_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ con } v_{11} \in \mathbb{R}$$

De aquí resulta que existe sólo un autovector linealmente independiente asociado al autovalor $\lambda = 0$. Si elegimos $v_{11} = 1$, obtenemos el siguiente vector propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para hallar un autovector generalizado, resolvemos el sistema

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, aplicando el Método de Eliminación de Gauss, resulta el sistema:

$$\begin{cases} 3 v_{21} - v_{22} = 1 \\ 0 \cdot v_{21} - 0 \cdot v_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{22} = 3 v_{21} - 1$$

Luego, los autovectores generalizados son de la forma

$$\begin{pmatrix} v_{21} \\ 3v_{21} - 1 \end{pmatrix} \text{ con } v_{21} \in \mathbb{R}$$

Si elegimos $v_{21} = 1$, obtenemos el siguiente vector propio generalizado:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, aplicando el Teorema 1.21, inciso 2.2) resulta

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 \left(\vec{v}_1 t e^{\lambda t} + \vec{v}_2 e^{\lambda t} \right) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{0 \cdot t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t e^{0 \cdot t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{0 \cdot t} \right) = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + c_2 \\ 3c_1 + 3c_2 t + 2c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 t + c_2 \\ y(t) = 3c_1 + 3c_2 t + 2c_2 \end{cases}$$

Ejemplo 1.24

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) - y(t) \\ y'(t) = 5x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

Solución

La matriz asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los autovalores de A

La Ecuación Característica es

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda \cdot 10 + 29 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática obtenemos que

$$\lambda_1 = 5 + 2i, \lambda_2 = 5 - 2i$$

Cálculo del autovector asociado a $\lambda_1 = 5 + 2i$

Resolvemos el sistema

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2i & -1 \\ 5 & -1 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\begin{cases} (1-2i)v_{11} - v_{12} = 0 \\ 5v_{11} - (1+2i)v_{12} = 0 \end{cases}$$

Puesto que, de la primera ecuación, tenemos que $v_{12} = (1-2i)v_{11}$, si elegimos $v_{11} = 1$ obtenemos el siguiente vector propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta, por la fórmula de Euler que

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(5+2i)t} = e^{5t+2ti} = e^{5t} (\cos(2t) + i \sin(2t))$$

Entonces, aplicando el Teorema 1.21, inciso 3) resulta

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1 \operatorname{Re}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) + c_2 \operatorname{Im}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) = \\ &= c_1 \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{5t} (\cos(2t) + i \sin(2t))\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{5t} (\cos(2t) + i \sin(2t))\right) = \\ &= c_1 \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} e^{5t} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ (1-2i)e^{5t} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \end{pmatrix}\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} e^{5t} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ (1-2i)e^{5t} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \end{pmatrix}\right) = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^{5t} \cos(2t) \\ e^{5t} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \sin(2t) \\ e^{5t} (-2 \cos(2t) + \sin(2t)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} \cos(2t) + c_2 e^{5t} \sin(2t) \\ c_1 e^{5t} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) + c_2 e^{5t} (-2 \cos(2t) + \sin(2t)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} \cos(2t) + c_2 e^{5t} \sin(2t) \\ (c_1 - 2c_2) e^{5t} \cos(2t) + (2c_1 + c_2) e^{5t} \sin(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{5t} \cos(2t) + c_2 e^{5t} \sin(2t) \\ y(t) = (c_1 - 2c_2) e^{5t} \cos(2t) + (2c_1 + c_2) e^{5t} \sin(2t) \end{cases}$$

1.5.2 Resolución de sistemas de dos ecuaciones diferenciales de orden superior, lineales, a coeficientes constantes y homogéneas

El método que aplicaremos para resolver este tipo de sistemas es *El Método de Eliminación*, el cual también se aplica cuando el sistema no es homogéneo.

Método de Eliminación

Este Método consiste en “disfrazar” el sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema algebraico, para luego aplicar el Método de Eliminación, utilizado para resolver ecuaciones algebraicas. Previamente necesitaremos el siguiente concepto.

Definición 1.25: El Operador Diferencial

Dada una función $y(t)$ derivable, el operador diferencial de y es

$$Dy = y'$$

En general, el operador diferencial de n -ésimo orden de y es

$$D^n y = y^{(n)}$$

El Operador Diferencial, por tratarse de una derivada, goza de la Propiedad de Linealidad. Es decir, si $y(t)$ y $x(t)$ son funciones derivables entonces

$$D^n (\alpha x + \beta y) = \alpha D^n x + \beta D^n y \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.26

La siguiente ecuación diferencial lineal y a coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t)$$

Donde $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ son constantes, puede expresarse en términos del operador diferencial como

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = g(t)$$

Descripción del Método de Eliminación

Como dijimos, este método se aplica cuando el sistema es lineal y a coeficientes constantes. Sólo lo describiremos para sistemas de dos ecuaciones diferenciales y homogéneos, pues es lo que necesitaremos en este trabajo. Explicaremos el método a través del siguiente Ejemplo.

Ejemplo 1.27

Resolver el siguiente sistema aplicando el Método de Eliminación:

$$\begin{cases} x'(t) - 4x(t) + y''(t) = 0 \\ x'(t) + x(t) + y'(t) = 0 \end{cases}$$

Solución

Primer Paso

Expresamos el sistema en la notación de operador diferencial:

$$\begin{cases} (D-4)x + D^2 y = 0 \\ (D+1)x + D y = 0 \end{cases} \quad [I]$$

De este modo, hemos disfrazado el sistema de ecuaciones diferenciales de un sistema algebraico. Así por ejemplo, la expresión $(D+1)x$ puede pensarse como si fuera el número $(D+1)$ multiplicado por x .

Segundo Paso

Eliminamos “x”. Para ello multiplicamos la primera ecuación de [I] por $(D+1)$ y la segunda ecuación por $(D-4)$.

$$\begin{cases} (D+1)((D-4)x + D^2 y) = (D+1)0 \\ (D-4)((D+1)x + D y) = (D-4)0 \end{cases}$$

Al aplicar la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que

$$(D+1)0 = D0 + (1)0 = 0$$

$$(D-4)0 = D0 + (-4)0 = 0$$

Resulta

$$\begin{cases} (D+1)(D-4)x + (D+1)D^2 y = 0 \\ (D-4)(D+1)x + (D-4)D y = 0 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro obtenemos

$$(D+1)D^2 y - (D-4)D y = 0$$

Es decir

$$D^3 y + 4D y = 0$$

Para resolver esta ecuación, la expresamos en su notación de derivada:

$$y''' + 4y' = 0$$

Luego aplicamos el Método indicado en el Teorema 1.22. Para ello resolvemos la Ecuación Característica:

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$$

Por lo tanto, la solución es

$$y(t) = c_1 e^{0 \cdot t} + e^{0 \cdot t} (c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t))$$

En consecuencia

$$y(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) \quad [II]$$

Tercer Paso

Eliminamos “y”. Para ello multiplicamos la segunda ecuación de [I] por D .

$$\begin{cases} (D-4)x + D^2 y = 0 \\ D((D+1)x + D y) = D \cdot 0 \end{cases}$$

De aquí resulta, al aplicar la propiedad distributiva y restar miembro a miembro, la siguiente expresión:

$$(D-4)x - D(D+1)x = 0$$

Es decir

$$D^2 x + 4x = 0$$

Nuevamente, para resolver esta ecuación, la expresamos en su notación de derivada:

$$x'' + 4x = 0$$

Luego aplicamos el Método indicado en el Teorema 1.22. Para ello resolvemos la Ecuación Característica:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$$

Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = e^{0 \cdot t} (c_4 \cos(2t) + c_5 \sin(2t))$$

O sea

$$x(t) = c_4 \cos(2t) + c_5 \sin(2t) \quad \text{[III]}$$

Tercer Paso

Vinculamos las constantes que figuran en las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$. Primeramente, para determinar cuántas constantes deben figurar en la solución del sistema, procedemos del siguiente modo:

Derivada de mayor orden, en la incógnita $x(t)$, que figura en el sistema: 1

Derivada de mayor orden, en la incógnita $y(t)$, que figura en el sistema: 2

Por lo tanto, en la expresión de las soluciones deben aparecer $1+2 = 3$ constantes.

Luego, expresaremos c_4 y c_5 en términos de c_1 , c_2 y c_3 . Para ello sustituimos las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ obtenidas en [II] y [III] en una de las ecuaciones del sistema.

Por ejemplo, las sustituiremos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) + y'(t) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2c_4 \sin(2t) + 2c_5 \cos(2t) + c_4 \cos(2t) + c_5 \sin(2t) - 2c_2 \sin(2t) + 2c_3 \cos(2t) &= 0 \\ \Rightarrow (-2c_4 + c_5 - 2c_2) \sin(2t) + (2c_5 + c_4 + 2c_3) \cos(2t) &= 0 \end{aligned}$$

Como las funciones $\sin(2t)$ y $\cos(2t)$ son linealmente independientes, resulta

$$\begin{cases} -2c_4 + c_5 - 2c_2 = 0 \\ 2c_5 + c_4 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

De estas ecuaciones se obtenemos que

$$\begin{cases} c_4 = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3) \\ c_5 = \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3) \end{cases} \quad [\text{IV}]$$

Por último, de [II], [III] y [IV] resulta que la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3) \cos(2t) + \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3) \sin(2t) \\ y(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) \end{cases}$$

1.6 Estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales

Hasta ahora, en el estudio de ecuaciones diferenciales, nos hemos centrado en el problema de obtener explícitamente las soluciones, exponiendo algunos métodos de resolución. Pero en esta sección daremos otro enfoque al estudio, planteándonos cómo obtener información cualitativa sobre el comportamiento de las soluciones. Este nuevo punto de vista es de sumo interés debido a que numerosas ecuaciones diferenciales no las podemos resolver. Incluso, aunque se pudieran hallar sus soluciones, a veces no es necesario obtenerlas explícitamente, pues sólo se pretende conocer el comportamiento de las mismas. El siguiente Ejemplo aclarará estas ideas.

Ejemplo 1.28

Supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ representan las poblaciones, en cualquier instante t , de dos especies que compiten entre sí por alimento y espacio para vivir. Supongamos, además, que las tasas de crecimiento de las poblaciones, $x'(t)$ e $y'(t)$, están gobernadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad [\text{I}]$$

En la mayoría de los casos, este sistema está diseñado de modo tal que no podremos calcular sus soluciones. Sin embargo, hay algunas propiedades cualitativas que son interesantes y a las que con frecuencia pueden darse respuestas satisfactorias sin necesidad de determinar explícitamente las soluciones. Por ejemplo, consideremos los siguientes interrogantes:

1) ¿Existen valores para los cuales ambas especies coexisten en un régimen permanente? Es decir, ¿existen constantes α, β tales que $x(t) = \alpha$ e $y(t) = \beta$ son soluciones del sistema [I]? Si tales valores existen, se los llama *puntos críticos* o *puntos de equilibrio*.

2) Supongamos que las dos especies coexisten en estado de equilibrio e introducimos, en un determinado momento t , algunos miembros de una de las especies. ¿Permanecerán las poblaciones cerca de los valores de equilibrio para todo tiempo futuro? Es decir, si $x(t) = \alpha$ e $y(t) = \beta$ son soluciones del sistema [I] y $x_1(t)$ e

$y_1(t)$ son otras soluciones tales que $x_1(t_0)$ e $y_1(t_0)$ están próximos a α y β respectivamente, ¿se verificará que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), y_1(t)) = (\alpha, \beta)$?

3) Si conocemos el número de individuos de cada especie en un tiempo t_0 ¿Cuál será la evolución de las especies cuando transcurre el tiempo? Si no tienden a valores de equilibrio, ¿triunfará una de las especies?

Veremos que para responder a estas cuestiones no necesitamos resolver el sistema [I]. Nos limitaremos a estudiar cualitativamente los *sistemas autónomos*. Para ello, comenzaremos definiendo los siguientes conceptos.

Definición 1.29: Sistemas autónomos

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es autónomo cuando se lo puede escribir de la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Observemos que la variable independiente t no aparece explícitamente en el miembro derecho de cada ecuación diferencial.

Ejemplo 1.30

El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1 + 10x_2 + t^3 \\ x_2'(t) = x_1 \cdot x_2 + \sin(x_1) \end{cases}$$

No es autónomo debido a la presencia de t en el miembro derecho de la primera ecuación.

Un sistema autónomo de primer orden puede escribirse en forma compacta como

$$X' = f(X)$$

Donde

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Cabe preguntarnos si, dada una condición inicial, existe una única solución del sistema autónomo. La respuesta está dada en el siguiente Teorema, conocido como el *Teorema de Poincaré*.

Teorema 1.31: Teorema de Existencia y Unicidad de Sistemas Autónomos

Dado el sistema autónomo de primer orden con condiciones iniciales

$$\begin{cases} X' = f(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad [I]$$

Entonces

1) Si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de X_0 , entonces existe una solución del sistema en un intervalo abierto que contenga al punto t_0 .

2) Suponga, además, que existe una región $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que f es continua en dicha región y satisface la condición de Lipschitz

$$|f(X) - f(Y)| \leq k \cdot |X - Y|$$

$\forall X, Y \in U$ y para alguna constante k .

Si $X(t)$ e $Y(t)$ son dos soluciones del sistema [I] definidas en un intervalo I que contiene a t_0 de modo que $X(t), Y(t) \in U \quad \forall t \in I$ entonces

$$X(t) = Y(t) \quad \forall t \in I$$

Demostración

Véase Referencia [6].

La condición de Lipschitz no es, en muchos casos, una propiedad fácil de verificar. Por esta razón la siguiente Proposición es de gran utilidad:

Proposición 1.32: Condición suficiente para verificar la condición de Lipschitz

Si $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$ es tal que

1) f es continua en una región $U \subset \mathbb{R}^n$.

2) Existen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j=1,2,\dots,n$ y están acotadas en U .

Entonces f verifica la condición de Lipschitz.

Demostración

Véase Referencia [6].

El siguiente Ejemplo ilustrará cómo probar la existencia y unicidad de este tipo de sistemas con condición inicial.

Ejemplo 1.33

Dado el sistema autónomo con condición inicial

$$\begin{cases} x_1'(t) = \operatorname{sen}(x_1) + 10 \cos(x_2) \\ x_2'(t) = e^{-x_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 3 \end{cases}$$

Probar que existe única solución que pasa por el punto $(1, 3)$.

Solución

En este caso,

$$f_1(x_1, x_2) = \operatorname{sen}(x_1) + 10 \cos(x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = e^{-x_1}$$

Luego

$$f(x_1, x_2) = (\operatorname{sen}(x_1) + 10 \cos(x_2), e^{-x_1})$$

Para probar la existencia de una única solución, aplicaremos el Teorema 1.31:

1) Todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$, pues las funciones *seno*, *coseno* y *exponencial* son funciones continuas.

2) Para verificar la condición de Lipschitz, aplicaremos la Proposición 1.32. Para ello, consideramos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x \geq 0\}$. Entonces

a) f es continua en U .

b) Existen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j=1, 2$ y están acotadas en U pues

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \cos(x_1) \Rightarrow \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right| = |\cos(x_1)| \leq 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -10 \operatorname{sen}(x_2) \Rightarrow \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right| = |-10 \operatorname{sen}(x_2)| \leq 10$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -e^{-x_1} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right| = |-e^{-x_1}| = e^{-x_1} \leq e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right| = 0$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.31, existe una solución del sistema. Además, si

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ e $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ son dos soluciones definidas en un intervalo I que

contiene a $t_0 = 0$ de modo tal que $X(t), Y(t) \in U \quad \forall t \in I$ entonces

$$X(t) = Y(t) \quad \forall t \in I.$$

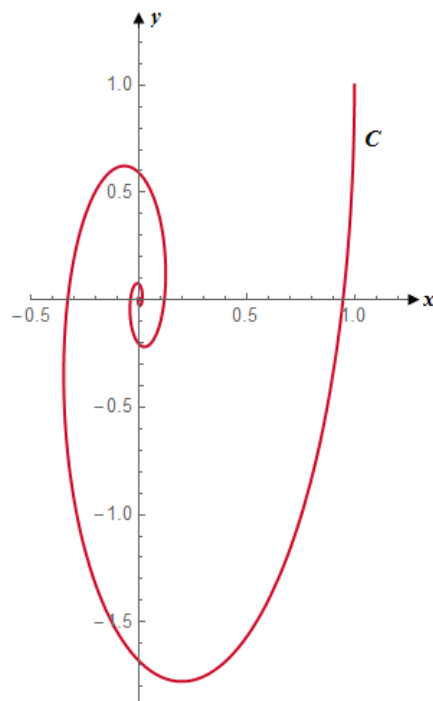


Figura 1.1: Representación gráfica de la curva C .

Definición 1.34: Vector tangente a la curva solución en un punto

Si

$$C = \{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \text{ con } t \in D\}$$

Es una Curva Solución del sistema autónomo de primer orden y

$$X(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))$$

Es un punto de la curva, entonces

$$\vec{X}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \dots, x_n'(t_0))$$

Es el vector tangente a la curva C en el punto $X(t_0)$.

El sentido del vector tangente indicará el sentido de movimiento de la curva solución. Observemos que si $n = 2$ o 3 , entonces la solución $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ se puede interpretar como la posición, en el instante t , de una partícula que se mueve en el plano o en el espacio. En este caso, el vector $\vec{X}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ representa el vector velocidad de la partícula en dicho instante.

Ejemplo 1.35

Dado el sistema autónomo del Ejemplo anterior, y considerando la curva solución

$$C = \left\{ \left(e^{-t} \cos(3t) + \frac{1}{3} e^{-t} \sin(3t), e^{-t} \cos(3t) - 3 e^{-t} \sin(3t) \right) \text{ con } t \in \mathbb{R} \right\}$$

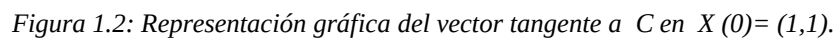
- 1) Calcular el vector tangente a la curva C , en el punto $X(0)$.
- 2) Representar gráficamente dicho vector tangente e indicar la orientación de la curva C .

1) El vector tangente a la curva C en el punto $X(0)$ es $\overrightarrow{X}'(0)$.

Entonces

Por lo tanto

2) La representación gráfica del vector tangente se muestra a continuación. El sentido de orientación de la curva C es el inducido por dicho vector.



El conjunto formado por todos los vectores tangentes generan un campo vectorial, llamado *Campo de Direcciones del Sistema*. Su definición es la siguiente:

Dado el sistema autónomo de primer orden

Entonces el campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ definido por

Recibe el nombre de Campo de Direcciones del sistema.

Los Campos de Direcciones permiten tener una visión global del aspecto de las curvas solución del sistema. Así, si una curva solución pasa por el punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, lo debe hacer de forma tangente al vector $\vec{V}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ejemplo 1.37

Dado el sistema autónomo

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

En este caso, el Campo de Direcciones es $V(x, y) = (y, -x)$.

Al aplicar el Teorema 1.21, se puede comprobar que la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \\ y(t) = c_2 \cos(t) - c_1 \sin(t) \end{cases}$$

Consideremos dos curvas solución:

La curva C_1 , que resulta de considerar $c_1 = 0$, $c_2 = 0.5$.

La curva C_2 , que resulta de tomar $c_1 = c_2 = 1$.

Utilizaremos los siguientes comandos del software Wolfram Mathematica para graficar algunos vectores del campo vectorial, junto con las curvas C_1 y C_2 :

$C1 = \text{ParametricPlot}[\{0.5 \sin[t], 0.5 \cos[t]\}, \{t, 0, 2\pi\}];$

$C2 = \text{ParametricPlot}[\{\cos[t] + \sin[t], \cos[t] - \sin[t]\}, \{t, 0, 2\pi\}];$

$\text{Campo} = \text{VectorPlot}[\{y, -x\}, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}];$

$\text{Show}[C1, C2, \text{Campo}]$

Al ejecutarlos obtenemos el siguiente gráfico:

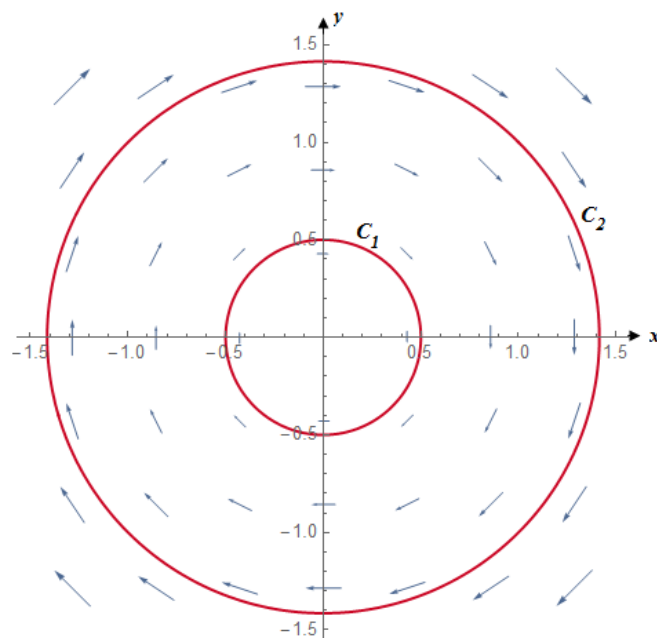


Figura 1.3: Gráfica de las curvas C_1 , C_2 y del campo de direcciones.

Diagrama de fase de un sistema autónomo

Para analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones de un sistema autónomo, es importante tener un bosquejo de las curvas solución. Muchas veces es posible obtener las trayectorias descritas por las soluciones, sin necesidad de hallar explícitamente dichas soluciones. Esto se logra introduciendo el siguiente concepto:

Definición 1.38: Diagrama o Retrato de fase

Dado el sistema autónomo de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

El Diagrama o Retrato de Fase del sistema es el conjunto formado por las gráficas de todas las curvas solución del sistema, con sus correspondientes orientaciones.

Obviamente, el Diagrama de Fase sólo se puede dibujar cuando $n = 2$ o 3 . Se lo diseña en base al gráfico del Campo de Direcciones. De este modo, una curva solución será dibujada de forma paralela o tangente a algún vector del Campo de Direcciones que se encuentre cercano a ella. En este trabajo no nos detendremos a desarrollar técnicas para dibujar manualmente un Diagrama de Fase. Simplemente haremos uso del software Wolfram Mathematica. El siguiente Ejemplo muestra cómo hacerlo.

Ejemplo 1.39

Dado el sistema autónomo

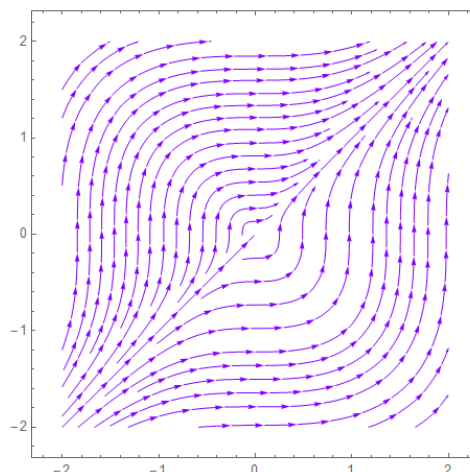
$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = x^2 \end{cases}$$

Representar gráficamente el Diagrama de Fase en las cercanías del punto $(0,0)$.

Solución

Escribimos el comando: `StreamPlot` $\left[\left\{ y^2, x^2 \right\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\} \right]$

Al ejecutarlo, obtenemos el siguiente Diagrama de Fase



Puntos críticos de un sistema autónomo

En un sistema autónomo existen puntos notables que brindan información referente al comportamiento de las soluciones. Dichos puntos se llaman *puntos críticos*, *estacionarios* o *de equilibrio*. Su definición es la siguiente.

Definición 1.40: Punto crítico, estacionario de equilibrio

Dado el sistema autónomo de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Un punto crítico, también llamado estacionario o de equilibrio, es una solución del sistema de ecuaciones algebraicas

[illegible]

Si $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es un punto crítico del sistema, entonces las funciones constantes

$$x_1(t) = x_1^*, \quad x_2(t) = x_2^*, \quad \dots, \quad x_n(t) = x_n^*$$

Satisfacen las ecuaciones del sistema autónomo. Una solución de tal valor constante se llama una ***solución de equilibrio del sistema***. Por ejemplo, si una partícula se coloca en un punto crítico, permanecerá allí indefinidamente. En algunas situaciones prácticas este tipo de soluciones son las que tienen mayor interés, como veremos más adelante en algunos Ejemplos.

Ejemplo 1.41

Encontrar los puntos críticos de los siguientes sistemas autónomos

$$\text{a) } \begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 6 \\ y' = x^2 - y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = 0.01x(100 - x - y) \\ y' = 0.05y(60 - y - 0.2x) \end{cases}$$

Solución

a) Resolvemos el sistema algebraico

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6 = 0 & [I] \\ x^2 - y = 0 & [II] \end{cases}$$

De la ecuación [II] resulta

$$y = x^2 \quad [III]$$

Sustituyendo [III] en [I] obtenemos, aplicando la fórmula de una ecuación bicuadrática:

$$x^2 + x^4 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x^2 = -3 \vee x^2 = 2$$

Luego, las únicas soluciones reales son las que verifican que $x^2 = 2$. Es decir,

$$x = \pm\sqrt{2} \quad [IV]$$

De [III] y [IV] resulta que los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 2)$

b) Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 0.01x(100 - x - y) = 0 & [I] \\ 0.05y(60 - y - 0.2x) = 0 & [II] \end{cases}$$

De la ecuación [I] tenemos que

$$x=0 \vee (100-x-y)=0 \Rightarrow x=0 \vee y=100-x$$

■ Si $x = 0$ entonces, sustituyendo en la ecuación [II] obtenemos que

$$0.05y(60-y)=0 \Rightarrow y(60-y)=0 \Rightarrow y=0 \vee y=60$$

Por lo tanto, los pares $(0,0)$ y $(0,60)$ son puntos críticos.

■ Si $y = 100 - x$ entonces, reemplazando nuevamente en la ecuación [II] resulta

$$0.05(100-x)(60-(100-x)-0.2x)=0 \Rightarrow 0.05(100-x)(-40+0.8x)=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (100-x)=0 \vee (-40+0.8x)=0 \Rightarrow x=100 \vee x=50$$

En consecuencia, los pares $(100, 0)$ y $(50, 50)$ son puntos críticos.

Clasificación de los puntos críticos

Consideremos un sistema autónomo de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Si $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es un punto crítico del sistema, entonces puede ser:

■ *Estable*

■ *Asintóticamente estable*

■ *Unstable*

Sus definiciones las damos a continuación.

Definición 1.42: Punto crítico estable

Un punto crítico $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es estable si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \left| X(t_0) - x^* \right| < \delta \text{ entonces } \left| X(t) - x^* \right| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$$

Donde $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es una solución del sistema autónomo de primer orden.

Esto significa que si una curva solución está cerca del punto crítico en algún momento $t = t_0$, se mantendrá cerca a lo largo del tiempo.

Definición 1.43: Punto crítico asintóticamente estable

Un punto crítico $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es asintóticamente estable si es estable y además verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = x^*$$

Es decir, las trayectorias cercanas no sólo se mantienen cerca, sino que se aproximan al punto crítico a lo largo del tiempo.

Definición 1.44: Punto crítico inestable

Un punto crítico $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es inestable si no es estable.

En este caso, existen trayectorias que en algún momento $t = t_0$ se encuentran cerca del punto crítico pero se alejan de este punto a lo largo del tiempo.

Ejemplo 1.45

Dados los siguientes sistemas autónomos

a) $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

Se puede comprobar que $(0,0)$ es el único punto crítico. La representación gráfica de los Diagramas de Fase de cada sistema, en un entorno de $(0,0)$, es:

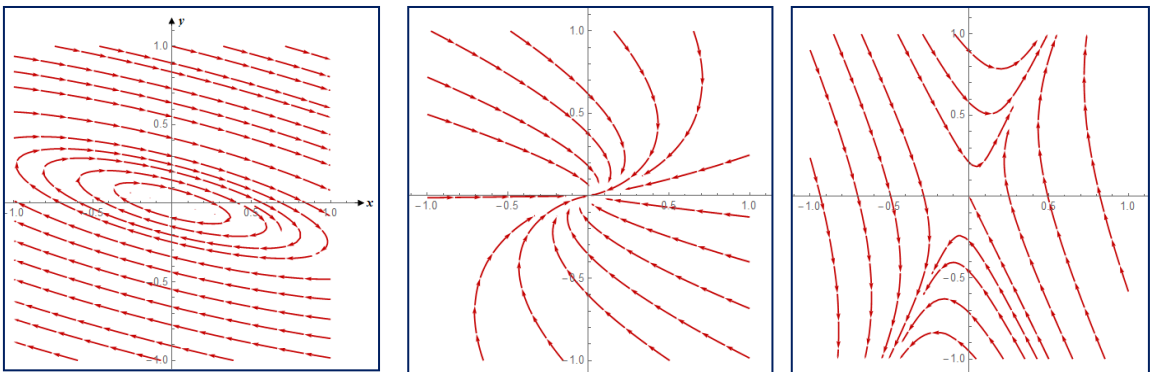


Figura 1.4: Izquierda: Diagrama de Fase del sistema a). Centro: Diagrama de Fase del sistema b). Derecha: Diagrama de Fase del sistema c).

Observando estos Diagramas, podemos verificar que:

Para el sistema a): $(0,0)$ es un punto crítico estable, pero no asintóticamente estable.

Para el sistema b): $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable.

Para el sistema c): $(0,0)$ es un punto crítico inestable.

Comenzaremos analizando los puntos críticos para sistemas autónomos y lineales de dos ecuaciones, para luego generalizar a sistemas de n ecuaciones.

Descripción de los puntos críticos para sistemas autónomos lineales planos

Estos sistemas son de la forma

$$X' = A \cdot X + B$$

Donde

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Cobran importancia porque aparecen con frecuencia al modelar fenómenos de la vida real. Supondremos que la matriz A es invertible, en cuyo caso sus autovalores son no nulos y además $-A^{-1} \cdot B$ es el único punto crítico.

Según la forma que tengan las trayectorias alrededor del punto crítico, éste se denomina **nodo**, **punto silla**, **foco** o **centro**.

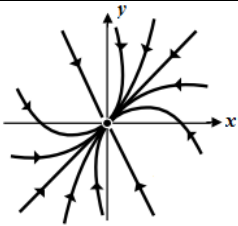
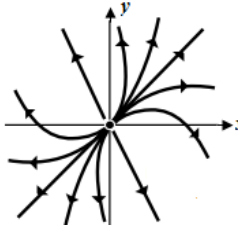
Un **nodo** es un punto crítico donde las trayectorias o todas se acercan (**nodo asintóticamente estable**) o todas se alejan del punto (**nodo inestable**).

Un **punto silla** es un punto crítico donde se tienen un par de trayectorias opuestas que entran, otro par de trayectorias que salen del punto y resto son ramas de hipérbolas con asíntotas en las trayectorias anteriores. Un punto de silla es un **punto crítico inestable**.

Un **foco o punto espiral** es un punto crítico donde todas las trayectorias vecinas son espirales que convergen hacia el punto crítico (**punto espiral asintóticamente estable**) o divergen desde él (**punto espiral inestable**).

Un **centro** es un punto crítico tal que en una vecindad todas las trayectorias son cerradas. En este caso, es un **punto crítico estable**, pero no asintóticamente estable.

Se puede probar (Véanse Referencias [5], [6] y [7]) que los autovalores λ_1, λ_2 de A determinan qué tipo de punto crítico es. La siguiente tabla muestra la clasificación de un punto crítico según las características de los autovalores.

Tipo de autovalor	Clasificación punto crítico	Tipo de Estabilidad	Aspecto del Diagrama de Fase
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \wedge \lambda_1, \lambda_2 < 0$	Nodo	Asintóticamente estable	
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \wedge \lambda_1, \lambda_2 > 0$	Nodo	Inestable	

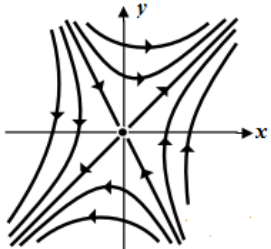
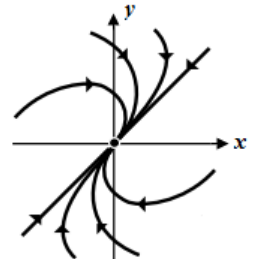
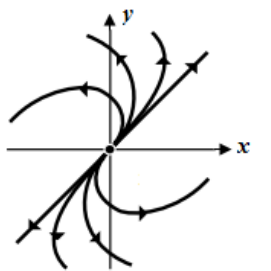
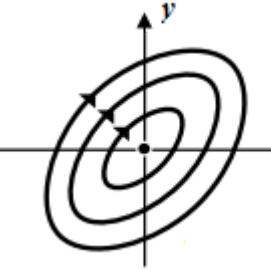
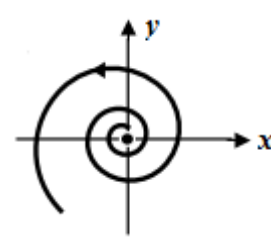
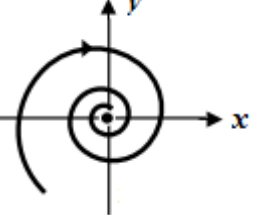
Tipo de autovalor	Clasificación punto crítico	Tipo de Estabilidad	Aspecto del Diagrama de Fase
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \wedge \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	Punto silla	Inestable	
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \lambda_1 < 0$	Nodo	Asintóticamente estable	
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \lambda_1 > 0$	Nodo	Inestable	
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$	Centro	Estable	
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > 0$	Foco o Espiral	Inestable	
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$	Foco o Espiral	Estable	

Tabla 1.5: Clasificación de los puntos críticos para sistemas autónomos lineales planos.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}}_{A=Df(x^*)=\text{Matriz Jacobiana de } f \text{ evaluada en } x^*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \dots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix}}_{X - X^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} R_1(x, x^*) \\ R_2(x, x^*) \\ \dots \\ R_n(x, x^*) \end{pmatrix}}_{R(x, x^*)}$$

Por lo tanto, el sistema autónomo se escribe como

$$X' = A \cdot (X - X^*) + R(x, x^*)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la función raíz cuadrada es continua, y aplicando las propiedades del límite de la suma y del producto de funciones, resulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{|R(x, x^*)|}{|x - x^*|} &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\sqrt{(R_1(x, x^*))^2 + (R_2(x, x^*))^2 + \dots + (R_n(x, x^*))^2}}{|x - x^*|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x^*} \sqrt{\left(\frac{R_1(x, x^*)}{|x - x^*|}\right)^2 + \left(\frac{R_2(x, x^*)}{|x - x^*|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{R_n(x, x^*)}{|x - x^*|}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow x^*} \left(\frac{R_1(x, x^*)}{|x - x^*|}\right)^2 + \lim_{x \rightarrow x^*} \left(\frac{R_2(x, x^*)}{|x - x^*|}\right)^2 + \dots + \lim_{x \rightarrow x^*} \left(\frac{R_n(x, x^*)}{|x - x^*|}\right)^2} = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema anterior da lugar a definir la linealización de un sistema autónomo, del siguiente modo:

Definición 1.48: Linealización de un sistema autónomo de primer orden

Sea $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ un punto crítico del sistema autónomo de primer orden

$$X' = f(X)$$

Entonces el sistema lineal autónomo

$$X' = Df(x^*) \cdot (X - X^*)$$

Recibe el nombre de **linealización** o **aproximación lineal** del sistema.

La hipótesis que planteamos es que las propiedades de estabilidad de $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ como punto crítico del sistema $X' = f(X)$ sean las mismas que las de la linealización del sistema. Desafortunadamente la respuesta no siempre es positiva. Sin embargo el siguiente Teorema, conocido como el *Método de Linealización*, nos dice en qué casos esta conjetura es cierta.

Teorema 1.49: Método de Linealización

Sea $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ un punto crítico del sistema autónomo

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Donde $f_i \wedge \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ son continuas en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$.

Sea $Df(x^*)$ la matriz Jacobiana de f evaluada en x^* . Entonces

- 1) Si todos los autovalores de $Df(x^*)$ tienen parte real negativa, el punto crítico es **asintóticamente estable**.
- 2) Si $Df(x^*)$ tiene un autovalor con parte real positiva, el punto crítico es **inestable**.
- 3) Si todos los autovalores de $Df(x^*)$ tienen parte real ≤ 0 y alguno de ellos tiene parte real nula, **no se puede concluir nada** mediante el Método de Linealización.

Demostración

Véase Referencia [7].

Observación 1.50

- 1) Para el caso de sistemas autónomos no lineales planos, sigue siendo válida la clasificación indicada en la Tabla 1.5 aplicada a los autovalores de $Df(x^*)$, pero exceptuando el caso en que $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$ ya que, según el Teorema 1.49, el Método de Linealización nada puede concluir.
- 2) Cabe preguntarnos cómo clasificar un punto crítico en caso de fallar el *Método de Linealización*. Si el sistema autónomo es plano, una alternativa consiste en dibujar el Diagrama de Fases en un entorno del punto crítico y observar el comportamiento de las trayectorias en las cercanías de dicho punto. Otra opción es aplicar el *Método de Liapunov*, que lo explicaremos detalladamente en el Capítulo 3.

Ejemplo 1.51

Clasificar los puntos críticos del siguiente sistema autónomo no lineal:

$$\begin{cases} x' = -2x + y + 2xy \\ y' = 4x - y \end{cases}$$

Solución

Cálculo de los Puntos Críticos

Resolvemos el sistema algebraico

$$\begin{cases} -2x + y + 2xy = 0 & [I] \\ 4x - y = 0 & [II] \end{cases}$$

De la ecuación [II] resulta

$$y = 4x \quad [III]$$

Sustituyendo [III] en [I] obtenemos:

$$-2x + 4x + 2x \cdot 4x = 0 \Rightarrow 8x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{4}$$

■ Si $x = 0$ entonces, de la ecuación [III] obtenemos que $y = 0$.

Por lo tanto, el par $(0, 0)$ es un punto crítico.

■ Si $x = -\frac{1}{4}$ entonces, de la ecuación [III] resulta que $y = -1$.

Luego, $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ es un punto crítico.

En consecuencia, los pares $(0, 0)$ y $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ son puntos críticos.

Clasificación de los Puntos Críticos

Aplicamos el Teorema 1.49. Primeramente calculamos la matriz Jacobiana $Df(x, y)$.

En este caso,

$$\begin{cases} f_1(x, y) = -2x + y + 2xy \\ f_2(x, y) = 4x - y \end{cases}$$

Luego

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2y & 1 + 2x \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Para el punto crítico $(0, 0)$:

Calculamos los autovalores de

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Por la Proposición 1.20, considerando $A = Df(0, 0)$, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Por lo tanto, los autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, \lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

Por el inciso 2) del Teorema 1.49, deducimos que $(0,0)$ es *inestable*. Además, de la Tabla 1.5, como $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$, resulta que además es *un punto silla*.

Para el punto crítico $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$:

Calculamos los autovalores de

$$Df\left(-\frac{1}{4}, -1\right) = \begin{pmatrix} -4 & \frac{1}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, por la Proposición 1.20, considerando $A = Df\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Por lo tanto, los autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}, \lambda_2 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}$$

Por el inciso 1) del Teorema 1.49, como los autovalores son negativos, concluimos que $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ es *asintóticamente estable*.

1.7 Aplicaciones del estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales

Aplicaciones ecológicas: depredadores y presas

Una de las aplicaciones importantes de la Teoría Cualitativa de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales es la referente a las interacciones entre dos o más poblaciones biológicas que ocupan el mismo hábitat. Por ejemplo, consideremos un sistema *depredador –presa* en que intervienen dos especies. Una especie, los *depredadores*, se alimenta de la otra especie, la *presa*, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en ese ambiente. Un ejemplo de este tipo de sistema es una población de zorros y conejos en un bosque. Los zorros (depredadores) devoran a los conejos (presa), en tanto que los conejos comen cierta vegetación del bosque. El modelo matemático clásico para un sistema depredador-presa fue ideado en los años 20 por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940). Para describir tal modelo, denotemos el número de presas en el tiempo t como $x(t)$, y el número de depredadores como $y(t)$. El siguiente Ejemplo muestra cómo podemos prever el comportamiento del modelo sin hallar explícitamente su solución.

Ejemplo 1.52

Un modelo de sistema depredador-presa queda descrito mediante el siguiente sistema autónomo no lineal:

$$\begin{cases} x' = x^2 - 2x - xy \\ y' = y^2 - 4y + xy \end{cases}$$

Donde

$x(t)$: Cantidad de presas en el instante t .

$y(t)$: Cantidad de depredadores en el instante t .

- 1) Hallar y clasificar los puntos críticos del sistema.
- 2) Dibuje el Diagrama de Fase para analizar cualitativamente cómo evoluciona cada especie a lo largo del tiempo.

Solución

1) Cálculo de los Puntos Críticos

Resolvemos el sistema algebraico

$$\begin{cases} x^2 - 2x - xy = 0 & [I] \\ y^2 - 4y + xy = 0 & [II] \end{cases}$$

De la ecuación [I] resulta

$$x^2 - 2x - xy = 0 \Rightarrow x(x - 2 - y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee (x - 2 - y = 0) \Rightarrow x = 0 \vee y = x - 2$$

■ Si $x = 0$ entonces, sustituyendo en la ecuación [II] obtenemos

$$y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y(y - 4) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 4$$

Por lo tanto, los pares $(0, 0)$ y $(0, 4)$ son puntos críticos.

■ Si $y = x - 2$ entonces, reemplazando esta expresión en la ecuación [II] resulta

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 - 4(x - 2) + x(x - 2) &= 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{10 \pm 2}{4} \Rightarrow x = 3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

En consecuencia, los pares $(3, 1)$ y $(2, 0)$ son puntos críticos.

Clasificación de los Puntos Críticos

Aplicamos el Teorema 1.49. Para ello calculamos la matriz Jacobiana $Df(x, y)$. En este caso,

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 - 2x - xy \\ f_2(x, y) = y^2 - 4y + xy \end{cases}$$

Luego

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2 - y & -x \\ y & 2y - 4 + x \end{pmatrix}$$

Para el punto crítico $(3,1)$:

Calculamos los autovalores de

$$Df(3,1) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la Proposición 1.20, considerando $A = Df(0,0)$, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{8}i}{2}$$

Por lo tanto, los autovalores son

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}i, \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}i$$

Por el inciso 2) del Teorema 1.49, como los autovalores tienen parte real positiva, deducimos que $(3,1)$ es *inestable*. Además, de la Tabla 1.5, resulta que además es *un foco o espiral inestable*.

Para los demás puntos críticos el análisis es similar. La clasificación de todos ellos figura en la siguiente tabla:

Punto crítico	Clasificación
$(0,0)$	<i>Nodo asintóticamente estable</i>
$(0,4)$	<i>Punto silla inestable</i>
$(2,0)$	<i>Punto silla inestable</i>
$(3,1)$	<i>Foco o espiral inestable.</i>

2) Para dibujar el Diagrama de Fase, ejecutamos el siguiente comando del software Wolfram Mathematica:

$$\text{StreamPlot}\left[\left\{x^2 - 2x - xy, y^2 - 4y + xy\right\}, \{x, 0, 8\}, \{y, 0, 8\}, \text{StreamPoints} \rightarrow 26\right]$$

El Diagrama de Fase obtenido se muestra en la siguiente figura:

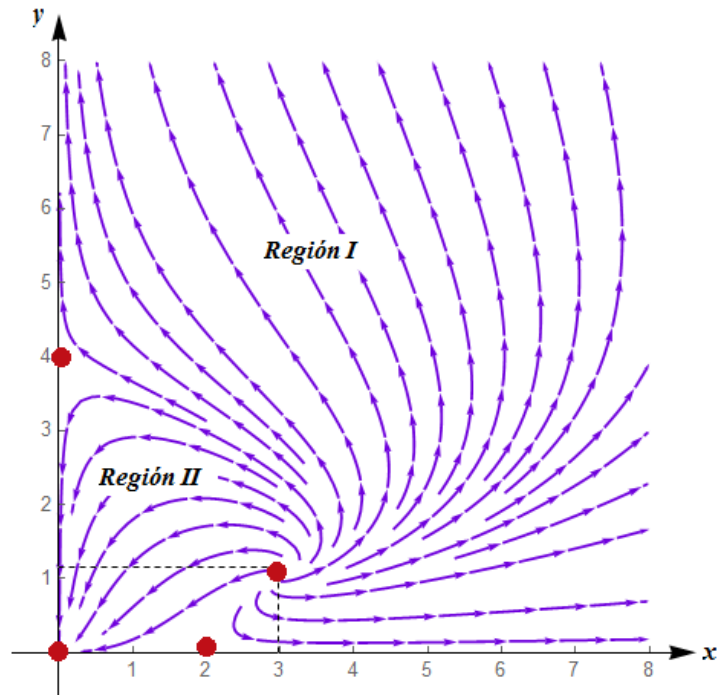


Figura 1.6: Diagrama de Fase del sistema depredador-presa.

Para estudiar cualitativamente cómo evoluciona cada especie, consideremos un estado inicial del sistema, que llamaremos (x_0, y_0) . Analizaremos los siguientes casos:

1) Si (x_0, y_0) es un punto crítico, entonces la solución del sistema autónomo es

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases} \quad \forall t$$

Esto significa que ambas especies coexisten en régimen permanente, con poblaciones estables x_0 e y_0 respectivamente.

Sin embargo, al ser estos puntos críticos inestables, una pequeña variación en el estado inicial del sistema provocará que las soluciones no estén próximas a (x_0, y_0) .

El caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ indicará que ambas especies se extinguirán simultáneamente.

2) Si (x_0, y_0) yace en la Región I, la cantidad $y(t)$ de depredadores crecerá indefinidamente, en tanto que la cantidad $x(t)$ de presas crece inicialmente para luego decrecer y estabilizarse en un determinado valor. Ello se debe a que las curvas solución en dicha región tienden a girar hacia la izquierda y, medida que transcurre el tiempo, se tornan aproximadamente paralelas al eje de ordenadas. El hecho que los depredadores crezcan sin cota alguna y que las presas tiendan a estabilizarse puede justificarse bajo el argumento de que las presas tienen una tasa de reproducción considerablemente mayor que la de los depredadores. De este modo, los depredadores tienen suficiente alimento para subsistir y reproducirse.

3) Si (x_0, y_0) se encuentra en la Región II, ambas poblaciones se extinguirán. Ello se debe a que si $(x(t), y(t))$ es una curva solución que pasa por (x_0, y_0) , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$$

Este hecho se justifica debido a que $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable.

Como podemos comprobar en este Ejemplo, el estudio cualitativo de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo brinda información muy significativa acerca del comportamiento de las soluciones, sin necesidad de hallarlas explícitamente.

Aplicaciones a la Meteorología: El atractor de Lorenz

El famoso *Sistema de Lorenz*, ideado en 1963, está dado por

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y - x) \\ y'(t) = \rho x - y - xz \\ z'(t) = xy - \beta z \end{cases}$$

Con $\sigma, \rho, \beta \geq 0$. Como mencionamos en la Introducción, este modelo fue diseñado por Lorenz con el fin de pronosticar el estado del tiempo.

En este caso, $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ representan, respectivamente, la temperatura, presión y humedad existente en una determinada porción de atmósfera y en un instante t . Estos parámetros, como también la radiación infrarroja, la velocidad y dirección del viento, son factores que intervienen en el clima de la atmósfera. Si resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ \rho x - y - xz = 0 \\ xy - \beta z = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los siguientes puntos críticos del sistema:

$$(0, 0, 0), (\beta\sqrt{\rho-1}, \beta\sqrt{\rho-1}, \rho-1), (-\beta\sqrt{\rho-1}, -\beta\sqrt{\rho-1}, \rho-1)$$

Para clasificarlos, aplicaremos el Teorema 1.49. En este caso,

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = \sigma(y - x) \\ f_2(x, y, z) = \rho x - y - xz \\ f_3(x, y, z) = xy - \beta z \end{cases}$$

Luego

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z + \rho & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

Tomaremos, según Lorenz, los siguientes valores de los parámetros:

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}$$

Clasificación del punto crítico $(0,0,0)$:

Calculamos los autovalores de

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Para ello resolvemos la ecuación $\det(Df(0,0,0) - \lambda \cdot I) = 0$, y obtenemos los siguientes autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{-11 - \sqrt{1201}}{2}, \lambda_2 = \frac{-11 + \sqrt{1201}}{2}, \lambda_3 = -\frac{8}{3}$$

Por el inciso 2) del Teorema 1.49, como un autovalor es positivo, resulta que $(0,0,0)$ es un punto crítico inestable.

Para los demás puntos críticos el análisis es similar. Su clasificación está volcada en la siguiente tabla:

Punto crítico (x_0, y_0, z_0)	Autovalores de $Df(x_0, y_0, z_0)$	Clasificación
$(0,0,0)$	$\lambda_1 = \frac{-11 - \sqrt{1201}}{2}, \lambda_2 = \frac{-11 + \sqrt{1201}}{2}, \lambda_3 = -\frac{8}{3}$	<i>inestable</i>
$\left(\frac{8}{3}\sqrt{27}, \frac{8}{3}\sqrt{27}, 27\right)$	$\lambda_1 = 0.88 + 15.72i, \lambda_2 = 0.88 - 15.72i, \lambda_3 = -15.43$	<i>inestable</i>
$\left(-\frac{8}{3}\sqrt{27}, -\frac{8}{3}\sqrt{27}, 27\right)$	$\lambda_1 = 0.88 + 15.72i, \lambda_2 = 0.88 - 15.72i, \lambda_3 = -15.43$	<i>inestable</i>

Lorenz probó hallar una solución numérica del sistema con la ayuda de un ordenador y considerando las condiciones iniciales:

$$x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = 27$$

En nuestro caso, hallaremos la solución numérica utilizando el siguiente comando de Wolfram Mathematica:

```
Lorenz = NDSolve[{x'[t] == -10 x[t] + 10 y[t], y'[t] == -x[t] z[t] + 28 x[t] - y[t], z'[t] == x[t] y[t] - 8/3 z[t], x[0] == -8, y[0] == 8, z[0] == 27}, {x, y, z}, {t, 0, 50}]
```

Para representar gráficamente la curva solución, ejecutamos el siguiente comando:

```
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}/. Lorenz, {t, 0, 50}]
```

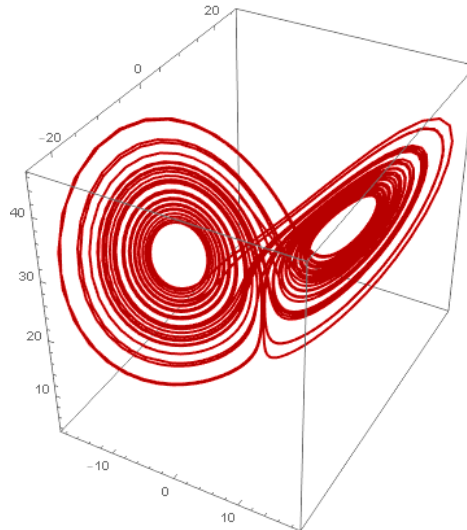


Figura 1.7: Gráfica de una curva solución de las Ecuaciones de Lorenz.

La curva solución se visualiza mejor si se la proyecta sobre uno de los planos coordenados, por ejemplo, en el plano xz . Esto se logra ejecutando el comando:

`ParametricPlot [ { x [ t ] , z [ t ] } /. Lorenz, { t , 0 , 50 } ]`

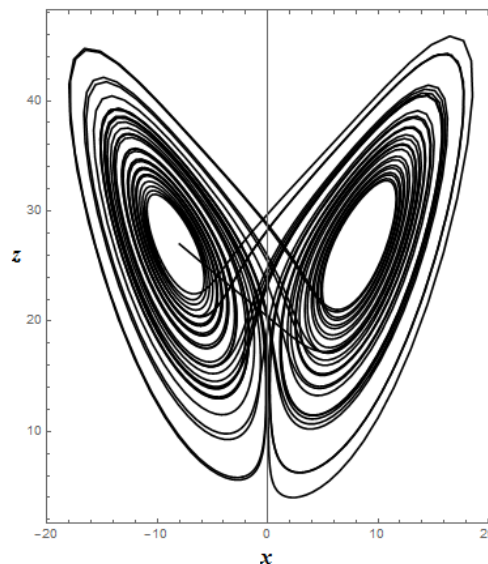


Figura 1.8: Proyección de la curva solución de la Figura 1.7 sobre el plano xz .

Observamos que la curva solución sufre alternadamente un número de oscilaciones aleatorias a la derecha, seguida de un número de oscilaciones aleatorias hacia la izquierda. Debido al origen meteorológico de las Ecuaciones de Lorenz, podemos pensar que se producirán alternadamente un número aleatorio de días despejados, seguidos de un número aleatorio de días lluviosos.

Lorenz detectó que si se consideran dos atmósferas con estados iniciales extremadamente próximos (una variación en la cuarta cifra decimal) se genera una desviación importante de las soluciones en un tiempo no muy grande. Lorenz comparó

metafóricamente este fenómeno afirmando: “*El aleteo de una mariposa en Brasil es capaz de provocar un tornado en Texas*”.

Lo que resulta muy interesante es que, si se parte de un gran número de atmósferas virtuales y se dibujan las curvas solución, se ve que todas ellas se acumulan sobre una forma muy parecida a la de una mariposa. Este conjunto parece “atraer” a las soluciones y por esta razón se lo llama “*el extraño atractor de Lorenz*”. La estructura detallada de este conjunto aún no se ha comprendido por completo.

En los Capítulos siguientes no sólo analizaremos cualitativamente los modelos matemáticos que describen el movimiento de un péndulo simple y doble, sino que mostraremos además cómo se construyen dichos modelos, los cuales quedarán expresados en términos de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 2

Nociones de Física

En este capítulo expondremos los conceptos teóricos de la Física que precisaremos para desarrollar este trabajo. Explicaremos las nociones básicas de la Mecánica Lagrangiana y la aplicaremos para construir el modelo matemático que describirá el movimiento de un péndulo simple sometido a la fuerza de rozamiento del aire.

2.1 Estudio del movimiento de una partícula

En ocasiones nos interesa observar el movimiento de un cuerpo de manera global, sin tener en cuenta los detalles internos a su movimiento. Por ejemplo:

- El movimiento de un automóvil sin tener en cuenta el giro de sus ruedas.
- El vuelo de un avión sin importarnos el movimiento de sus alas.
- El movimiento de un planeta sin contemplar su rotación.

En estos casos consideraremos al cuerpo como si fuera una *partícula*. Su definición es la siguiente:

Definición 2.1: Partícula o cuerpo puntual

*Un cuerpo es considerado una **partícula** o **cuerpo puntual**, lo que equivale a visualizarlo como si ocupase un punto en el espacio, cuando nos interesa su movimiento globalmente, sin tener en cuenta los detalles internos a su movimiento. O cuando está tan distante que no podemos apreciar esos detalles.*

Cómo describir el movimiento de una partícula en el plano

Una partícula *se mueve* si la vemos cambiar de lugar, es decir, si ocupa distintas *posiciones* en distintos *instantes*. Luego, la idea de movimiento relaciona los conceptos de **espacio** y **tiempo**.

En este trabajo de tesis supondremos que el cuerpo puntual se desplaza en un plano. Para describir su movimiento necesitamos en primer lugar incorporar un sistema de ejes coordenados. De este modo, su movimiento quedará completamente descripto mediante tres magnitudes vectoriales:

- **Posición**
- **Velocidad**
- **Aceleración**

Veamos qué significan estas magnitudes.

Definición 2.2: Vector posición de una partícula

Sea I un intervalo de la recta real. El vector posición de una partícula es una función vectorial derivable $\vec{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Que asigna, a cada instante " t ", la posición donde se encuentra la partícula en dicho instante.

El vector posición se lo representa gráficamente mediante un vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto $(x(t), y(t))$.

Definición 2.3: Trayectoria de una partícula

Es la curva que describe la partícula al desplazarse. Es decir, si $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ es el vector posición de una partícula entonces su trayectoria es la siguiente curva C :

$$C = \{ (x(t), y(t)) / t \in I \}$$

Definición 2.4: Velocidad de una partícula

La velocidad $\vec{v}(t)$ de una partícula es la derivada de su vector posición. Es decir,

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

El vector velocidad mide las variaciones de la posición de la partícula con respecto al tiempo. Se lo representa gráficamente mediante un vector con origen en el punto $(x(t), y(t))$. Es siempre un vector tangente a la trayectoria en dicho punto y su sentido es el mismo que el del movimiento.

Definición 2.5: Rapidez de una partícula

La rapidez de una partícula es el módulo de su vector velocidad. Es decir,

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Definición 2.6: aceleración de una partícula

La aceleración $\vec{a}(t)$ de una partícula es la derivada de su vector velocidad. Es decir,

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$$

El vector aceleración mide las variaciones de la velocidad de la partícula con respecto al tiempo. Se lo representa gráficamente mediante un vector con origen en el punto $(x(t), y(t))$. Puede ser nulo, tangente o apuntando hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

Ejemplo 2.7

La posición de una partícula que se mueve en el plano queda determinada por la función posición $\vec{r}(t) = (\sin(t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

- 1) Calcular la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = \frac{\pi}{4}$.
- 2) Representar gráficamente la trayectoria que sigue la partícula, su posición y velocidad en el instante $t = \frac{\pi}{4}$.
- 3) ¿Con qué rapidez se mueve la partícula en ese instante?

Solución

1)

Posición de la partícula: $\vec{r}(t) = (\sin(t), \sin(2t))$

Velocidad de la partícula: $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (\cos(t), 2\cos(2t))$

Por lo tanto

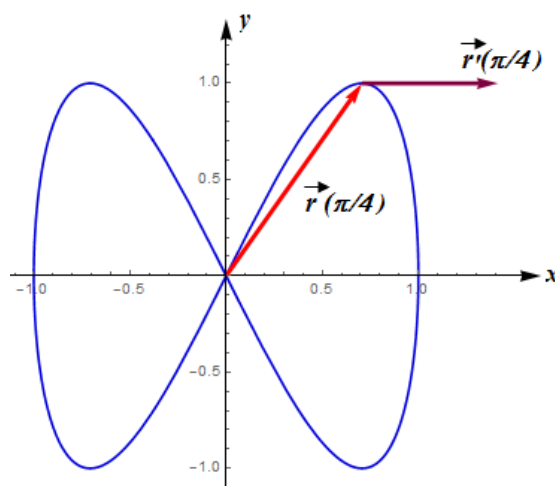
Posición de la partícula en el instante $t = \frac{\pi}{4}$: $\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

Velocidad de la partícula en el instante $t = \frac{\pi}{4}$: $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

2) Para representar gráficamente la trayectoria de la partícula, escribimos el siguiente comando de Wolfram Mathematica:

`ParametricPlot [ {Sin[t], Sin[2t] } , { t, 0, 2 pi } ]`

Su gráfica, junto con los vectores posición y velocidad se muestran a continuación:



3) La rapidez con que se mueve la partícula en el instante $t = \frac{\pi}{4}$ es

$$\left| \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

2.2 Energía cinética, potencial y mecánica

En esta sección introduciremos los conceptos de Energía Cinética y Potencial, los cuales utilizaremos en el planteo de las Ecuaciones de Lagrange.

En Física, la Energía Cinética de un cuerpo es aquella energía que posee debido a su movimiento. Su definición es la siguiente:

Definición 2.8: Energía cinética

La Energía cinética de un cuerpo es

$$T = \frac{1}{2} m \left| v(t) \right|^2$$

Donde

m: masa del cuerpo

v(t): velocidad del cuerpo en el instante t.

Por otro lado, la Energía Potencial Gravitatoria es la energía que tienen los cuerpos por el hecho de poseer masa y estar situados a una determinada altura sobre la superficie de la Tierra. Se la define matemáticamente del siguiente modo:

Definición 2.9: Energía potencial gravitatoria

La Energía potencial gravitatoria de un cuerpo es

$$V = m \cdot g \cdot h$$

Donde

m: masa del cuerpo

g : aceleración de la gravedad, cuyo valor es 9.8 m/seg²

h: altura del cuerpo sobre la superficie terrestre.

De la suma de ambas energías surge la Energía Mecánica:

Definición 2.10: Energía mecánica

La Energía mecánica de un cuerpo es

$$E = T + V$$

Donde

T: es la Energía cinética

V: es la Energía potencial

2.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

En Física, una Fuerza es una magnitud vectorial que es capaz de modificar la velocidad o el estado de reposo de un cuerpo. Se dice que una Fuerza realiza un Trabajo si logra mover un objeto a lo largo de una curva C . Matemáticamente el trabajo realizado por una fuerza F para mover un cuerpo desde un punto a otro de una curva C , viene dado por la siguiente fórmula:

$$W = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Donde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de la curva C , para valores de t entre a y b .

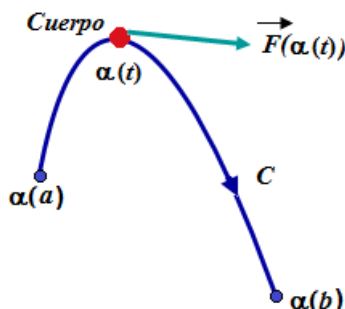


Figura 2.1: Representación de una fuerza F actuando sobre un cuerpo que se mueve sobre una curva C .

En Mecánica Clásica, resulta útil clasificar a las fuerzas en dos tipos:

- **Fuerzas conservativas**
- **Fuerzas no conservativas**

Una fuerza es **conservativa** cuando el trabajo realizado por ella a lo largo de cualquier curva cerrada es **cero**. Recibe este nombre porque **conserva** constante la Energía Mecánica del cuerpo sobre el cual actúa.

Asimismo, diremos que una fuerza es **no conservativa** si existe una curva cerrada en la que el trabajo realizado por esa fuerza a lo largo de dicha curva es **distinto de cero**.

Ejemplo 2.11

Una curva C está parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t^3 - 9t)$, con $t \in [-3, 3]$. Sobre el plano actúa una fuerza $F(x, y) = (-y, x)$.

- 1) Probar que la curva C es cerrada.
- 2) Dibujar la curva C .
- 3) Calcular el trabajo realizado por la fuerza F para mover una partícula a lo largo de toda la curva C .
- 4) ¿Es F una fuerza conservativa?

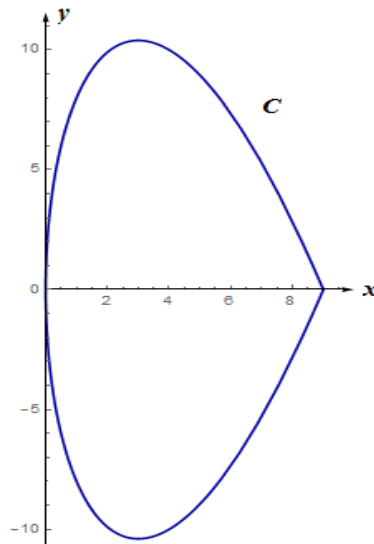
Solución

1) Como $\alpha(-3) = \alpha(3) = (9, 0)$ entonces el extremo y el origen de C coinciden. Luego, concluimos que la curva C es cerrada.

2) Para dibujar la curva C , ejecutamos el comando

$$\text{ParametricPlot} \left[\left\{ t^2, t^3 - 9t \right\}, \left\{ t, -3, 3 \right\} \right]$$

Obtenemos el siguiente gráfico:



3) En este caso, $a = -3$, $b = 3$. Luego

$$\begin{aligned}
 W &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{-3}^3 F(t^2, t^3 - 9t) \cdot (2t, 3t^2 - 9) dt = \int_{-3}^3 (-t^3 + 9t, t^2) \cdot (2t, 3t^2 - 9) dt \\
 &= \int_{-3}^3 (-2t^4 + 18t^2 + 3t^4 - 9t^2) dt = \int_{-3}^3 (9t^2 + t^4) dt = \frac{1296}{5}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza F para mover la partícula a lo largo de C es

$$W = \frac{1296}{5}$$

4) La fuerza F no es conservativa pues, por el inciso 3), el trabajo realizado por dicha fuerza para mover la partícula a lo largo de la curva cerrada C es distinto de cero.

2.4 Fuerzas con las que trabajaremos

En este trabajo, cuando analicemos el movimiento del péndulo, trabajaremos con las siguientes fuerzas:

- **La Fuerza Peso**
- **La Fuerza de Tensión**
- **La Fuerza de rozamiento del aire**

Explicaremos brevemente cada una de ellas.

■ **Fuerza Peso** ($\vec{P}$): Es la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo. Actúa siempre perpendicular a la superficie terrestre. Es una *fuerza conservativa*. Si el cuerpo se encuentra próximo a la superficie de la Tierra, el módulo de la fuerza Peso es

$$|\vec{P}| = m \cdot g$$

Donde

m : Masa del cuerpo

g : Aceleración de la gravedad, cuyo valor es 9.8 m/seg^2

■ **Fuerza de Tensión** ($\vec{T}$): Es la fuerza que es ejercida mediante la acción de un cable, hilo, cuerda u otro objeto sólido similar. Para el caso del péndulo, la tensión ejercida por el hilo es una *fuerza conservativa*.

■ **Fuerza de rozamiento del aire** ($\vec{F}_a$): Es la fuerza que sufre un cuerpo al moverse en el aire. Es una fuerza *no conservativa* y provoca que parte de la Energía Mecánica se transforme en Energía Calorífica. Si un cuerpo se mueve a una rapidez moderada, se prueba experimentalmente que la fuerza de rozamiento del aire es proporcional y de sentido contrario a su vector velocidad. Es decir

$$\vec{F}_a = -k \cdot \vec{v}(t)$$

Donde

$\vec{v}(t)$: velocidad del cuerpo en el instante t

k : constante de rozamiento. Tiene la siguiente fórmula:

$$k = \frac{\rho \cdot A \cdot \delta}{2}$$

En este caso,

ρ : Densidad del aire. Aunque varía con la altura, se utilizará su valor a nivel del mar, es decir, 1.29 kg/m^3 .

A : Área del cuerpo expuesta al aire.

δ : Coeficiente de arrastre, que depende de la forma del cuerpo.

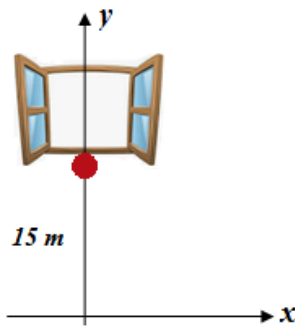
El coeficiente de arrastre δ es un número adimensional que mide cuánta resistencia ofrece el cuerpo cuando éste se mueve en el aire. Cuanto menor sea δ , el objeto será más aerodinámico, es decir, se moverá más rápido por el aire. En la siguiente tabla se proporcionan los coeficientes de arrastre de algunos objetos:

Forma del objeto	Valor aproximado de δ
Disco circular	1.2
Esfera	0.4
Avión	0.06
Caja rectangular	0.9
Cuerpo humano	0.8

Cuando un cuerpo se mueve sólo bajo la acción de fuerzas conservativas, es posible hallar su velocidad según la altura en la que se encuentra, si se conoce su velocidad y altura en un determinado momento. El siguiente Ejemplo aplica este resultado.

Ejemplo 2.12

Desde una ventana que está a 15 m. de altura, se lanza hacia abajo una pelota de 0.5 kg. Con una rapidez inicial $|v(0)| = 20 \text{ m/seg.}$ Sobre la pelota sólo actúa la fuerza Peso. Calcular:



- 1) Su Energía Mecánica.
- 2) La rapidez con que llegará al piso.

Solución

1) Como la fuerza Peso es la única fuerza que actúa sobre la pelota y además es conservativa, la Energía Mecánica se conserva. Calculamos dicha Energía en el instante en que se lanza la pelota. Entonces

$$E = T + V = \frac{1}{2} m |v(0)|^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} 0.5 |20|^2 + (0.5) \cdot (9.8) \cdot (15) = 173.5 \frac{\text{kg}}{\text{seg}^2} \text{m}^2$$

2) Sea v la rapidez de la pelota cuando llega al piso. En este caso, la altura h de la pelota es igual a cero. Por lo tanto

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} 0.5 v^2 + 0 \Rightarrow 173.5 = \frac{1}{2} 0.5 v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(173.5)}{0.5}} = 26.34 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Luego, la pelota llega al piso con una rapidez de $26.34 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

2.5 La Mecánica Lagrangiana

La *Mecánica Lagrangiana* es una reformulación de la *Mecánica Newtoniana* o *Mecánica Clásica*. Fue introducida por Joseph Louis Lagrange en 1788. Es más flexible y a menudo más útil para resolver problemas, ya que simplifica considerablemente el modelado de ciertos sistemas físicos. Por ejemplo, en la *Mecánica Clásica*, si quisiéramos hallar las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve en el plano, es necesario conocer todas las fuerzas que actúan sobre dicha partícula para luego aplicar La Segunda Ley de Newton:

$$\sum_{i=1}^k \vec{F}_i(t) = m \cdot \vec{a}(t)$$

Donde

$\vec{F}_i(t)$: Fuerza que actúa sobre la partícula, $i = 1, 2, \dots, k$.

m : Masa de la partícula.

$\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t))$: Aceleración de la partícula.

De este modo, quedaría planteado un sistema de ecuaciones diferenciales en las incógnitas $x(t)$ e $y(t)$, las cuales determinarán la posición de la partícula en cada instante.

En cambio, en la *Mecánica Lagrangiana*, para encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula, sólo se precisa calcular las Energías Cinética y Potencial, junto con las eventuales fuerzas no conservativas que actúan sobre la partícula. Esto simplifica considerablemente los cálculos. Más específicamente, si se tiene un sistema formado por N partículas, para hallar la posición de las mismas en cualquier instante, se construye primeramente el *Lagrangiano*, el cual queda definido del siguiente modo:

Definición 2.13: El Lagrangiano

Dado un sistema formado por N partículas de masa $m_1, m_2, \dots, m_N$, el Lagrangiano del sistema es

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = T - V$$

Donde

$q_1, q_2, \dots, q_n$ son las variables independientes o coordenadas generalizadas.

$$\dot{q}_j = \frac{d}{dt}[q_j], \quad j = 1, 2, \dots, n$$

n es la cantidad de variables independientes o grados de libertad.

T es la suma de las Energías cinéticas de las partículas que componen el sistema:

$$T = \frac{1}{2} m_1 |v_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |v_2|^2 + \dots + \frac{1}{2} m_N |v_N|^2$$

V es la suma de las Energías potenciales de las partículas que componen el sistema.

$$V = m_1 \cdot g \cdot h_1 + m_2 \cdot g \cdot h_2 + \dots + m_N \cdot g \cdot h_N$$

Cabe mencionar que las coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \dots, q_n$ son funciones que dependen del tiempo t .

Para hallar las posiciones de las N partículas, se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales, conocido como *Las Ecuaciones de Euler-Lagrange*. Su formulación está dada en el siguiente Teorema.

Teorema 2.14: Ecuaciones de Euler-Lagrange para fuerzas conservativas

Sea un sistema formado por N partículas, con Lagrangiano

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = T - V$$

Si sobre las partículas sólo actúan fuerzas conservativas, entonces se verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en las incógnitas $q_1, q_2, \dots, q_n$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

Demostración

Véase Referencia [9] ■

Las *Ecuaciones de Euler-Lagrange* también pueden plantearse si sobre un sistema actúan fuerzas no conservativas. El siguiente Teorema indica cómo quedan expresadas dichas ecuaciones.

Teorema 2.15: Ecuaciones de Euler-Lagrange para fuerzas no conservativas

Sea un sistema formado por N partículas, con Lagrangiano

$$L\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t\right) = T - V$$

Si sobre las partículas actúan fuerzas no conservativas, entonces se verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en las incógnitas $q_1, q_2, \dots, q_n$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

Donde

$\vec{F}_i$: Suma de todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre la i -ésima partícula.

$\vec{r}_i$: Vector posición de la i -ésima partícula.

Demostración

Véase Referencia [9] ■

2.6 Desarrollo de la ecuación de movimiento de un péndulo simple

En esta sección aplicaremos las *Ecuaciones de Euler-Lagrange* para describir el movimiento de un péndulo simple. Estudiaremos además su Diagrama de Fase y haremos una simulación de su movimiento mediante el software Wolfram Mathematica.

¿Qué es un péndulo simple?

Un péndulo simple es una partícula de masa m suspendida verticalmente mediante un hilo inextensible de masa despreciable y longitud l .

Si la partícula se desplaza un ángulo θ (medido en radianes) y luego se la suelta, el péndulo comienza a oscilar. Por convención, supondremos que el signo positivo de θ ocurre cuando la masa se ubica del lado derecho de la vertical. El caso contrario se supondrá que θ es negativo.

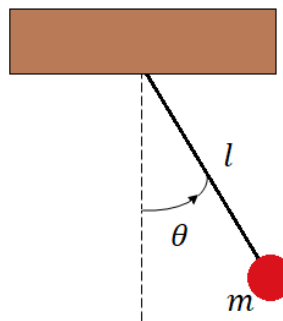


Figura 2.2: Péndulo simple.

Nuestro objetivo consistirá en hallar, en cada instante, la posición de la masa m . Para ello bastará conocer, en cada instante, cuál es el ángulo θ . Supondremos que el péndulo

está sometido a la acción de la fuerza de rozamiento del aire. De este modo, las fuerzas que actúan sobre la masa m se muestran en el siguiente gráfico:

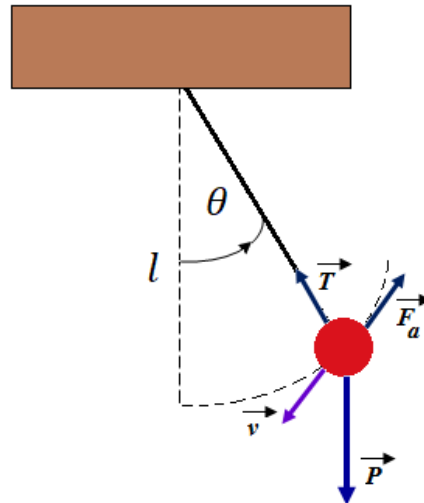


Figura 2.3: Fuerzas que actúan en un péndulo simple.

Donde

$\vec{P}$: Fuerza Peso.

$\vec{T}$: Tensión del hilo.

$\vec{F}_a$: Fuerza de rozamiento del aire.

En la siguiente Proposición mostraremos cuál es la ecuación diferencial que permitirá determinar el valor, en cada instante, del ángulo de desplazamiento θ .

Proposición 2.16: Ecuación de movimiento de un péndulo simple

Sea un péndulo de masa m , suspendida de un hilo de longitud l . Supongamos que el péndulo está sometido a la acción de la fuerza de rozamiento del aire

$$\vec{F}_a = -k \cdot \vec{v}(t)$$

Donde

k : Constante de rozamiento.

$\vec{v}(t)$: Velocidad de la masa m en el instante t .

Entonces el ángulo de desplazamiento θ satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \frac{k}{m} \theta'(t) = 0$$

Demostración

Para hallar la ecuación diferencial que determina el ángulo de desplazamiento θ , aplicaremos las *Ecuaciones de Euler-Lagrange*. Para ello hallaremos primero el *Lagrangiano*.

Cálculo del Lagrangiano

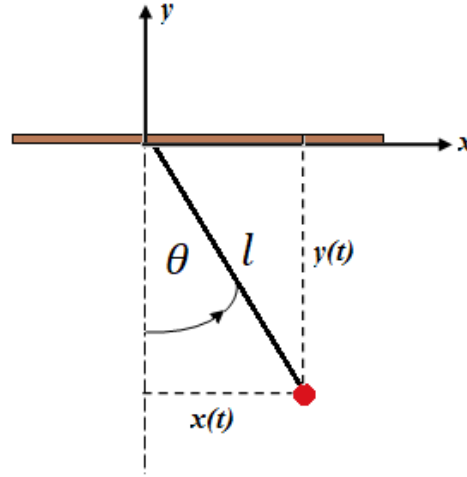
Como nuestra incógnita es el ángulo de desplazamiento θ , el *Lagrangiano* tendrá una sola variable independiente. Además, el péndulo simple es un sistema compuesto por una sola partícula de masa m . De este modo, según la Definición 2.13, tenemos que

$$\begin{cases} N = 1 \\ n = 1 \\ q_1 = \theta \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = T - V \quad [\text{I}]$$

Para hallar T y V , fijaremos un sistema de coordenadas según se indica en la siguiente figura:



Cálculo de T

Como el vector posición de la masa m es

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (l \sin(\theta), -l \cos(\theta))$$

Entonces, aplicando la Definición 2.4 y la Regla de la Cadena obtenemos

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (l \cos(\theta) \dot{\theta}, l \sin(\theta) \dot{\theta})$$

Teniendo en cuenta las Definiciones 2.5 y 2.8 resulta

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m |\vec{v}(t)|^2 = \frac{1}{2} m \left| (l \cos(\theta) \dot{\theta}, l \sin(\theta) \dot{\theta}) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left((l \cos(\theta) \dot{\theta})^2 + (l \sin(\theta) \dot{\theta})^2 \right) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta})^2 \quad [\text{II}]$$

Cálculo de V

De la Definición 2.9 tenemos que

$$V = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot y(t) = m \cdot g \cdot (-l \cos(\theta)) = -m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta)$$

Por lo tanto

$$V = -m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) \quad [\text{III}]$$

Reemplazando [II] y [III] en [I] obtenemos

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta)$$

Cálculo de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Como la fuerza de rozamiento del aire es una fuerza no conservativa, aplicaremos la Ecuación de Euler-Lagrange que indica el Teorema 2.15. En este caso, y teniendo en cuenta que $N = n = 1$ y que $q_1 = \theta$, resulta

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad [\text{IV}]$$

Donde

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta)$$

$$\vec{F}_a = -k \cdot \vec{v}(t) = -k \cdot (l \cos(\theta) \dot{\theta}, l \sin(\theta) \dot{\theta})$$

$$\vec{r} = (l \sin(\theta), -l \cos(\theta))$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} [m l^2 \dot{\theta}] + m g l \sin(\theta) = m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin(\theta)$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin(\theta) \quad [\text{V}]$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= -k \left(l \cos(\theta) \dot{\theta}, l \sin(\theta) \dot{\theta} \right) \cdot (l \cos(\theta), l \sin(\theta)) = \\ &= -k \left(l^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta} + l^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta} \right) = -k l^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -k l^2 \dot{\theta} \quad [\text{VI}]$$

Sustituyendo [V] y [VI] en [IV] tenemos

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin(\theta) = -k l^2 \dot{\theta}$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación anterior por $m l^2$ resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = -\frac{k}{m} \dot{\theta}$$

En consecuencia

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{k}{m} \dot{\theta} = 0$$

■

Observación 2.17

En esta última Proposición podemos comprobar que, para hallar la ecuación de movimiento de un péndulo simple, es más fácil emplear la Mecánica Lagrangiana que la Newtoniana. Efectivamente, si quisiéramos aplicar la Mecánica Newtoniana, deberíamos realizar el Diagrama de Cuerpo Libre de la masa m a fin de analizar todas fuerzas que actúan sobre ella, para luego aplicar la Segunda Ley de Newton. Con la Mecánica Lagrangiana estos pasos se prescinden.

Por otro lado, en la Proposición 2.16, la ecuación diferencial planteada también contempla el caso en que se desprecia la fuerza de rozamiento del aire, si se toma la constante $k = 0$.

Diagrama de Fase del péndulo simple: estudio cualitativo

Para hallar el Diagrama de Fase del péndulo simple, llevaremos la ecuación de movimiento del péndulo obtenida en la Proposición 2.16 :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \frac{k}{m} \theta'(t) = 0 \quad [I]$$

A un sistema autónomo de primer orden. Entonces, si definimos

$$\begin{cases} x = \theta \\ y = \theta' \end{cases}$$

La ecuación [I] es equivalente al sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{l} \sin(x) - \frac{k}{m} y \end{cases}$$

Cálculo de los Puntos Críticos

Resolvemos el sistema algebraico

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\frac{g}{l} \sin(x) - \frac{k}{m} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -\frac{g}{l} \sin(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = m\pi, \text{ con } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $x = \theta$ y considerando que $\theta \in [-\pi, \pi]$, resulta que los puntos críticos son:

$$(0, 0), (\pi, 0), (-\pi, 0).$$

Clasificación de los Puntos Críticos

Aplicamos el Teorema 1.49. Primeramente calculamos la matriz Jacobiana $Df(x, y)$.

En este caso,

$$\begin{cases} f_1(x, y) = y \\ f_2(x, y) = -\frac{g}{l} \sin(x) - \frac{k}{m} y \end{cases}$$

Luego

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x) & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Para el punto crítico $(0, 0)$:

Calculamos los autovalores de

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Por la Proposición 1.20, tomando $A = Df(0, 0)$, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}}{2}$$

Por lo tanto, los autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{k}{m} + \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\frac{k}{m} - \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}}{2}$$

Consideremos los siguientes casos:

- 1) Si $\left(\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}\right) \geq 0$ entonces se prueba fácilmente que $\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0$.
- 2) Si $\left(\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}\right) < 0$ entonces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y verifican que $\text{Re}(\lambda_1) < 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) < 0$

Luego, por el inciso 1) del Teorema 1.49, deducimos que $(0, 0)$ es *asintóticamente estable*.

Para el punto crítico $(\pi, 0)$:

Calculamos los autovalores de

$$Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Nuevamente, por la Proposición 1.20, considerando $A = Df(\pi, 0)$, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda - \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}}{2}$$

Por lo tanto, los autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{k}{m} + \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\frac{k}{m} - \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}}{2}$$

Por el inciso 2) del Teorema 1.49, como $\lambda_1 > 0$, concluimos que $(\pi, 0)$ es *inestable*.

Para el punto crítico $(-\pi, 0)$:

Como $Df(\pi, 0) = Df(-\pi, 0)$, concluimos que $(-\pi, 0)$ es también *inestable*.

El siguiente gráfico muestra el Diagrama de Fase del péndulo simple, para el caso en que $k = 0.04$, $g = 9.8 \text{ m / seg}^2$, $m = 0.05 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$. Debido a que el valor de la constante k es pequeño, la fuerza de rozamiento del aire no es tan fuerte.

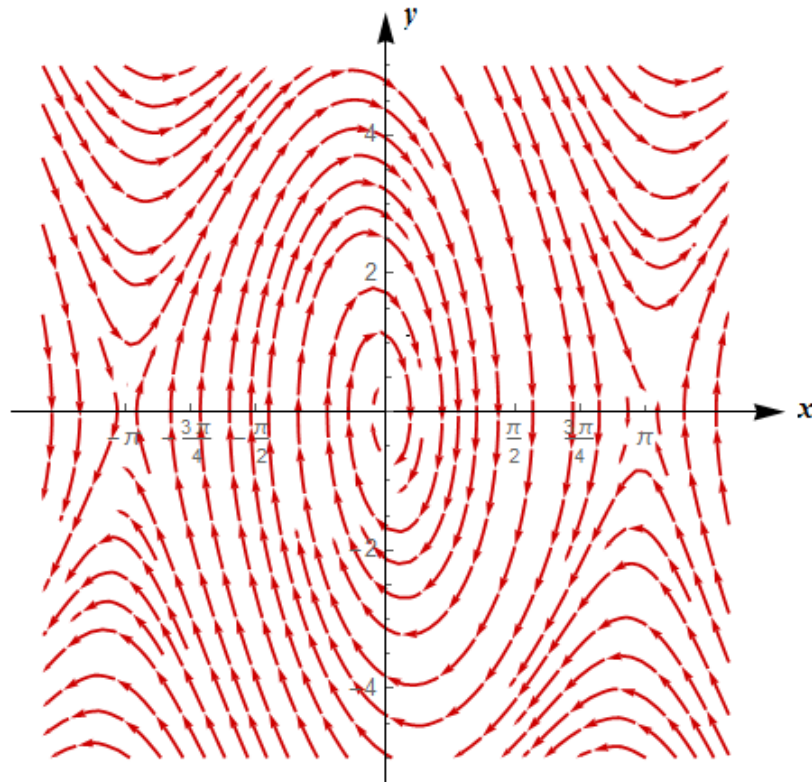


Figura 2.4: Diagrama de Fase del péndulo simple.

En el Diagrama comprobamos que $(0, 0)$ es un *foco o punto espiral*, mientras que $(\pi, 0)$ y $(-\pi, 0)$ son *puntos silla*.

Como

$$\begin{cases} x = \theta \\ y = \theta' \end{cases}$$

Entonces

- $\{ x > 0 \Rightarrow \theta > 0 \Rightarrow \text{la masa del péndulo está del lado derecho de la vertical.}$
- $\{ x < 0 \Rightarrow \theta < 0 \Rightarrow \text{la masa del péndulo está del lado izquierdo de la vertical.}$
- $\{ y > 0 \Rightarrow \theta' > 0 \Rightarrow \text{el ángulo } \theta \text{ crece.}$
- $\{ y < 0 \Rightarrow \theta' < 0 \Rightarrow \text{el ángulo } \theta \text{ decrece.}$

El siguiente gráfico ayudará a comprender, al observar el Diagrama de Fase, en qué posición está ubicada la masa de péndulo y hacia dónde se está moviendo.

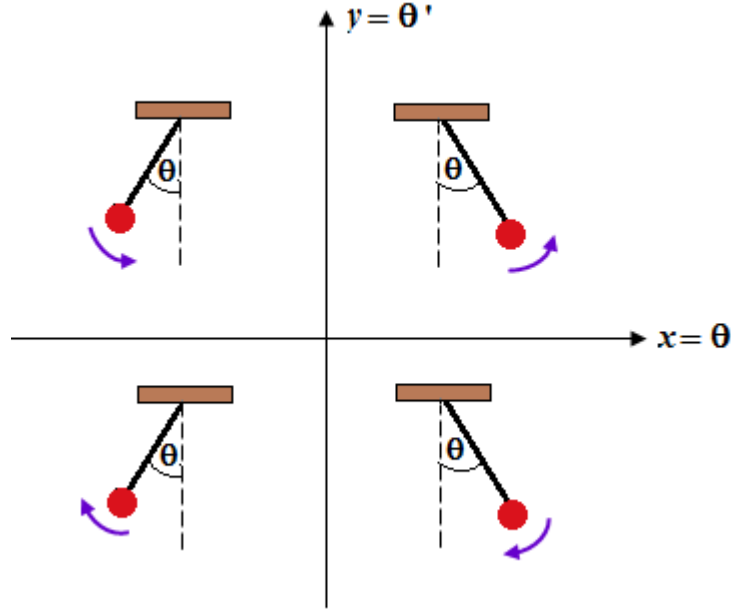


Figura 2.5: Posición y dirección de movimiento del péndulo según cada cuadrante del Plano de Fase.

Consideremos ahora un estado inicial del sistema, que llamaremos (x_0, y_0) . Si $x_0 \in \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ y si $(x(t), y(t))$ es una curva solución que pasa por (x_0, y_0) entonces, al observar el Diagrama de Fase, vemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0) \quad [\text{II}]$$

Analíticamente este hecho se justifica debido a que $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable.

De la ecuación [II] resulta que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta(t), \theta'(t)) = (0, 0)$$

Con lo cual

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \theta'(t) = 0 \end{cases} \quad [\text{III}]$$

Como

$$\vec{v}(t) = (l \cos(\theta(t)) \theta'(t), l \sin(\theta(t)) \theta'(t))$$

Entonces

$$|\vec{v}(t)| = l |\theta'(t)|$$

Por lo tanto, aplicando la segunda ecuación de [III] resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{v}(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} l |\theta'(t)| = l \lim_{t \rightarrow \infty} \theta'(t) = l \cdot 0 = 0$$

Es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{v}(t)| = 0 \quad [IV]$$

Así, de [III] y [IV] obtenemos que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{v}(t)| = 0 \end{cases}$$

De este modo, el péndulo tenderá a volver a la posición de equilibrio ($\theta = 0$). La trayectoria en forma de espiral nos indica que el péndulo oscila, pero las oscilaciones se van amortiguando con el paso del tiempo hasta detenerse ($|\vec{v}| = 0$). Esto era de esperar, debido a la presencia del rozamiento del aire.

Simulación del movimiento del péndulo simple

En la siguiente simulación, diseñada mediante el software Wolfram Mathematica 11.0, podemos visualizar el movimiento del péndulo simple, junto con la gráfica del ángulo de desplazamiento en función del tiempo, como así también el Diagrama de Fase. Dicha simulación contiene los siguientes datos de entrada:

Longitud del péndulo (L), Masa del péndulo (m), Radio de la masa del péndulo (r), Ángulo inicial de desplazamiento (θ_0) y la velocidad tangencial inicial (v_0). La velocidad inicial tangencial se la define como

$$v_0 = \pm |\vec{v}(0)| = \pm L |\theta'(0)|$$

Se considera que $v_0 > 0$ si $\vec{v}(0)$ apunta en sentido anti horario, mientras que $v_0 < 0$ si $\vec{v}(0)$ apunta en el sentido de las agujas del reloj. Los datos de entrada se ingresan a través del siguiente cuadro de diálogo:

Longitud del hilo del péndulo:	
L [metros]=	2
Masa del péndulo:	
m [kg.]=	0.3
Radio de la masa del péndulo:	
r [metros]=	0.2
Ángulo inicial de desplazamiento:	
θ_0 [radianes]=	π/4
Velocidad inicial:	
v_0 [m/seg.]=	-10

Figura 2.6: Cuadro de diálogo que permite ingresar los datos de entrada.

Se supone que la masa del péndulo es esférica, en cuyo caso su área es $A = 4 \pi r^2$. La constante de rozamiento k la obtuvimos aplicando la fórmula (confrontar pág. 60):

$$k = \frac{\rho \cdot A \cdot \delta}{2} = \frac{(1.29) \cdot (4 \pi r^2) \cdot (0.4)}{2}$$

En la siguiente Figura se visualizan los resultados obtenidos al ejecutar la simulación.

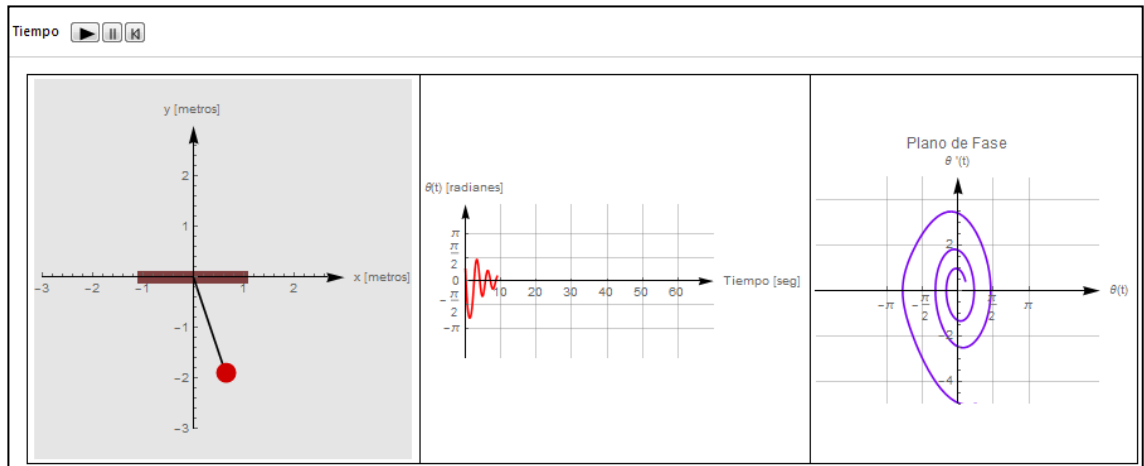


Figura 2.7: Gráficos que aparecen al ejecutar la simulación del movimiento del péndulo.

Si se quisiera analizar el movimiento del péndulo sin la acción de la fuerza rozamiento del aire, basta tomar el radio $r = 0$, pues así la constante de rozamiento k es nula. En este caso, si se ejecuta la simulación con los siguientes datos de entrada:

Longitud del hilo del péndulo:	
L [metros]=	2
Masa del péndulo:	
m [kg.]=	0.3
Radio de la masa del péndulo:	
r [metros]=	0
Ángulo inicial de desplazamiento:	
θ_0 [radianes]=	$\frac{\pi}{2}$
Velocidad inicial:	
v_0 [m/seg.]=	3

Entonces los gráficos obtenidos son los siguientes:

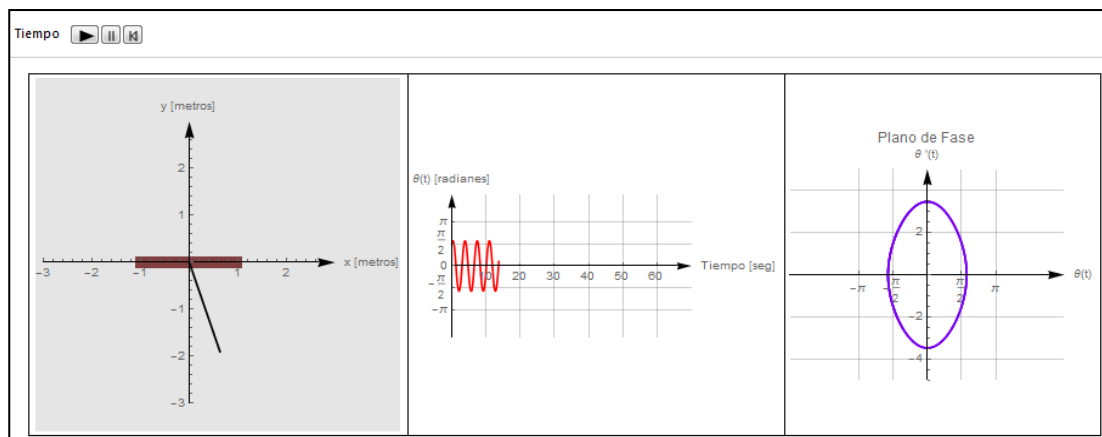


Figura 2.8: Gráficos que aparecen en caso de no actuar el rozamiento del aire.

El código fuente del programa lo mostramos a continuación.

Código fuente del programa que simula el movimiento de un péndulo simple

```
Interpretation[{L = 2 , m = 0.2, r = 0.2, Tita0 = Pi/4, v0 = 0},
Panel[Grid[{ {Style["Longitud del hilo del péndulo:", Bold],
SpanFromLeft}, {"L [metros]=", InputField[Dynamic[L]]},
{Style["Masa del péndulo:", Bold], SpanFromLeft}, {"m [kg.]=",
InputField[Dynamic[m]]}, {Style["Radio de la masa del péndulo:",
Bold], SpanFromLeft}, {"r [metros] =", InputField[Dynamic[r]]} ,
{Style["Ángulo inicial de desplazamiento:", Bold],
SpanFromLeft}, {" $\theta_0$  [radianes]=", InputField[Dynamic[Tita0]]} ,
{Style["Velocidad inicial:", Bold],
SpanFromLeft}, {"v0 [m/seg.]=", InputField[Dynamic[v0]] } } ] ],
Manipulate[ k = (1.29 ) (0.4) 2 Pi r^2;
Solu = NDSolve[{Tita'[ tt ] + 9.8/L Sin[ Tita [tt] ] + k/m Tita'[ tt ] == 0, Tita[0] ==
Tita0, Tita'[0] == v0/L}, Tita, {tt, 0, 100}];
Grid[{ {Show[ Graphics[{RGBColor[0.501961, 0.25098, 0.25098],
Rectangle[{-1.1, -0.12}, {1.1, 0.12}]}], Graphics[{Thickness[0.007],
Line[{ {0,0}, {L Sin[Extract[Tita[t]/. Solu, 1]], -L Cos[Extract[Tita[t] /. Solu,1]]}]}],
Graphics[{RGBColor[0.807843, 0, 0],
Disk[{L Sin[Extract[Tita[t] /. Solu, 1]], -L Cos[Extract[Tita[t] /. Solu, 1]], r}],
AxesStyle -> Arrowheads[0.06], AxesLabel -> {"x [metros]", "y [metros]"},
Background -> GrayLevel[0.898039], PlotRange -> {{-L - 1, L + 1}, {-L - 1, L + 1}},
Plot[Evaluate[Tita[s] /. Solu], {s, 0, t}, PlotRange -> {{0, 70}, {-Pi - 2, Pi + 2}},
AxesLabel -> {"Tiempo [seg]", " $\theta(t)$  [radianes]"}, AxesStyle -> Arrowheads[0.06],
PlotStyle -> Red, GridLines -> {{10, 20, 30, 40, 50, 60}, {-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi}},
Ticks -> {{10, 20, 30, 40, 50, 60}, {-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi}},
ParametricPlot[Evaluate[{Tita[s], Tita'[s]} /. Solu], {s, 0, t},
GridLines -> {{-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi}, Automatic},
Ticks -> {{-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi}, Automatic}, PlotLabel -> "Plano de Fase",
PlotRange -> {{-2 Pi, 2 Pi}, {-5, 5}},
AxesLabel -> " $\theta(t)$ ", " $\theta'(t)$ ", PlotStyle -> RGBColor[0.470588, 0, 0.941176],
AxesStyle -> Arrowheads[0.06] ]}], Frame -> All],
Panel["Movimiento amortiguado de un péndulo simple"], Delimiter,
{{t,0.001, "Tiempo"},0.001, 65, ControlType -> Trigger} ] ]
```

Capítulo 3

Análisis del péndulo doble

En este capítulo desarrollaremos la publicación presentada por Julio Pozo y Jonathan Makuc, citada en la Referencia [1]. Allí se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento de un péndulo doble. Aplicaremos las *Ecuaciones de Euler-Lagrange* para hallar tal sistema. Primeramente analizaremos la situación en la cual el péndulo no está sometido a la acción de la fuerza de rozamiento del aire. Luego plantearemos el caso en el que esta fuerza sí está presente. Estudiaremos también su Diagrama de Fase y haremos una simulación de su movimiento mediante el software Wolfram Mathematica. El péndulo doble es un ejemplo simple de sistema físico que puede exhibir un comportamiento caótico. Es decir, que pequeños cambios en las condiciones iniciales del sistema puede provocar grandes cambios en la solución.

¿Qué es un péndulo doble?

Un péndulo doble consiste en dos péndulos simples. Está formado por dos partículas de masa m_1 y m_2 , suspendidas verticalmente mediante dos varillas o alambres rectos de masa despreciable, de longitudes l_1 y l_2 respectivamente.

Si las masas m_1 y m_2 se desplazan un ángulo θ_1 y θ_2 para luego soltarlas, el sistema comenzará a oscilar. Supondremos que el péndulo se mueve en un plano vertical y que el signo positivo de los ángulos ocurre cuando las masas se ubican del lado derecho de la vertical. El caso contrario los ángulos serán negativos.

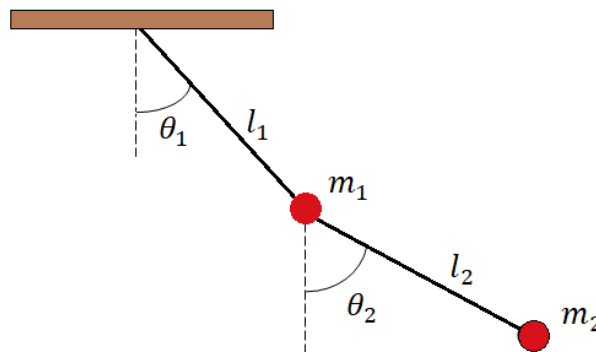


Figura 3.1: Péndulo doble.

Nuestro objetivo consistirá en hallar, en cada instante, la posición de las masas m_1 y m_2 . Para ello bastará conocer, en cada instante, cuáles son los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 . Supondremos que el péndulo no está sometido a la acción de la fuerza de rozamiento del aire. De este modo, las fuerzas que actúan sobre las masas m_1 y m_2 se muestran en el siguiente gráfico:

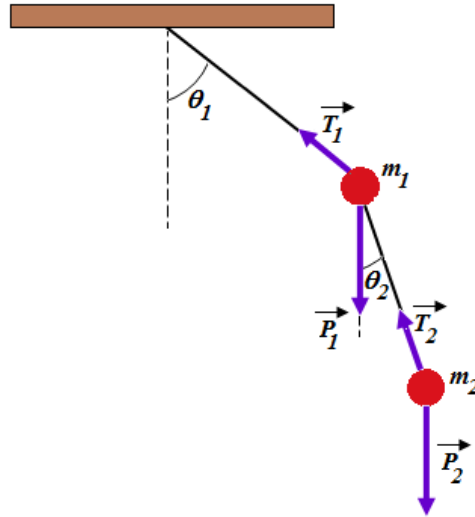


Figura 3.2: Fuerzas que actúan en un péndulo doble, en ausencia de rozamiento del aire.

Donde

$\vec{P}_1, \vec{P}_2$: Fuerzas Peso de las masas m_1 y m_2 .

$\vec{T}_1, \vec{T}_2$: Tensiones de las varillas l_1 y l_2 .

Todas estas fuerzas son conservativas. En el siguiente Teorema mostraremos cuál es el sistema de ecuaciones diferenciales que permitirá determinar el valor, en cada instante, de los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 .

Teorema 3.1: Ecuación de movimiento de un péndulo doble sin rozamiento

Sea un péndulo doble de masas m_1 y m_2 , suspendidas de dos varillas de longitudes l_1 y l_2 respectivamente. Supongamos que en el péndulo no actúa la fuerza de rozamiento del aire. Entonces los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 verifican el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de segundo orden

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Demostración

Para hallar el sistema de ecuaciones diferenciales que determine los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 , aplicaremos las *Ecuaciones de Euler-Lagrange*. Para ello calcularemos primero el *Lagrangiano*.

Cálculo del Lagrangiano

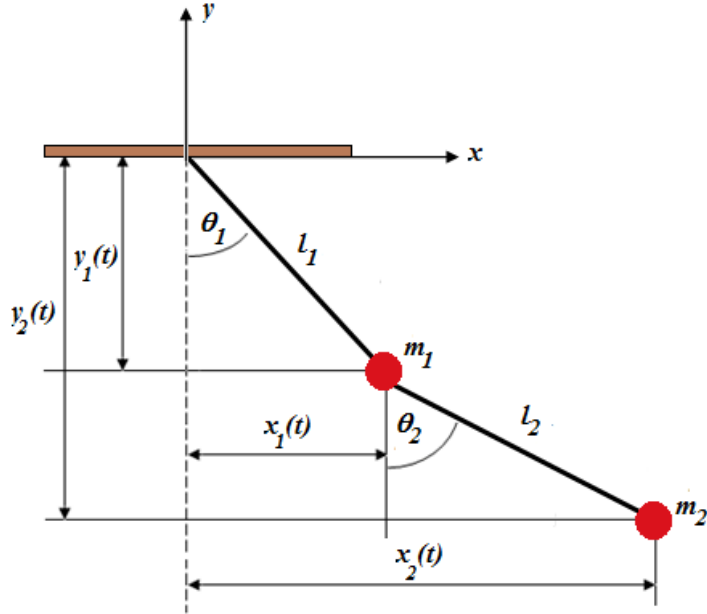
Como nuestras incógnitas son los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 , el *Lagrangiano* tendrá dos variables independientes. Además, el péndulo doble es un sistema compuesto por dos partículas de masas m_1 y m_2 . De este modo, según la Definición 2.13, tenemos que

$$\begin{cases} N = 2 \\ n = 2 \\ q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$L\left(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, t\right) = T - V \quad [\text{I}]$$

Para hallar T y V , fijaremos un sistema de coordenadas según se indica en la siguiente figura:



Cálculo de T

Como

$$x_1(t) = l_1 \sin(\theta_1)$$

$$y_1(t) = -l_1 \cos(\theta_1)$$

$$x_2(t) = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2)$$

$$y_2(t) = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)$$

Entonces los vectores posición de las masas m_1 y m_2 son

$$\vec{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (l_1 \sin(\theta_1), -l_1 \cos(\theta_1))$$

$$\vec{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2))$$

Luego, aplicando la Definición 2.4 y la Regla de la Cadena obtenemos

$$\vec{v}_1(t) = \vec{r}_1'(t) = (x_1'(t), y_1'(t)) = \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right)$$

$$\vec{v}_2(t) = \vec{r}_2'(t) = (x_2'(t), y_2'(t)) = \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right)$$

Teniendo en cuenta las Definiciones 2.13 y 2.5 resulta

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m_1 |v_1(t)|^2 + \frac{1}{2} m_2 |v_2(t)|^2 = \frac{1}{2} m_1 \left| \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right) \right|^2 + \\
 &\frac{1}{2} m_2 \left| \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right) \right|^2 = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \left(\left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right)^2 + \left(l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right)^2 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} m_2 \left(\left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right)^2 + \left(l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Luego de aplicar propiedades algebraicas y trigonométricas, obtenemos

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right] \quad [\text{I}]$$

Cálculo de V

De la Definición 2.13 tenemos que

$$\begin{aligned}
 V &= m_1 \cdot g \cdot h_1 + m_2 \cdot g \cdot h_2 = m_1 \cdot g \cdot y_1(t) + m_2 \cdot g \cdot y_2(t) = \\
 &= -m_1 \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) - m_2 \cdot g \cdot (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) = \\
 &= -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cos(\theta_2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cos(\theta_2) \quad [\text{II}]$$

Reemplazando la energía cinética [I] y la potencial [II] en el Lagrangiano que viene dado por $L = T - V$ resulta:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Cálculo de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Como todas las fuerzas que actúan en el sistema son no conservativas, aplicaremos el Teorema 2.14. Es decir, plantearemos las *Ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{Para } j = 1, 2, \dots, n$$

En este caso, como

$$\begin{cases} n = 2 \\ q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases}$$

Entonces las ecuaciones quedan expresadas de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \end{array} \right. \quad \text{[III]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{[IV]}$$

Cálculo de [III]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin(\theta_1)$$

Por lo tanto, la ecuación [III] queda

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0$$

Dividiendo miembro a miembro por l_1 obtenemos

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0 \quad \text{[V]}$$

Cálculo de [IV]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin(\theta_2)$$

Luego, la ecuación [IV] queda

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0$$

Dividiendo miembro a miembro por l_2 obtenemos

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad [\text{VI}]$$

De [V] y [VI] resulta finalmente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Observación 3.2

1) El sistema de ecuaciones diferenciales obtenido en el Teorema anterior sólo puede ser resuelto numéricamente, ya que carece de solución analítica. Más adelante aplicaremos el software Wolfram Mathematica 11.0 para resolverlo numéricamente y simular el movimiento de las masas del péndulo.

2) Supondremos que $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ ya que las posiciones angulares $\theta_1 = -\pi \vee \theta_2 = -\pi$ se corresponden con las del ángulo π .

Estudio cualitativo del péndulo doble sin rozamiento

Para el estudio cualitativo del péndulo doble sin rozamiento, llevaremos el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido en el Teorema 3.1:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad [\text{I}]$$

A un sistema autónomo de primer orden. Primeramente despejamos $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ de las ecuaciones del sistema [I] para que queden expresadas en términos de $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$. De este modo tenemos:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-(m_1 + m_2) l_1 \sin(\theta_1) + g m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 (m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g (m_1 + m_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1) - g (m_1 + m_2) \sin(\theta_2) + \dot{\theta}_1^2 l_1 (m_1 + m_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_2 (m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))}$$

Entonces, si definimos

$$\begin{cases} w_1 = \theta_1 \\ w_2 = \theta_2 \\ w_3 = \dot{\theta}_1 \\ w_4 = \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

Obtenemos el siguiente sistema no lineal de primer orden, que llamaremos $[I']$, el cual es equivalente al sistema $[I]$:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_3 \\ \dot{w}_2 = w_4 \\ \dot{w}_3 = \left(-(m_1 + m_2)l_1 \sin(w_1) + g m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_2) \right. \\ \quad \left. - w_4^2 l_2 m_2 \sin(w_1 - w_2) - w_3^2 l_1 m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1 - w_2) \right) / \left(l_1 (m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(w_1 - w_2)) \right) \\ \dot{w}_4 = \left(g (m_1 + m_2) \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1) - g (m_1 + m_2) \sin(w_2) + w_3^2 l_1 (m_1 + m_2) \sin(w_1 - w_2) \right. \\ \quad \left. + w_4^2 l_2 m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1 - w_2) \right) / \left(l_2 (m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(w_1 - w_2)) \right) \end{cases}$$

Obviamente no podemos dibujar el Diagrama de Fase asociado a este sistema, ya que consta de cuatro ecuaciones diferenciales. Sin embargo calcularemos los puntos críticos, los cuales nos brindarán información.

Cálculo de los Puntos Críticos

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = 0 \\ \dot{w}_2 = 0 \\ \dot{w}_3 = 0 \\ \dot{w}_4 = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$w_3 = 0$$

$$w_4 = 0$$

$$\frac{-(m_1 + m_2)l_1 \sin(w_1) + g m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_2) - w_4^2 l_2 m_2 \sin(w_1 - w_2) - w_3^2 l_1 m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1 - w_2)}{l_1 (m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(w_1 - w_2))} = 0$$

$$\frac{g (m_1 + m_2) \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1) - g (m_1 + m_2) \sin(w_2) + w_3^2 l_1 (m_1 + m_2) \sin(w_1 - w_2) + w_4^2 l_2 m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1 - w_2)}{l_2 (m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(w_1 - w_2))} = 0$$

Por lo tanto

$$w_3 = 0 \quad \text{[II]}$$

$$w_4 = 0 \quad \text{[III]}$$

$$-(m_1 + m_2)l_1 \sin(w_1) + g m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_2) = 0 \quad \text{[IV]}$$

$$g (m_1 + m_2) \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1) - g (m_1 + m_2) \sin(w_2) = 0 \quad \text{[V]}$$

De la ecuación [V] resulta

$$\cos(w_1 - w_2) \sin(w_1) = \sin(w_2) \quad \text{[VI]}$$

Sustituyendo [VI] en [IV] obtenemos

$$-(m_1 + m_2)l_1 \sin(w_1) + g m_2 \cos(w_1 - w_2) \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1) = 0$$

Luego

$$\sin(w_1) \left(-(m_1 + m_2) l_1 + g m_2 \cos^2(w_1 - w_2) \right) = 0$$

De aquí resulta que

$$\sin(w_1) = 0 \vee \left(-(m_1 + m_2) l_1 + g m_2 \cos^2(w_1 - w_2) \right) = 0$$

Es decir

$$\sin(w_1) = 0 \vee \left(\cos^2(w_1 - w_2) = \frac{(m_1 + m_2) l_1}{g m_2} \right)$$

Por lo tanto,

1) Si $\sin(w_1) = 0$ entonces, de la ecuación [VI] resulta que $\sin(w_2) = 0$. En consecuencia, considerando que $w_1, w_2 \in (-\pi, \pi]$, tenemos que los posibles valores de w_1 y w_2 son:

$$w_1 = 0 \wedge w_2 = 0$$

$$w_1 = 0 \wedge w_2 = \pi$$

$$w_1 = \pi \wedge w_2 = 0$$

$$w_1 = \pi \wedge w_2 = \pi$$

Luego, de estas últimas expresiones y de las ecuaciones [II] y [III] obtenemos los puntos críticos

$$P_1 = (0, 0, 0, 0), P_2 = (0, \pi, 0, 0), P_3 = (\pi, 0, 0, 0), P_4 = (\pi, \pi, 0, 0)$$

2) Si $\cos^2(w_1 - w_2) = \frac{(m_1 + m_2) l_1}{g m_2}$, no resulta sencillo hallar los valores de

$w_1, w_2 \in (-\pi, \pi]$ que verifican las ecuaciones [IV] y [V]. Para solucionar esta dificultad nos valdremos del software Wolfram Mathematica a fin de dibujar las curvas representadas por las ecuaciones [IV] y [V]. De este modo, los puntos de intersección de dichas curvas serán los pares de valores w_1, w_2 que estamos buscando. Ejecutamos entonces el siguiente comando

```
Manipulate[ContourPlot[{(m1 + m2) L1 Sin[x] == 9.8 m2 Cos[x - y] Sin[y],
Cos[x - y] Sin[x] == Sin[y]}, {x, -pi, pi}, {y, -pi, pi}, ContourStyle -> {Red, Blue}],
{L1, 0.1, 1}, {m1, 0.05, 10}, {m2, 0.05, 10}]
```

Hemos considerado los posibles valores para la longitud l_1 del péndulo y las masas m_1 y m_2 :

l_1 : Entre 0.1 m. y 1 m.

m_1, m_2 : Entre 0.05 kg. y 10 kg.

Al ejecutarlo, aparecerá el siguiente gráfico:

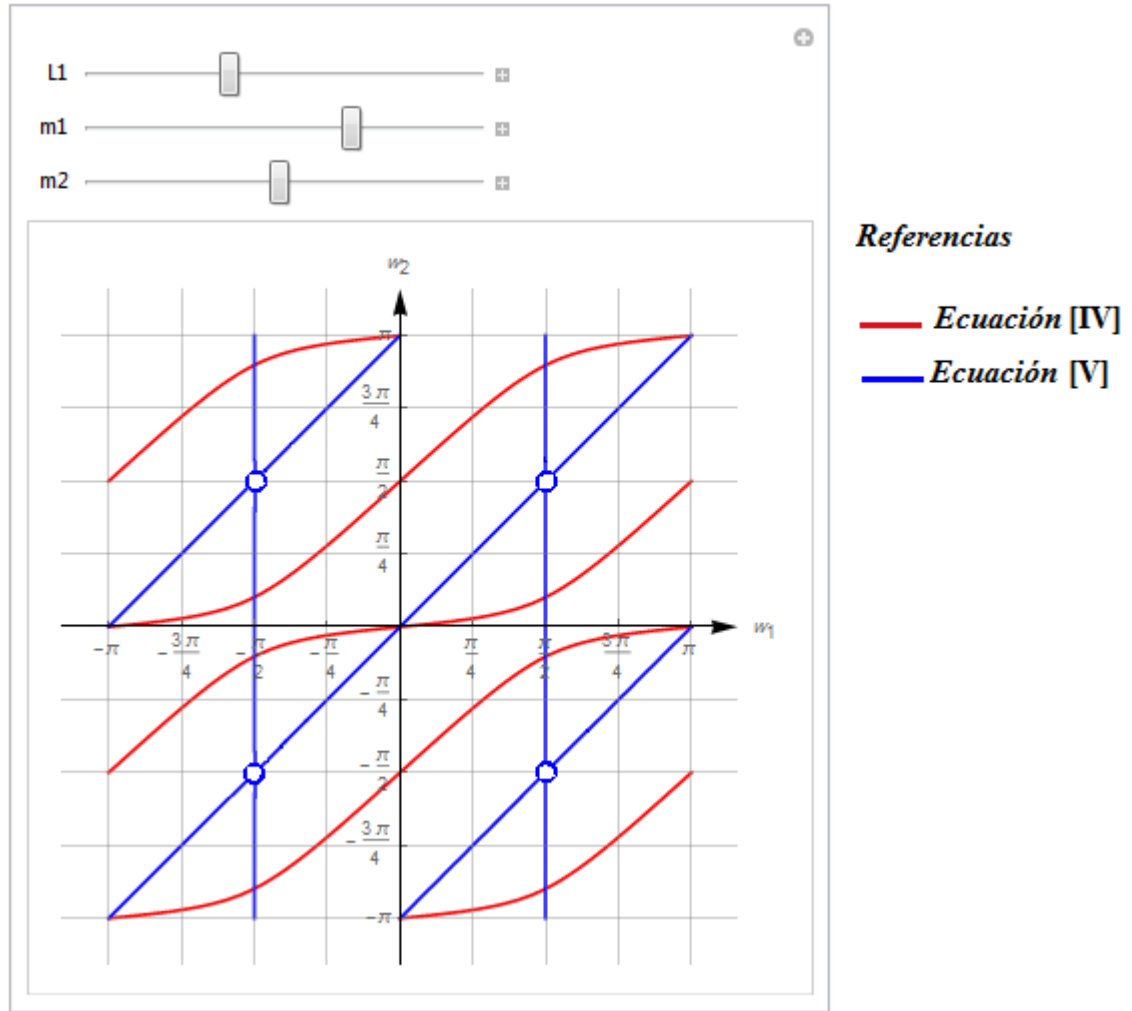


Figura 3.3: Representación gráfica de las ecuaciones [IV] y [V] para el caso en que $l_1=0.5$ m , $m_1=0.3$ kg y $m_2= 0.1$ kg.

Al observar el gráfico, comprobamos que los puntos críticos faltantes corresponden a $w_1 = \pm \frac{\pi}{2}$. Al mover los botones controladores de la Figura 3.3, podemos comprobar que estos valores hallados para w_1 se verifican para todos los rangos de l_1 , m_1 y m_2 . Por lo tanto

a) Si $w_1 = \frac{\pi}{2}$, al reemplazar en la ecuación [IV] resulta

$$-(m_1 + m_2)l_1 \sin(w_1) + g m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_2) = 0 \Rightarrow$$

$$-(m_1 + m_2)l_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + g m_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - w_2\right) \sin(w_2) = 0 \Rightarrow$$

$$-(m_1 + m_2)l_1 + g m_2 \sin^2(w_2) = 0 \Rightarrow \sin^2(w_2) = \frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}$$

Esta última ecuación es válida si $\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2} \leq 1$. En este caso, resulta

$$\text{sen}^2(w_2) = \frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2} \Rightarrow \text{sen}(w_2) = \pm \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}.$$

En consecuencia, si $\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2} \leq 1$, y teniendo en cuenta que

$0 \leq \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ y que $w_2 = \theta_2 \in (-\pi, \pi]$, los puntos críticos son:

$$P_5 = \left(\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0\right), P_6 = \left(\frac{\pi}{2}, -\arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0\right)$$

$$P_7 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0\right), P_8 = \left(\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right) - \pi, 0, 0\right)$$

b) Si $w_1 = -\frac{\pi}{2}$, el procedimiento es similar al caso a) y, si $\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2} \leq 1$, resultan

los puntos críticos

$$P_9 = \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0\right), P_{10} = \left(-\frac{\pi}{2}, -\arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0\right)$$

$$P_{11} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0\right), P_{12} = \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right) - \pi, 0, 0\right)$$

El siguiente gráfico muestra que si $\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2} > 1$, los únicos puntos críticos son

P_1, P_2, P_3 y P_4 .

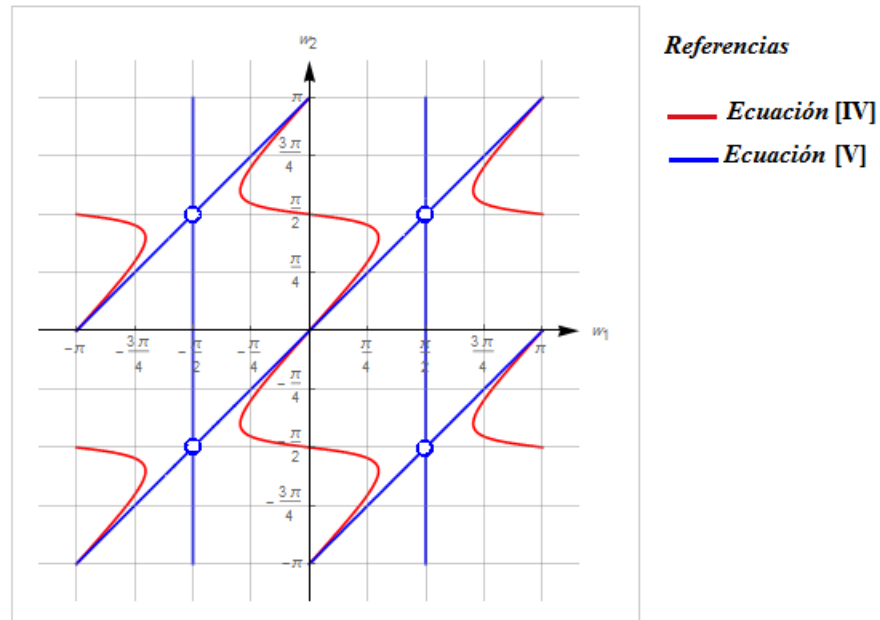


Figura 3.4: Representación gráfica de las ecuaciones [IV] y [V] para el caso en que $l_1 = 1$ m, $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 10$ kg.

Clasificación de los puntos críticos

Aplicaremos el Teorema 1.49. Primeramente calcularemos la matriz Jacobiana $Df(w_1, w_2, w_3, w_4)$. Es decir,

$$Df(w_1, w_2, w_3, w_4) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1}{\partial w_2} & \frac{\partial f_1}{\partial w_3} & \frac{\partial f_1}{\partial w_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2}{\partial w_2} & \frac{\partial f_2}{\partial w_3} & \frac{\partial f_2}{\partial w_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_1} & \frac{\partial f_3}{\partial w_2} & \frac{\partial f_3}{\partial w_3} & \frac{\partial f_3}{\partial w_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial w_1} & \frac{\partial f_4}{\partial w_2} & \frac{\partial f_4}{\partial w_3} & \frac{\partial f_4}{\partial w_4} \end{pmatrix}$$

Donde

$$f_1 = w_3, \quad f_2 = w_4$$

$$f_3 = \frac{-(m_1 + m_2)l_1 \sin(w_1) + g m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_2) - w_4^2 l_2 m_2 \sin(w_1 - w_2) - w_3^2 l_1 m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1 - w_2)}{l_1(m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(w_1 - w_2))}$$

$$f_4 = \frac{g(m_1 + m_2) \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1) - g(m_1 + m_2) \sin(w_2) + w_3^2 l_1(m_1 + m_2) \sin(w_1 - w_2) + w_4^2 l_2 m_2 \cos(w_1 - w_2) \sin(w_1 - w_2)}{l_2(m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(w_1 - w_2))}$$

Al evaluar el Jacobiano en los puntos críticos obtenemos

$$Df(P_1) = Df(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-(m_1 + m_2)}{m_1} & \frac{g m_2}{l_1 m_1} & 0 & 1 \\ \frac{(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & -\frac{(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Df(P_2) = Df(0, \pi, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-(m_1 + m_2)}{m_1} & \frac{g m_2}{l_1 m_1} & 0 & 1 \\ \frac{-(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & \frac{(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Df(P_3) = Df(\pi, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} & \frac{-g m_2}{l_1 m_1} & 0 & 1 \\ \frac{(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & -\frac{(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Df(P_4) = Df(\pi, \pi, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} & \frac{-g m_2}{l_1 m_1} & 0 & 1 \\ \frac{-(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & \frac{(m_1 + m_2)g}{l_2 m_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No mostraremos las matrices Jacobianas $Df(P_i)$, $i = 5, \dots, 12$ ya que sus coeficientes tienen una expresión algebraica muy extensa. Para aplicar el Teorema 1.49 especificaremos los valores de l_1, l_2 , m_1 y m_2 , ya que no es posible elaborar una conclusión general. En el siguiente cuadro mostramos la clasificación de los puntos críticos, para el caso en que $l_1 = l_2 = 0.23m$. y $m_1 = m_2 = 0.4kg$.

Punto crítico P_i	Autovalores de $Df(P_i)$	Conclusión sobre P_i
$P_1 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 10.2i$ $\lambda_2 = -10.2i$ $\lambda_3 = 8.12i$ $\lambda_4 = -8.12i$	<i>El Teorema no decide</i>
$P_2 = (0, \pi, 0, 0)$	$\lambda_1 = -7.08 + 2.9i$ $\lambda_2 = -7.08 - 2.9i$ $\lambda_3 = 7.08 + 2.9i$ $\lambda_4 = 7.08 - 2.9i$	<i>Inestable</i>
$P_3 = (\pi, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -2.9 + 7.08i$ $\lambda_2 = -2.9 - 7.08i$ $\lambda_3 = 2.9 + 7.08i$ $\lambda_4 = 2.9 - 7.08i$	<i>Inestable</i>
$P_4 = (\pi, \pi, 0, 0)$	$\lambda_1 = -10.8$ $\lambda_2 = 10.8$ $\lambda_3 = 5.4i$ $\lambda_4 = -5.4i$	<i>Inestable</i>
$P_5 = \left(\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = -2.9 + 3.3i$ $\lambda_2 = -2.9 - 3.3i$ $\lambda_3 = 2.9 + 3.3i$ $\lambda_4 = 2.9 - 3.3i$	<i>Inestable</i>

Punto crítico P_i	Autovalores de $Df(P_i)$	Conclusión sobre P_i
$P_6 = \left(\frac{\pi}{2}, -\arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = 4.7$ $\lambda_2 = -4.7$ $\lambda_3 = 4.2i$ $\lambda_4 = -4.2i$	Inestable
$P_7 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = -3.32 + 2.9i$ $\lambda_2 = -3.32 - 2.9i$ $\lambda_3 = 3.32 + 2.9i$ $\lambda_4 = 3.32 - 2.9i$	Inestable
$P_8 = \left(\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)l_1}{g m_2}}\right) - \pi, 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = 4.7i$ $\lambda_2 = -4.7i$ $\lambda_3 = -4.2$ $\lambda_4 = 4.2$	Inestable
$P_9 = \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = 4.7$ $\lambda_2 = -4.7$ $\lambda_3 = 4.2i$ $\lambda_4 = -4.2i$	Inestable
$P_{10} = \left(-\frac{\pi}{2}, -\arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = -2.9 + 3.3i$ $\lambda_2 = -2.9 - 3.3i$ $\lambda_3 = 2.9 + 3.3i$ $\lambda_4 = 2.9 - 3.3i$	Inestable
$P_{11} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)l_1}{g m_2}}\right), 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = 4.7$ $\lambda_2 = -4.7$ $\lambda_3 = 4.2i$ $\lambda_4 = -4.2i$	Inestable
$P_{12} = \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsen\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)l_1}{g m_2}}\right) - \pi, 0, 0 \right)$	$\lambda_1 = -3.3 + 2.9i$ $\lambda_2 = -3.3 - 2.9i$ $\lambda_3 = 3.3 + 2.9i$ $\lambda_4 = 3.3 - 2.9i$	Inestable

Desde el punto de vista de la Física, era de esperar que todos los puntos críticos, salvo $P_1 = (0, 0, 0, 0)$, sean inestables. Ello se debe a que si las masas m_1 y m_2 toman posiciones y velocidades iniciales próximas a dichos puntos críticos, la fuerza de gravedad los alejará de dichas posiciones, ya que tratará de atraerlas hacia abajo.

Solución

Probaremos que la función $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ verifica las hipótesis del Teorema 3.3:

1) $V(0, 0) = 0$ y $V(x, y) = x^2 + 2y^2 > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$

2) Si $(x, y) \neq (0, 0)$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x, y) &= 2x \dot{x} + 4y \dot{y} = 2x(\alpha x - 2y - x(x^2 + y^2)) + 4y(x + \alpha y - y(x^2 + y^2)) = \\ &= 2x^2\alpha - 2x^4 - 2x^2y^2 + 4\alpha y^2 - 4x^2y^2 - 4y^4 = 2x^2(\alpha - x^2 - y^2) + 4y^2(\alpha - x^2 - y^2) = \\ &= (2x^2 + 4y^2)(\alpha - x^2 - y^2) \leq 0 \text{ pues } \alpha \leq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

El siguiente Teorema prueba que, para el caso del péndulo doble sin rozamiento, el $(0, 0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

Teorema 3.6

El punto $P_1 = (0, 0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio estable del sistema $[I']$.

Demostración

Aplicaremos el Teorema 3.3. Veamos cómo nos conviene definir la función de Liapunov

$$V(w_1, w_2, w_3, w_4) = V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$$

En la demostración del Teorema 3.1, calculamos la Energía Cinética y la Energía potencial del sistema, obteniendo:

Energía Cinética:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2]$$

Energía Potencial:

$$P = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cos(\theta_2)$$

Por lo tanto, la Energía Mecánica es

$$\begin{aligned}E(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= T + P = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2] \\ &\quad - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cos(\theta_2)\end{aligned}$$

Luego

$$E(0, 0, 0, 0) = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 - m_2 \cdot g \cdot l_2$$

Esto nos sugiere definir la función de Liapunov V del siguiente modo:

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = E(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 + m_2 \cdot g \cdot l_2$$

Es decir,

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2] + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 (1 - \cos(\theta_1)) + m_2 \cdot g \cdot l_2 (1 - \cos(\theta_2))$$

Probemos que esta función verifica las hipótesis del Teorema 3.3:

Sea U el entorno de $(0, 0, 0, 0)$ definido por

$$U = \left\{ (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \text{ tal que } |(\theta_1 - \theta_2)| < \frac{\pi}{2} \wedge \theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi) \right\}$$

En este caso, $\cos(\theta_1 - \theta_2) > 0$ si $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \in U$

Entonces

$$1) V(0, 0, 0, 0) = 0$$

$$2) V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \geq 0 \text{ en } U \text{ pues}$$

$$\text{Probemos primero que } l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \geq 0.$$

Para ello consideramos dos casos:

$$a) \text{ Si } \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \geq 0, \text{ obviamente } l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \geq 0.$$

$$b) \text{ Si } \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 < 0 \text{ entonces}$$

$$\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 < 0 \Rightarrow -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 > 0 \Rightarrow -2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 > 0 \Rightarrow -2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \geq -2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Por lo tanto, como

$$(l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2 \geq 0 \Rightarrow l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \geq -2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \geq -2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Luego

$$l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \geq -2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

En consecuencia

$$l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \geq 0$$

De aquí resulta que

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2]}_{\geq 0} +$$

$$\underbrace{(m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 (1 - \cos(\theta_1))}_{\geq 0} + \underbrace{m_2 \cdot g \cdot l_2 (1 - \cos(\theta_2))}_{\geq 0} \geq 0$$

3) $V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) > 0$ en $U - \{(0, 0, 0, 0)\}$ pues

Si $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \in U - \{(0, 0, 0, 0)\} \Rightarrow (\theta_1 \neq 0 \vee \theta_2 \neq 0 \vee \dot{\theta}_1 \neq 0 \vee \dot{\theta}_2 \neq 0)$

Consideramos los siguientes casos:

a) Si $\theta_1 \neq 0$ entonces, como $\theta_1 \in (-\pi, \pi) \Rightarrow \cos(\theta_1) < 1 \Rightarrow 1 - \cos(\theta_1) > 0$. Luego

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \geq (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 (1 - \cos(\theta_1)) > 0$$

b) Si $\theta_2 \neq 0$ entonces se verifica que $1 - \cos(\theta_2) > 0$. Por lo tanto

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \geq m_2 \cdot g \cdot l_2 (1 - \cos(\theta_2)) > 0$$

c) Si $\dot{\theta}_1 \neq 0$ entonces

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \geq \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 > 0$$

d) Si $\dot{\theta}_2 \neq 0$ entonces

d1) Si $\dot{\theta}_1 \neq 0$, se probó en el inciso c) que

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) > 0$$

d2) Si $\dot{\theta}_1 = 0$ entonces

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \geq \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right] = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 > 0$$

3) $\frac{d}{dt} V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \leq 0$ si $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \in U$ pues

$$V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = E(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 + m_2 \cdot g \cdot l_2$$

Donde $E(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ es la Energía Mecánica del sistema formado por el péndulo doble. Todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, pues no se considera la fuerza de rozamiento del aire. En consecuencia, la Energía Mecánica se conserva. Es decir,

$$E(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = C = \text{constante}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \frac{d}{dt} (E(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 + m_2 \cdot g \cdot l_2) = \\ &= \frac{d}{dt} (C + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot l_1 + m_2 \cdot g \cdot l_2) = 0 \end{aligned}$$

Luego, $V(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ es una función de Liapunov, y esto implica que $(0, 0, 0, 0)$ es un punto crítico estable. ■

Experimentando el comportamiento caótico

Como mencionamos al inicio de este Capítulo, el péndulo doble es un ejemplo de sistema físico que puede exhibir un comportamiento caótico. Es decir, que pequeños cambios en las condiciones iniciales del sistema puede provocar grandes cambios en la solución. No nos detendremos a analizar matemáticamente este fenómeno, ya que escapa al objetivo de esta tesis. Simplemente, para obtener una noción del caos de este modelo, aplicaremos el software Wolfram Mathematica para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales resultante del Teorema 3.1, con los siguientes datos:

$$l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m. y } m_1 = m_2 = 0.2 \text{ kg.}$$

Hallaremos dos soluciones numéricas del sistema con las siguientes condiciones iniciales, muy próximas entre sí:

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{3}{4}\pi \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{3}{4}\pi + 0.05 \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

Ejecutamos entonces los siguientes comandos:

```
m1=0.2; m2 = 0.2; L1 = 0.5; L2 = 0.5;
Solu1 = NDSolve[{{(m1 + m2)L1 Tita1''[t] + m2 L2 Tita2''[t] Cos[Tita1[t] - Tita2[t]] +
m2 L2 (Tita2'[t])^2 Sin[Tita1[t] - Tita2[t]] + (m1 + m2)9.8 Sin[Tita1[t]] == 0,
m2 L2 Tita2''[t] + m2 L1 Tita1''[t] Cos[Tita1[t] - Tita2[t]] -
m2 L1 (Tita1''[t])^2 Sin[Tita1[t] - Tita2[t]] + m2 9.8 Sin[Tita1[t]] == 0,
Tita1[0] == 0.79, Tita2[0] == 0.79, Tita1'[0] == 0, Tita2'[0] == 0},
{Tita1, Tita2}, {t, 0, 150}];

Solu2 = NDSolve[{{(m1 + m2)L1 TTita1''[t] + m2 L2 TTita2''[t] Cos[TTita1[t] - TTita2[t]] +
m2 L2 (TTita2'[t])^2 Sin[TTita1[t] - TTita2[t]] + (m1 + m2)9.8 Sin[TTita1[t]] == 0,
m2 L2 TTita2''[t] + m2 L1 TTita1''[t] Cos[TTita1[t] - TTita2[t]] -
m2 L1 (TTita1''[t])^2 Sin[TTita1[t] - TTita2[t]] + m2 9.8 Sin[TTita1[t]] == 0,
TTita1[0] == 0.79, TTita2[0] == 0.79, TTita1'[0] == 0, TTita2'[0] == 0},
{TTita1, TTita2}, {t, 0, 150}];
```

Al representar gráficamente la función $\theta_2(t)$ para las condiciones iniciales $\theta_2(0) = \frac{3}{4}\pi$ y $\theta_2(0) = \frac{3}{4}\pi + 0.05$, podemos comprobar que las gráficas no se mantienen cercanas entre sí a lo largo del tiempo, a pesar de estarlo las condiciones iniciales.

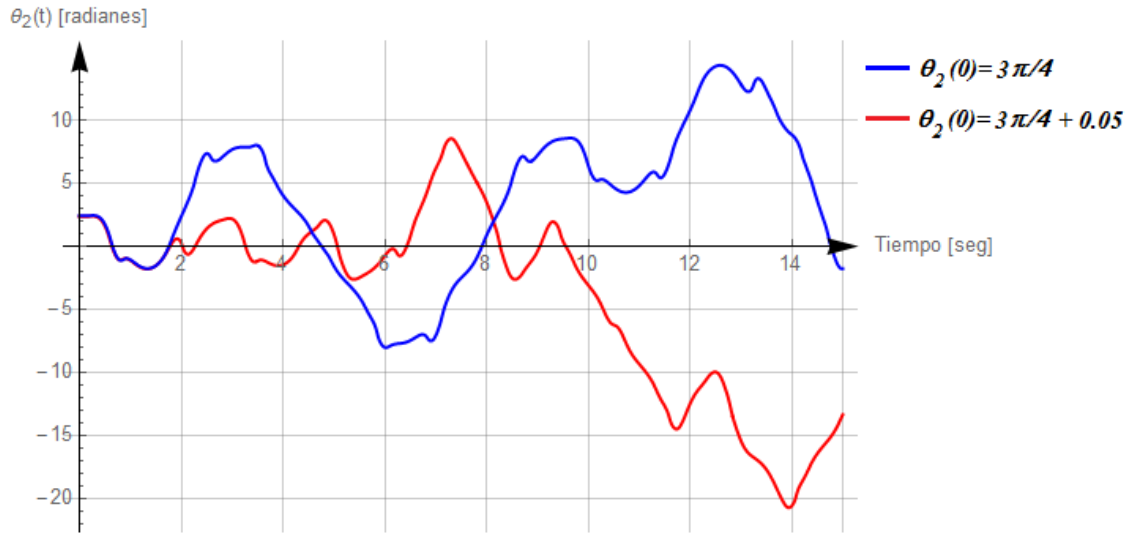


Figura 3.5: Gráficas de la función $\theta_2(t)$, para dos condiciones iniciales muy próximas entre sí.

El comportamiento caótico del sistema se ve reflejado también en la trayectoria que describe la masa m_2 , como se muestra en la siguiente figura:

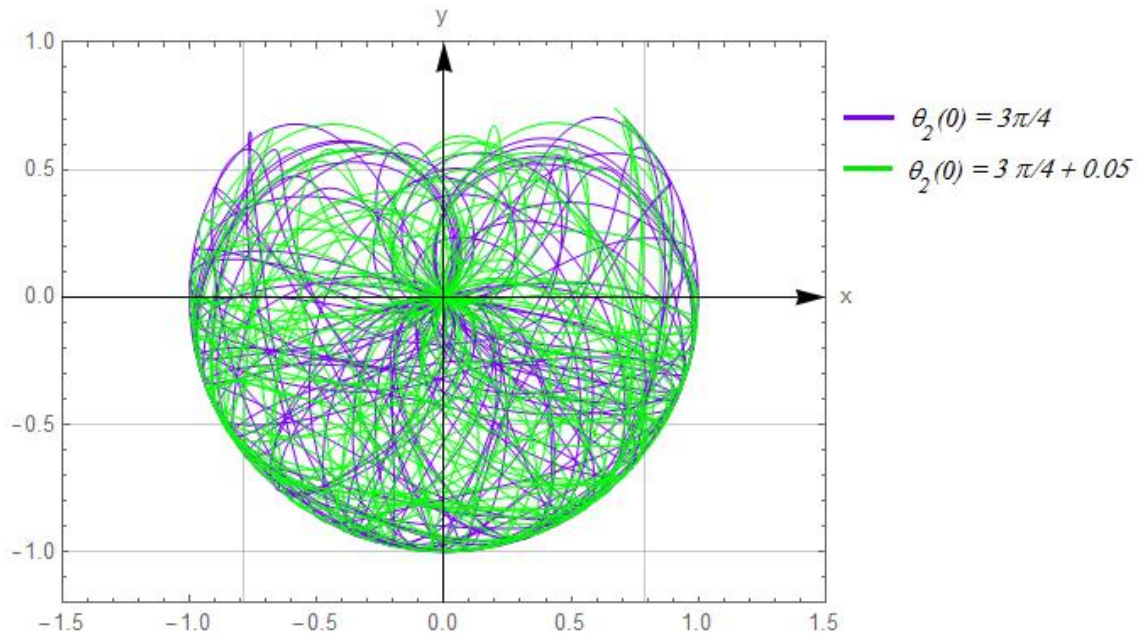


Figura 3.6: Trayectoria que sigue la masa m_2 , para dos condiciones iniciales muy próximas.

Recordemos que la trayectoria que sigue la masa m_2 es la curva C definida por

$$C = \left\{ \left(l_1 \sin(\theta_1(t)) + l_2 \sin(\theta_2(t)), -l_1 \cos(\theta_1(t)) - l_2 \cos(\theta_2(t)) \right) \text{ con } t \geq 0 \right\}$$

En la Figura 3.6 podemos comprobar que las trayectorias están acotadas, no son periódicas y presentan una dependencia sensible a las condiciones iniciales. Este tipo de trayectorias reciben el nombre de *órbitas caóticas*. Suelen estar contenidas en un conjunto acotado llamado *atractor*.

Simulación del movimiento del péndulo doble sin rozamiento

En la siguiente simulación, diseñada mediante el software Wolfram Mathematica 11.0, permite visualizar el movimiento del péndulo doble. Más precisamente, podemos observar la trayectoria, en algunos casos caótica, que describe la masa m_2 del péndulo durante los primeros 30 segundos. La simulación contiene los siguientes datos de entrada:

Longitudes de las varillas del péndulo (L_1 y L_2), Masas del péndulo (m_1 y m_2), Ángulos iniciales de desplazamiento ($\theta_1(0)$ y $\theta_2(0)$) y las velocidades tangenciales iniciales de las masas m_1 y m_2 (v_{10} y v_{20}). Las velocidades iniciales tangenciales se las definen como

$$v_{10} = \pm \left| \vec{v}_1(0) \right| = \pm L \left| \theta_1'(0) \right|$$
$$v_{20} = \pm \left| \vec{v}_2(0) \right| = \pm L \left| \theta_2'(0) \right|$$

Se considera que $v_{10} > 0$ si $\vec{v}_1(0)$ apunta en sentido anti horario, mientras que $v_{10} < 0$ si $\vec{v}_1(0)$ apunta en el sentido de las agujas del reloj.

El mismo criterio vale para el signo de v_{20} . Los datos de entrada se ingresan a través del siguiente cuadro de diálogo:

Longitud del hilo L_1 del péndulo:	
L_1 [metros]=	1
Longitud del hilo L_2 del péndulo:	
L_2 [metros]=	1
Masa m_1 del péndulo:	
m_1 [kg.]=	0.2
Masa m_2 del péndulo:	
m_2 [kg.]=	0.2
Ángulo inicial de desplazamiento de la masa m_1:	
$\theta_1(0)$ [radianes]=	3π/4
Ángulo inicial de desplazamiento de la masa m_2:	
$\theta_2(0)$ [radianes]=	π/4
Velocidad inicial de la masa m_1:	
v_{10} [m/seg.]=	0
Velocidad inicial de la masa m_2:	
v_{20} [m/seg.]=	0

Figura 3.7: Cuadro de diálogo que permite ingresar los datos de entrada.

Si ingresamos los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= L_2 = 1 \text{ m.} \\
 m_1 &= m_2 = 0.2 \text{ kg.} \\
 \theta_1(0) &= \frac{3}{4} \pi \text{ rad.} \\
 \theta_2(0) &= \frac{\pi}{4} \text{ rad.} \\
 v_{10} &= v_{20} = 0 \frac{\text{m}}{\text{seg}}
 \end{aligned}$$

Podemos visualizar la trayectoria de la masa m_2 al ejecutar la simulación, como se ilustra en la siguiente Figura.

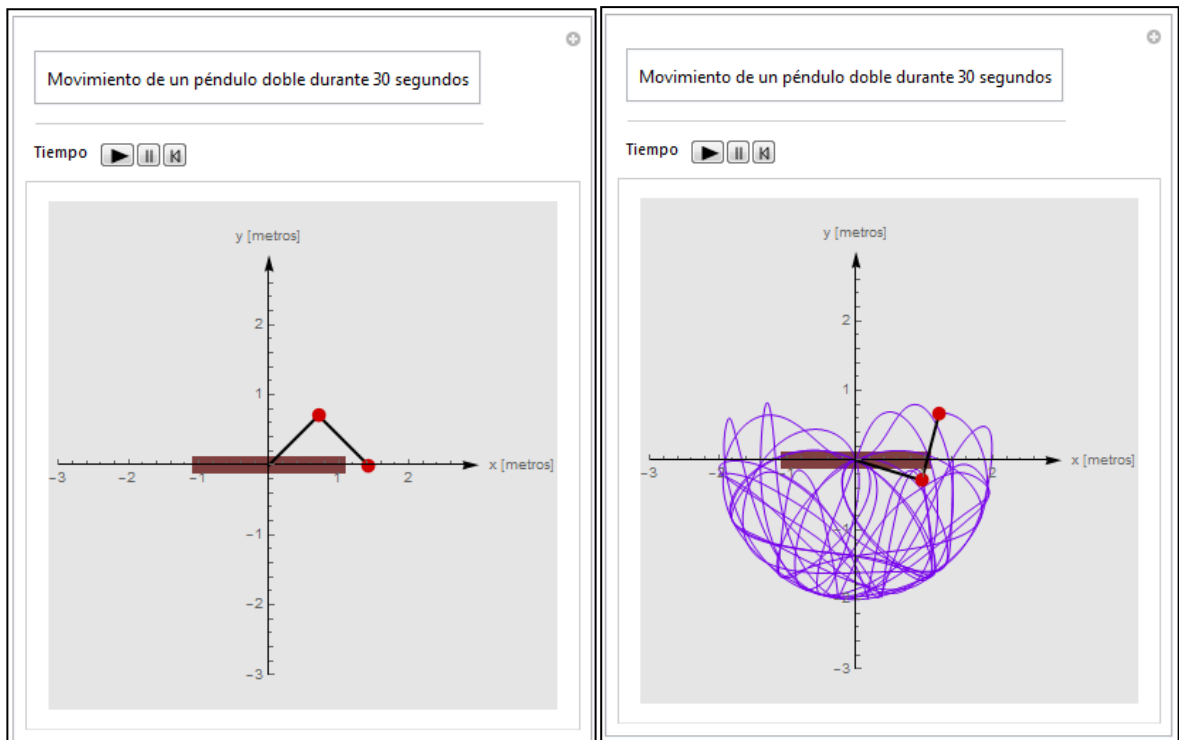


Figura 3.8: Izquierda: Posición inicial del péndulo. Derecha: Trayectoria descrita por la masa m_2 .

Las gráficas de los ángulos de desplazamiento se muestran en la siguiente Figura.

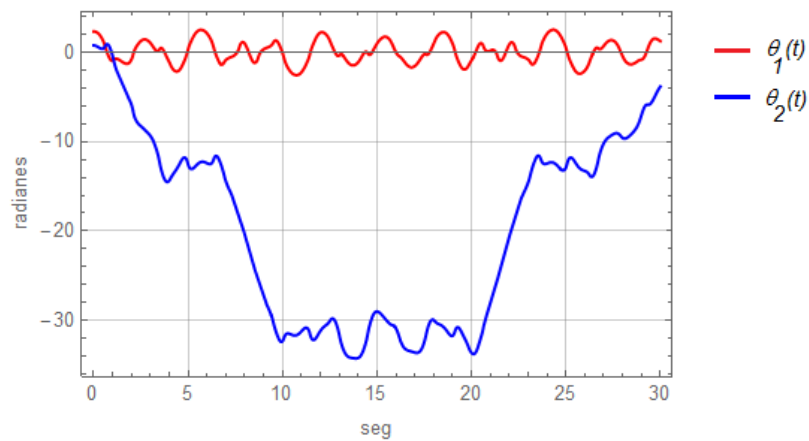


Figura 3.9: Gráficas de los ángulos de desplazamiento de las masas m_1 y m_2

Si ahora ingresamos los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
L_1 &= L_2 = 1 \text{ m.} \\
m_1 &= m_2 = 0.2 \text{ kg.} \\
\theta_1(0) &= \frac{\pi}{4} \text{ rad.} \\
\theta_2(0) &= \frac{\pi}{6} \text{ rad.} \\
v_{10} &= v_{20} = 0 \frac{\text{m}}{\text{seg}}
\end{aligned}$$

Entonces podemos comprobar que la trayectoria de la masa m_2 no es caótica como en el caso anterior, sino que se asemeja a la de un péndulo simple. Ello se debe a que el punto $(\theta_1(0), \theta_2(0), v_{10}, v_{20})$ se encuentra próximo al $(0, 0, 0, 0)$ que, de acuerdo al Teorema 3.6, es un punto de equilibrio estable.

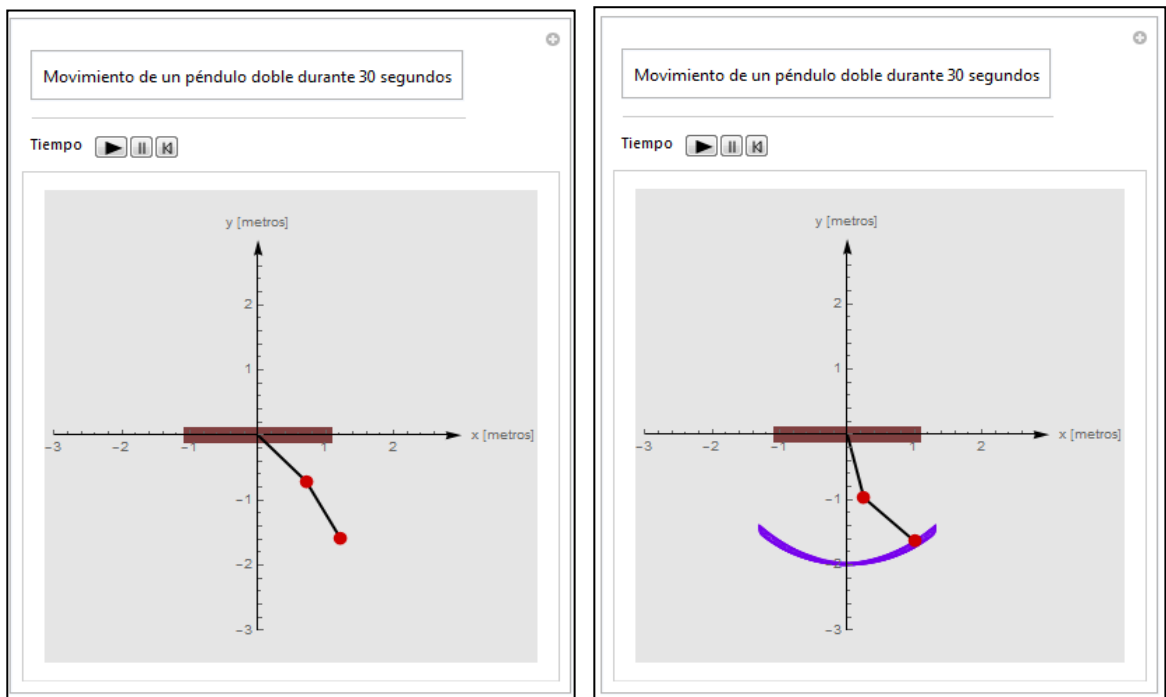


Figura 3.10: Izquierda: Posición inicial del péndulo. Derecha: Trayectoria descrita por la masa m_2 .

Los ángulos de desplazamiento se muestran en la siguiente Figura.

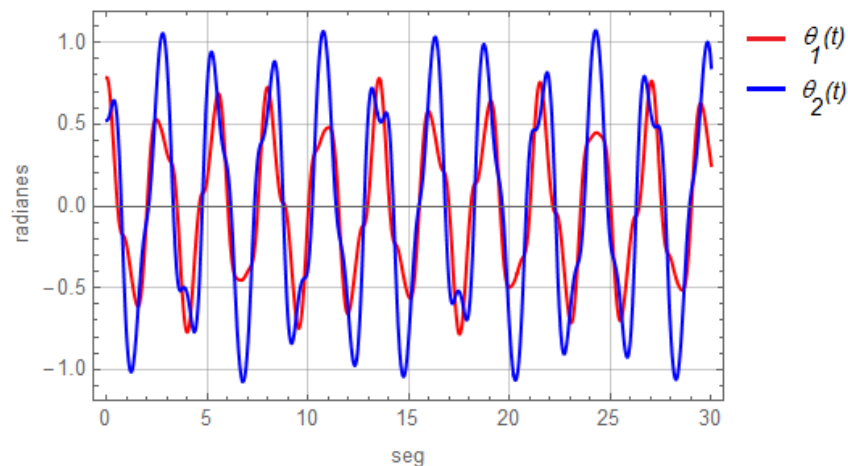


Figura 3.11: Gráficas de los ángulos de desplazamiento de las masas m_1 y m_2

El código fuente del programa lo mostramos a continuación.

Código fuente del programa que simula el movimiento de un péndulo doble

```

Interpretation[{L1=2 , L2=2 ,m1=0.2 ,m2=0.2 ,Tita10=3Pi/4,Tita20=Pi/4 ,v10=0 ,
v20=0},
Panel[ Grid[ {
{InputField[Dynamic[L1]]},
{InputField[Dynamic[L2]] },
{InputField[Dynamic[m1]]},
{InputField[Dynamic[m2]]},
{InputField[Dynamic[Tita10]]} ,
{InputField[Dynamic[Tita20]]} ,
{InputField[Dynamic[v10]]} ,
{InputField[Dynamic[v20]]} } ] ],
Manipulate [
Solud=NDSolve[{(m1+m2) L1 Tita1'[tt] + m2 L2 Tita2'[tt] Cos [Tita1[tt]-
Tita2[tt]]+m2 L2 ( Tita2'[tt])2 Sin [Tita1[tt]-Tita2[tt]]+ (m1+m2) 9.8
Sin[Tita1[tt]]==0,m2 L2 Tita2'[tt] +m2 L1 Tita1'[tt]Cos [Tita1[tt]-Tita2[tt]]-m2 L1
( Tita1'[tt])2 Sin [Tita1[tt]-Tita2[tt]] + m2 9.8 Sin[Tita2[tt]]==0,
Tita1[0] == Tita10,Tita2[0] == Tita20, Tita1'[0] ==v10/L1 ,Tita2'[0] == v20/L2}
,{Tita1,Tita2},{tt,0,60}];
Show[Graphics[{RGBColor[0.501961, 0.25098, 0.25098],Rectangle[{-1.1,-
0.12},{1.1,0.12}]}] ,
ParametricPlot[{L1 Sin[Extract[Tita1[s]/.Solud,1]]+ L2
Sin[Extract[Tita2[s]/.Solud,1]],-L1 Cos[Extract[Tita1[s]/.Solud,1]]-L2
Cos[Extract[Tita2[s]/.Solud,1]]},{s,0,t},PlotStyle->{RGBColor[0.462745, 0,
0.92549],Thickness[0.003]}],
Graphics[{Thickness[0.007],Line[{0,0},{L1 Sin[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]],-L1
Cos[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]]}]}],
Graphics[{Thickness[0.007] , Line[{L1 Sin[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]],-L1
Cos[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]],{L1 Sin[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]]+ L2
Sin[Extract[Tita2[t]/.Solud,1]],-L1 Cos[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]]-L2
Cos[Extract[Tita2[t]/.Solud,1]]}]}],Graphics[{RGBColor[0.807843, 0, 0],Disk[{L1
Sin[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]],-L1 Cos[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]],0.1 L1}],
Graphics[{RGBColor[0.807843, 0, 0],Disk[{L1 Sin[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]]+ L2
Sin[Extract[Tita2[t]/.Solud,1]],-L1 Cos[Extract[Tita1[t]/.Solud,1]] -L2
Cos[Extract[Tita2[t]/.Solud,1]],0.1 L2}],
Axes->True, AxesStyle->Arrowheads[0.04], AxesLabel->{"x [metros]","y
[metros]"},Background->GrayLevel[0.898039],ImageSize->{350,350},
PlotRange->{{-L1-L2-1,L1+L2+1},{-L1-L2-1,L1+L2+1}},
Panel["Movimiento de un péndulo doble durante 30 segundos"],
Delimiter,{t,10-6,"Tiempo",10-6,30,ControlType->Trigger } ] ]

```

¿Y si los ángulos de desplazamiento son pequeños?

En el Teorema 3.1 demostramos que los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 de las masas m_1 y m_2 del péndulo doble verifican el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de segundo orden

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad [I]$$

Como sabemos, este sistema sólo tiene solución numérica. Pero si los ángulos de desplazamiento fueran pequeños, ¿podríamos linealizar el sistema, a fin de hallar una solución analítica? Para responder a esta pregunta veremos primeramente cómo aproximar las funciones $\cos(\theta_1 - \theta_2)$, $\sin(\theta_1 - \theta_2)$, $\sin(\theta_1)$ y $\sin(\theta_2)$.

Para ello haremos uso de la Fórmula de Taylor de Primer Orden (Teorema 1.46) cuando θ_1 y θ_2 están próximos a 0. En este caso, si

$$f(x, y) = \cos(x - y)$$

Entonces, al aplicar la Fórmula de Taylor de Primer Orden centrada en $x^* = (0, 0)$ obtenemos

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) + R(x, y, x^*)$$

Donde

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R(x, y, x^*)}{|(x, y)|} = 0$$

En particular, si (x, y) está próximo a $(0, 0)$, podemos escribir

$$f(x, y) \cong f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)$$

Es decir,

$$\cos(x - y) \cong 1$$

Sustituyendo x e y por θ_1 y θ_2 resulta

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \cong 1 \quad [II]$$

De aquí obtenemos que

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \cong \sqrt{1 - (1)^2} = 0$$

Luego

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) \cong 0 \quad [III]$$

De manera similar, si consideramos

$$g(x) = \sin(x)$$

Al aplicar la Fórmula de Taylor de Primer Orden centrada en $x^* = 0$, tenemos que

$$g(x) = g(0) + g'(0)(x - 0) + R(x, x^*)$$

Donde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x, x^*)}{|x|} = 0$$

Nuevamente, si x está próximo a 0 entonces podemos considerar que

$$g(x) \cong g(0) + g'(0)(x - 0)$$

Es decir

$$\text{sen}(x) \cong x$$

Reemplazando x por θ_1 y θ_2 resulta

$$\begin{cases} \text{sen}(\theta_1) \cong \theta_1 \\ \text{sen}(\theta_2) \cong \theta_2 \end{cases} \quad [\text{IV}]$$

Las expresiones [II], [III] y [IV] permiten reemplazar el sistema [I] por el siguiente sistema linealizado

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 g\theta_2 = 0 \end{cases} \quad [\text{V}]$$

En el próximo Ejemplo compararemos las soluciones de los sistemas [I] y [V] cuando los ángulos iniciales de desplazamiento son pequeños.

Ejemplo 3.7

Se tiene un péndulo doble con los siguientes datos

$$L_1 = L_2 = 1 \text{ m.}$$

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg.}$$

$$\theta_1(0) = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\theta_2(0) = \frac{\pi}{8} \text{ rad.}$$

$$v_{10} = v_{20} = 0 \quad \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

1) Resolver el sistema linealizado

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Para hallar los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 .

2) Comparar las gráficas de los ángulos θ_1 y θ_2 obtenidos del sistema linealizado, con los de la solución numérica del sistema sin linealizar

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Solución

1) Para resolver el sistema linealizado, aplicamos el Método de Eliminación descrito en la sección 1.5.2 del Capítulo 1, pág. 24. De este modo, la solución obtenida es

$$\begin{cases} \theta_1(t) = 0.4 \cos(2.39t) + 0.3 \cos(5.78t) \\ \theta_2(t) = 0.56 \cos(2.39t) - 0.3 \cos(5.78t) \end{cases}$$

2) En las siguientes Figuras se muestran las gráficas de los ángulos de desplazamiento que se obtuvieron al resolver el sistema linealizado y sin linealizar.

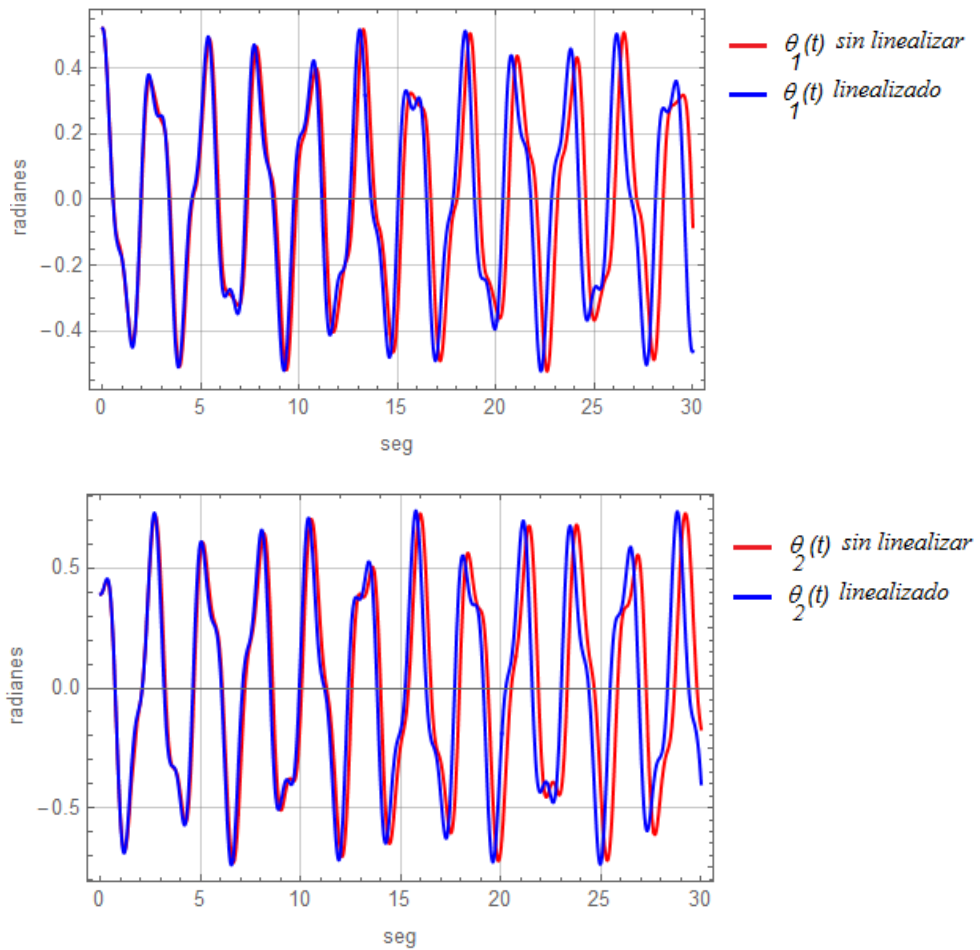


Figura 3.12: Gráficas de los ángulos de desplazamiento de las masas m_1 y m_2 , obtenidas al resolver el sistema linealizado y sin linealizar.

Observamos que las gráficas son muy similares. De aquí podemos deducir que, cuando los ángulos iniciales de desplazamiento son pequeños, el sistema linealizado resulta ser una buena aproximación del sistema sin linealizar.

Movimiento del péndulo doble considerando el rozamiento del aire

En esta sección analizaremos cómo queda planteado el sistema de ecuaciones diferenciales que permitirá hallar los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 de las masas m_1 y m_2 , cuando el péndulo doble está sometido a la acción del rozamiento del aire. En este caso, de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 1, sobre las masas m_1 y m_2 actúa la fuerza de rozamiento del aire, cuya expresión es la siguiente:

$$\vec{F}_i = -k_i \cdot \vec{v}_i(t) \quad , \quad i=1, 2$$

Donde

$\vec{v}_i(t)$: Velocidad de la masa m_i en el instante t .

k_i : Constante de rozamiento para la masa m_i .

Estas fuerzas son no conservativas. En consecuencia, para hallar θ_1 y θ_2 aplicaremos el Teorema 2.15, es decir, las *Ecuaciones de Euler-Lagrange para fuerzas no conservativas*. En el siguiente Teorema deduciremos el sistema de ecuaciones que permitirá determinar los ángulos de desplazamiento de las masas del péndulo.

Teorema 3.8: Ecuación de movimiento de un péndulo doble con rozamiento

Sea un péndulo doble de masas m_1 y m_2 , suspendidas de dos varillas de longitudes l_1 y l_2 respectivamente. Supongamos que sobre las masas del péndulo actúa la fuerza de rozamiento del aire, expresada mediante la fórmula

$$\vec{F}_i = -k_i \cdot \vec{v}_i(t) \quad , \quad i=1, 2$$

Donde

$\vec{v}_i(t)$: Velocidad de la masa m_i en el instante t .

k_i : Constante de rozamiento para la masa m_i .

Entonces los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 verifican el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de segundo orden

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = A \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = B \end{cases}$$

Con

$$A = -(k_1 + k_2) l_1 \dot{\theta}_1 - k_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$B = -k_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - k_2 l_2 \dot{\theta}_2$$

Demostración

Aplicamos el Teorema 2.15. De este modo, queda planteado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en las incógnitas $q_1, q_2, \dots, q_n$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad [\text{I}]$$

Donde

L Es el Lagrangiano.

$\vec{F}_i$: Suma de todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre la i -ésima partícula.

$\vec{r}_i$: Vector posición de la i -ésima partícula.

En nuestro caso, y de acuerdo a lo demostrado en el Teorema 3.1, tenemos que

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Además,

$$\begin{cases} N = 2 \\ n = 2 \\ q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases}$$

$$\vec{r}_1(t) = (l_1 \sin(\theta_1), -l_1 \cos(\theta_1))$$

$$\vec{r}_2(t) = (l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2))$$

$$\vec{v}_1(t) = \vec{r}_1'(t) = \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right)$$

$$\vec{v}_2(t) = \vec{r}_2'(t) = \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right)$$

$$\vec{F}_i = -k_i \cdot \vec{v}_i(t), \quad i = 1, 2$$

k_i : Constante de rozamiento para la masa m_i , $i = 1, 2$.

Entonces el sistema [I] queda expresado de la forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} \end{cases} \quad [\text{II}]$$

En la demostración del Teorema 3.1 se probó que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

Sólo resta calcular los miembros derechos de las ecuaciones [II].

Cálculo de $\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1}$

$$\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} = -k_1 \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right) \cdot (l_1 \cos(\theta_1), l_1 \sin(\theta_1))$$

$$-k_2 \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right) \cdot (l_1 \cos(\theta_1), l_1 \sin(\theta_1)) =$$

$$= -k_1 l_1^2 \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1 - k_1 l_1^2 \sin^2(\theta_1) \dot{\theta}_1 - k_2 l_1^2 \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1 - k_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$-k_2 l_1^2 \sin^2(\theta_1) \dot{\theta}_1 - k_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2$$

Aplicando la identidad Pitagórica

$$\sin^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_1) = 1$$

Y teniendo en cuenta que

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

Resulta finalmente que

$$\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} = -(k_1 + k_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 - k_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \quad [\text{III}]$$

Cálculo de $\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2}$

$$\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} = -k_1 \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right) \cdot 0$$

$$-k_2 \left(l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right) \cdot (l_2 \cos(\theta_2), l_2 \sin(\theta_2)) =$$

$$= -k_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 - k_2 l_2^2 \cos^2(\theta_2) \dot{\theta}_2 - k_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1$$

$$-k_2 l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_2 = -k_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - k_2 l_2^2 \dot{\theta}_2$$

Por lo tanto

$$\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} = -k_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - k_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \quad [\text{IV}]$$

Sustituyendo [III] y [IV] en [II] obtenemos

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = - (k_1 + k_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 - k_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \quad [V]$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = - k_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - k_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \quad [VI]$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación [V] por l_1 y la ecuación [VI] por l_2 , resulta finalmente el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = - (k_1 + k_2) l_1 \dot{\theta}_1 - k_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = - k_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - k_2 l_2 \dot{\theta}_2 \quad \blacksquare$$

Simulación del movimiento del péndulo doble con rozamiento

En la siguiente simulación, diseñada mediante el software Wolfram Mathematica 11.0, podemos visualizar el movimiento del péndulo doble. Supondremos que las masas m_1 y m_2 son esféricas, de radio r_1 y r_2 respectivamente. Su código fuente es similar al del péndulo doble sin rozamiento. La simulación contiene los siguientes datos de entrada:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 = 1 \text{ m.} \\ m_1 &= m_2 = 0.2 \text{ kg.} \\ \theta_1(0) &= \frac{3}{4} \pi \text{ rad.} \\ \theta_2(0) &= \frac{\pi}{4} \text{ rad.} \\ v_{10} &= v_{20} = 0 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \\ r_1 &= r_2 = 0.2 \text{ m.} \end{aligned}$$

Al ejecutar la simulación podemos comprobar, como era de esperar, que el péndulo se detiene. En la siguiente Figura mostramos la trayectoria que describe la masa m_2 (confrontar con la Figura 3.8).

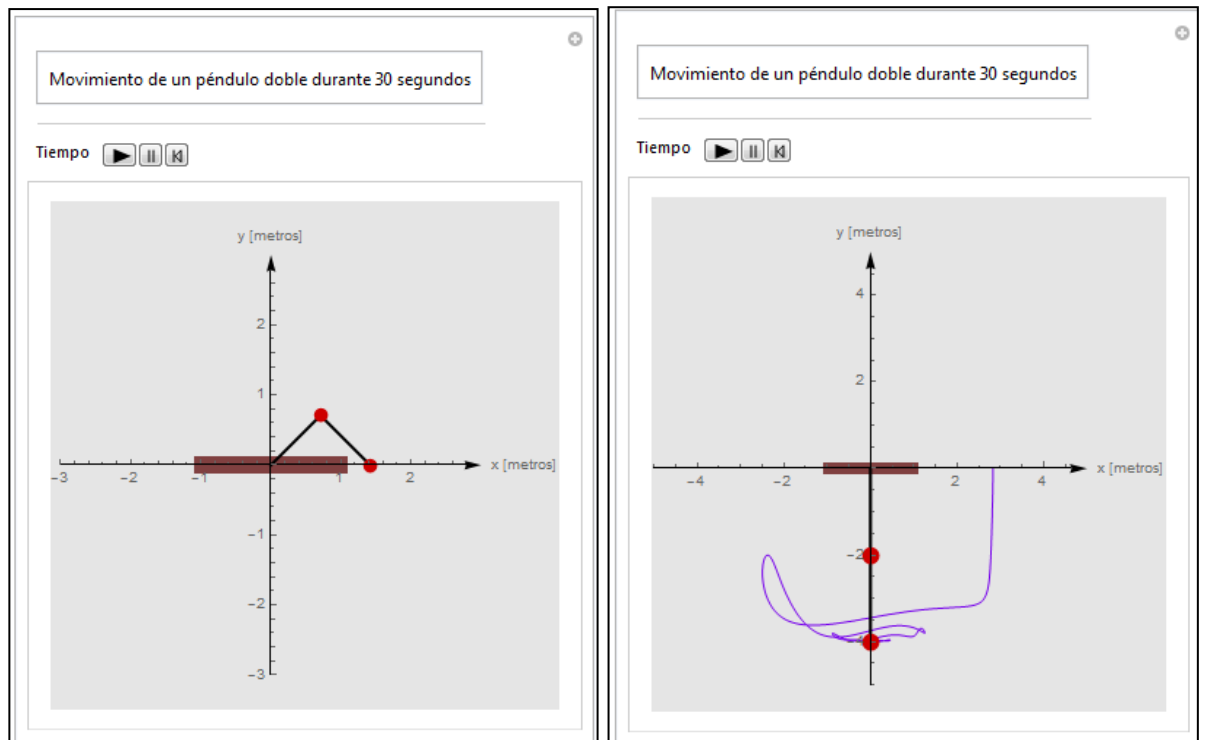


Figura 3.13: Izquierda: Posición inicial del péndulo. Derecha: Trayectoria descrita por la masa m_2 hasta detenerse.

Capítulo 4

Una prueba experimental

A fin de comprobar si el modelo matemático diseñado se corresponde con la realidad, construimos un péndulo doble de masas esféricas m_1 y m_2 , de radio r_1 y r_2 , y alambres de longitud L_1 y L_2 con las siguientes medidas:

$$L_1 = L_2 = 0.23 \text{ m.}$$

$$m_1 = m_2 = 0.4 \text{ kg.}$$

$$r_1 = r_2 = 0.035 \text{ m.}$$



Figura 4.1: Construcción de un péndulo doble.

Para capturar, en cada instante, los ángulos de desplazamiento $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, se fabricó una placa, la cual se muestra en la siguiente Figura:

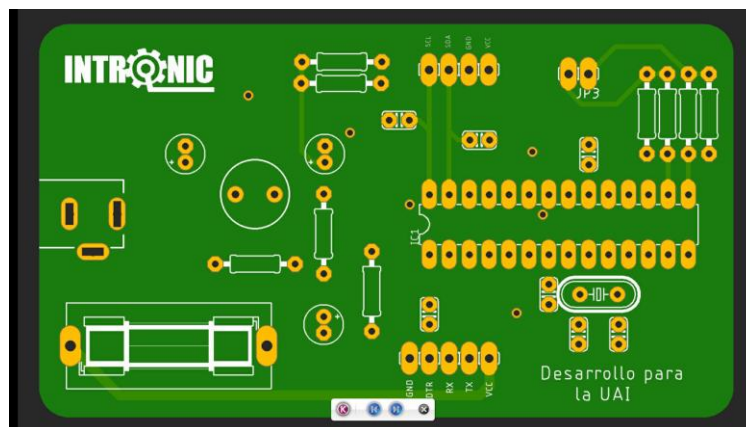


Figura 4.2: Placa especialmente creada para capturar los ángulos de desplazamiento de las masas del péndulo doble.

En la siguiente Figura se puede apreciar con más detalle cada dispositivo diseñado.

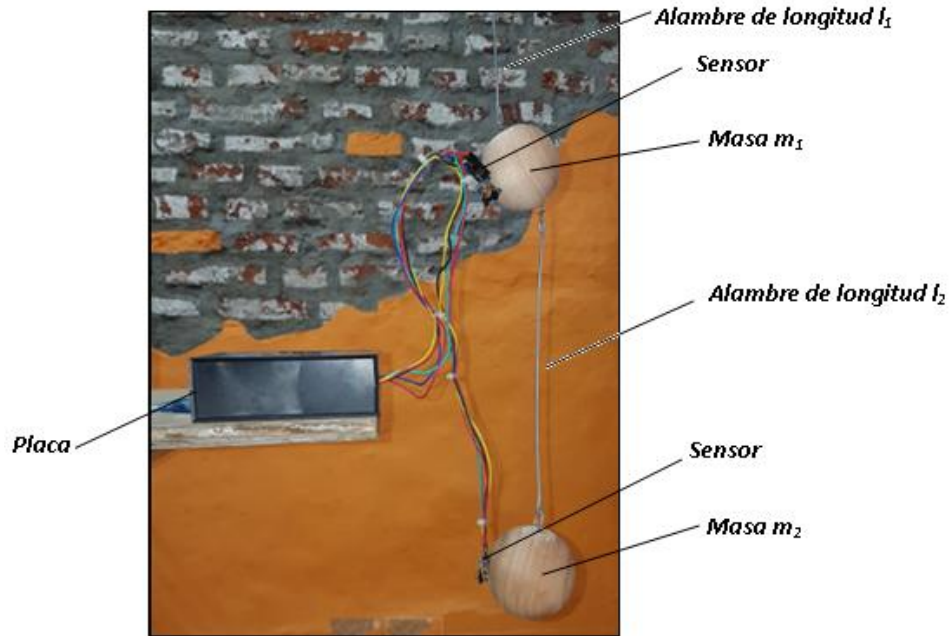


Figura 4.3: Placa y elementos del péndulo doble.

La placa consiste de un microcontrolador y dos sensores de aceleración (también llamados acelerómetros) ubicados en cada masa del péndulo. La placa se conecta a uno de los puertos de la CPU. Los sensores se encargan de medir la variación en la aceleración de la gravedad para transformarla en posición angular. Estos datos son transferidos, en tiempo real y a través de un programa, al Wolfram Mathematica 11.0 para luego representarlos gráficamente. A continuación mostramos el código fuente del programa que permite representar gráficamente los datos recibidos del sensor:

```
Clear[datos, graf, datos2, graf2], Which[cant == 10, puerto[Write["M"]], cant == 20,
    puerto[Write["N"]], cant == 5, puerto[Write["L"]], puerto[Write["Z"]], puerto[Write["A"]],
    lec = True, tarea = True]],
    Button["Detener lectura", {tarea = False, lec = False}],
    Button["Cerrar puerto", {puerto[Close[.]], estado = False}]],
    Frame -> All, Background -> {Black, White, White}, Spacings -> 1]
Column[{Style["Estados:", FontFamily -> "Calibre", 14, White],
    Row[{
        Style[" Puerto: ", FontFamily -> "Calibre", 14, Black],
        Dynamic[Show[If[estado, Graphics[{PointSize[.5], Green, Point[{0, 0}]}],
            Graphics[{PointSize[.5], Red, Point[{0, 0}]}]], ImageSize -> {20, 20}],
        Style[" Lectura: ", FontFamily -> "Calibre", 14, Black],
        Dynamic[Show[If[lec, Graphics[{PointSize[.5], Green, Point[{0, 0}]}],
            Graphics[{PointSize[.5], Red, Point[{0, 0}]}]], ImageSize -> {20, 20}]]
    }], Frame -> All, Background -> {Black, White, White}, Spacings -> 1]
data = {};
data2 = {};
Dynamic[mediciones];
Clear[datos, graf, datos2, graf2];
graf = {0, 0};
graf2 = {0, 0};
Grid[{Dynamic[
    Show[ListPlot[graf, PlotRange -> {{0, 60}, {-100, 100}}, Joined -> True,
        PlotStyle -> {Thickness[0.006], PointSize[0.008], Red}], ImageSize -> {300, 200}],
    Dynamic[
        Show[ListPlot[graf2, PlotRange -> {{0, 60}, {-100, 100}}, Joined -> False,
            PlotStyle -> {Thickness[0.006], PointSize[0.008], Blue}], ImageSize -> {300, 200}]]],
    Frame -> All]
```

La prueba se inició considerando los siguientes datos y condiciones iniciales:

$$L_1 = L_2 = 0.23 \text{ m.}$$

$$m_1 = m_2 = 0.4 \text{ kg.}$$

$$\theta_1(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\theta_2(0) = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$v_{10} = v_{20} = 0 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$r_1 = r_2 = 0.035 \text{ m.}$$

La captura de datos se realizó durante 30 segundos. Las gráficas de los ángulos de desplazamiento se muestran en la siguiente Figura:

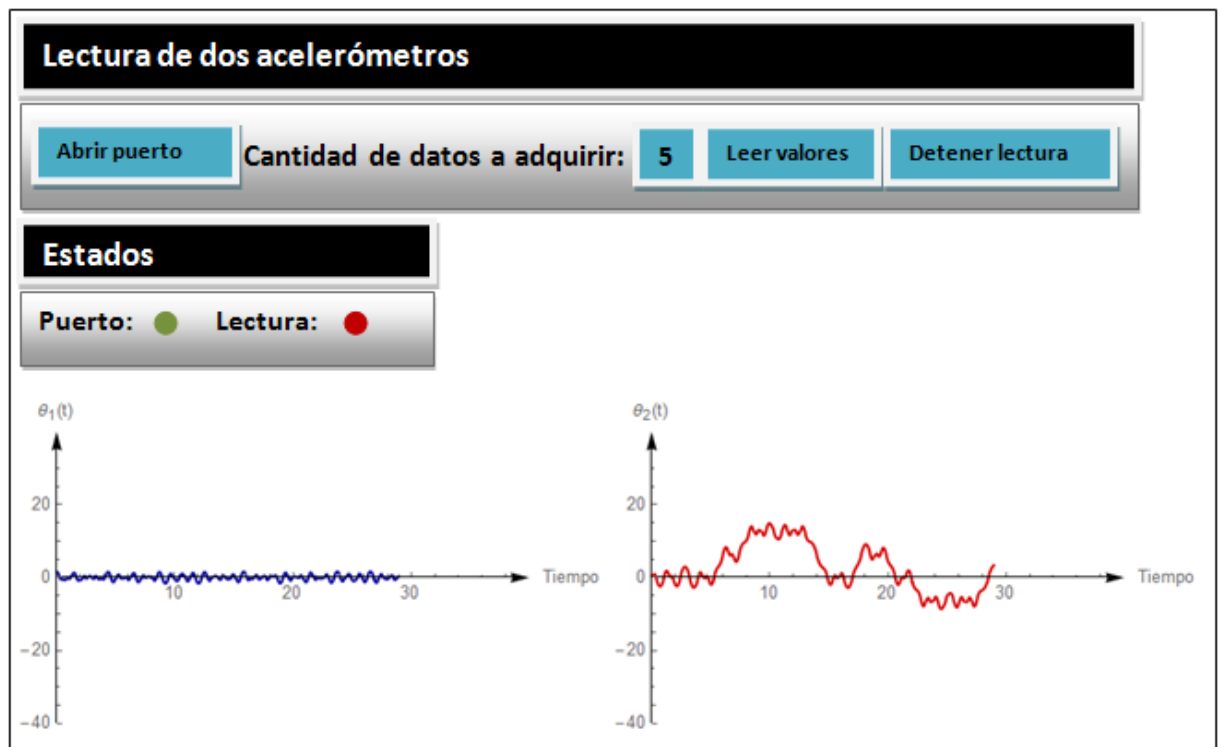


Figura 4.4: Captura de datos en tiempo real y representación gráfica de los desplazamientos de las masas del péndulo.

En la siguiente Figura mostramos las gráficas de los ángulos de desplazamiento $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ obtenidos teóricamente, resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales indicado en el Teorema 3.8.

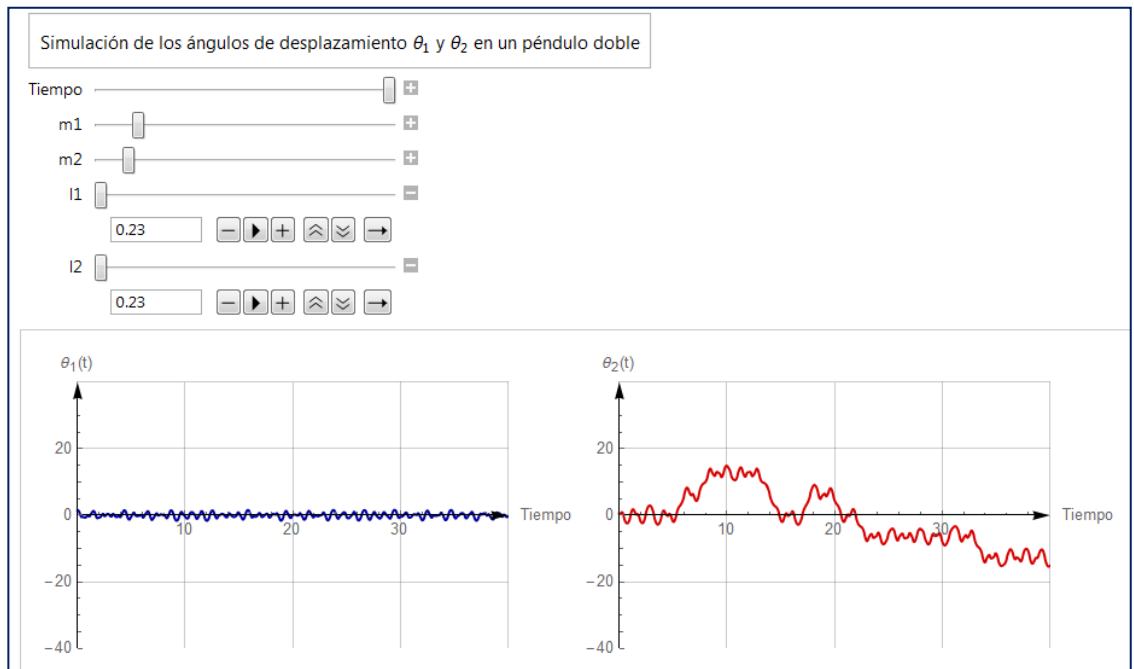


Figura 4.5: Gráficas de los desplazamientos de las masas del péndulo doble obtenidas analíticamente.

Como se puede comprobar, los ángulos de desplazamiento $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ obtenidos en forma real son notablemente similares a los que resultan de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales indicado en el *Teorema 3.8*. Este hecho prueba que el modelo matemático del péndulo doble se ajusta a la realidad.

En la siguiente Figura se pueden apreciar los sensores incorporados a las masas del péndulo doble y la placa conectada a la CPU.

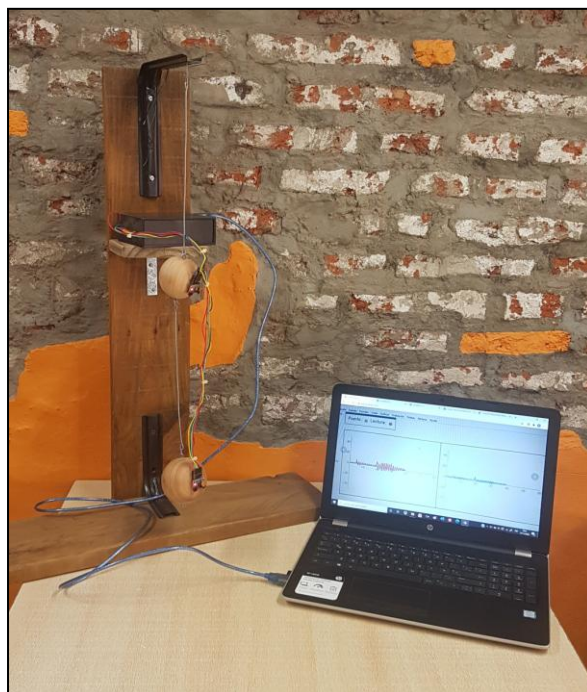


Figura 4.6: Captura de datos en tiempo real.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado cómo diseñar un modelo matemático que describa el movimiento de un péndulo doble, empleando la Mecánica Lagrangiana y nociones de Física.

Mediante el uso de simulaciones hemos comprobado que se trata de un sistema caótico, es decir, un sistema dinámico que es sensible a las condiciones iniciales. Su estudio servirá de metodología para analizar el comportamiento caótico de otros sistemas existentes en la naturaleza. Aunque resulte sorprendente, numerosos fenómenos naturales tienen un comportamiento caótico.

Por ejemplo, el movimiento de los planetas del sistema solar es un sistema caótico, ya que un pequeño cambio en el movimiento de uno de los planetas podría desestabilizar todo el sistema luego de transcurrir cierto tiempo.

La Meteorología también responde a un comportamiento caótico. Es por esta razón que los meteorólogos no pueden decir exactamente si lloverá o no dentro de una semana. Así, con dos mediciones iniciales muy parecidas, puede suceder que dentro de una semana llueva para una predicción, y para la otra no.

Además, los Ejemplos incorporados y desarrollados en esta tesis ayudarán a comprender fenómenos caóticos más complejos.

Finalmente, en este trabajo ponemos de manifiesto cómo diversas ramas de la Ciencia, en este caso, la Física y la Informática, interactúan con la Matemática para crear modelos matemáticos que simulen una situación de la vida real.

Referencias

- [1] Julio Pozo y Jonathan Makuc. *El péndulo doble caótico*. Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ciencias de la Ingeniería. Santiago de Chile (2012).
- [2] Roberto Rafael Rivera Durón y Eric Campos Cantón. *El mundo torcido de los sistemas dinámicos caóticos*. Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C. Potosí (2018).
- [3] Simmons George. *Ecuaciones Diferenciales, con problemas y notas históricas*. Ed. Mc Graw Hill (1993).
- [4] Ricardo Henry. *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Ed. Reverté (2008).
- [5] Dennis Hill. Michael Cullen. *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Ed. Thomson (2006).
- [6] C.H. Edwards , David E. Penney. *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con condiciones en la frontera*. Ed. Prentice Hall (1993).
- [7] Carlos Fernández Pérez, José Vázquez Hernández. *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias. Sistemas Dinámicos*. Ed. Thomson. (2003).
- [8] Jerrold Mardsen, Anthony Tromba. *Cálculo Vectorial*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. (2012).
- [9] Javier Sanz Recio, Gonzalo Sánchez Arriaga. *Mecánica Analítica: Lagrangiana, Hamiltoniana y Sistemas Dinámicos*. Ed. Mc Graw Hill. (2019)
- [10] Morris Hirsch, Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and an introduction to chaos*. Ed. El Sevier Academic. (2004)
- [11] Francis Sears, Mark Zemansky. *Física Universitaria. Volumen 1*. Ed. Pearson Educación. (2004)
- [12] Paul Tipler, Gene Mosca. *Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 1*. Ed. Reverté. (2008)